Université Denis Diderot L3

Équations Différentielles Ordinaires **2008-2009**

Septième feuille d'exercices: Stabilité et Fonctions de Lyapounov

Exercice 1. *Quelques systèmes linéaires*

1)Dire si l'origine est stable, asymptotiquement stable ou instable pour les systèmes suivants:

$$i) \quad \begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 3x + 4y \end{cases} \qquad ii) \begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = -3x - 2y \end{cases}$$

$$iii) \quad \begin{cases} x' = y \\ y' = 0 \end{cases} \qquad iv) \begin{cases} x' = 3x + 3z \\ y' = x + 2y - z \\ z' = -x + y - 2z \end{cases}$$

2) Calculer dans chacun des cas, la dérivée de la norme euclidienne le long des trajectoires. Plus précisement pour les systèmes de dimension 2, cela revient à calculer $d/dtH(t)$ avec $H(t) = x(t)^2 + y(t)^2$. Pour quels systèmes la norme euclidinne est-elle une fonction de Lyapounov?

Exercice 2. *L'oscillateur de Van der Pol*

Le comportement d'un circuit RLC, avec une résistance de fonction caractérisitque f vérifie l'équation suivante, où x est l'intensité et y est l'opposée de la tension aux bornes du condensateur:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - f(x) \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

1) La fonction f est supposé de classe C^1 et vérifiera toujours $f(0) = 0$. Trouver tous les équilibres du système. Calculer le système linéarisé au voisinage de ces points d'équilibres. A quelles conditions ces points d'équilibres sont-ils asymptotiquement stables? Instables?

2) On suppose dans cette question que $f(x) = x$. Calculer explicitement les solutions du systèmes. Interprèter.

3) On suppose dans cette question que f vérifie $f(x)x > 0$ pour $x \neq 0$. La résistance est alors dite passive. Montrer que $x^2 + y^2$ est une fonction de Lyapounov du système. En déduire le comportement asymptotique des solutions du système pour toutes conditions initiales. Pourquoi ce résultat est-il compatible avec celui du 1) ?

4) On suppose dans cette question $f(x) = x^3$.

a) Peut-on dire à première vue si les solutions sont globales ou explosives?

b) Laquelle de ces 2 techniques, linéarisation au voisinage du point d'équilibre ou utilisation de la norme comme fonction de Lyapounov, permet de conclure à propos de la stabilité du point $(0, 0)$.

5) On suppose dans cette question que la résistance est une diode à effet tunnel, de fonction caractéristique $f(x) = x^3 - x$.
a) Le point $(0, 0)$ est-il stable?
b) Dessiner dans l'espace des phases les régions du plan où $x' < 0$, $x' = 0$, $x' > 0$, et celles où $y' < 0$, $y' = 0$, $y' > 0$. Sur votre dessin, indiquer par une flèche la direction du champ dans chacune des régions.
c) Décrire grâce à ce dessin le comportement d'une solution ayant pour condition initiale $(0, y_0)$, avec $y_0 > 0$. (*Pour être précis, on pourra montrer qu'une solution* $(x(t), y(t))$ *telle que* $t \mapsto x(t)$ *est bornée, est nécessairement globale, et que* $t \mapsto y(t)$ *est aussi borné.*).
d) Montrer que $x(t)^2 + y(t)^2$ est croissant le long des trajectoires si $x(t) < 1$ et décroissant si $x(t) > 1$.
e) Que va-t-il se passer?