Première feuille d'exercices

Exercice 1.
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue positive. Montrer que $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ ssi f est nulle.

Exercice 2. 1) Calculer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$.
(*Astuce du capitaine: On utilisera les sommes de Riemann pour une fonction ad-hoc*)
2) Calculer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} \frac{n^2}{n^3+k^2}$.

Exercice 3. Comportement asymptotique des $S^p(n) = \sum_{k=1}^n k^p$.
1) On cherche à calculer $\sum_{k=1}^{100} k$.
a) En associant 1 et 100, 2 et 99, et ainsi de suite, montrer que

$$\sum_{k=1}^{100} k = 5050$$

b) Par le même raisonnement, montrer que $S^1(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ pour tout n.
c) Retrouver le résultat précedent en calculant de deux façons différentes

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2 - \sum_{k=1}^{n} k^2$$

2) Montrer que $S^2(n) = \frac{1}{3}n(n+\frac{1}{2})(n+1)$. (On pourra comme précedemment calculer de deux manières différentes $\sum_{k=1}^n (k+1)^3 - \sum_{k=1}^n k^3$)

De la même manière, on pourrait montrer que $S^3(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, et ainsi de suite par récurrence. Mais les formules se compliquent quand p augmente et si seuls des équivalents aux $S^p(n)$ quand $n \to +\infty$ nous interéssent, on peut en obtenir presque sans calcul grâce aux sommes de Riemann. En effet:
3) On fixe un $p \in \mathbb{N}$. Reconnaître que $u_n = \frac{1}{n^{(p+1)}} \sum_{k=1}^n k^p$ est une somme de Riemann pour une fonction que l'on précisera. En déduire la limite des u_n, et un équivalent à $S^p(n)$ en $+\infty$.

Exercice 4. Sup et Inf de fonctions.
Soit f une fonction de $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions continues et bornées de $\mathbb{R}$ dans lui-même. On définit alors

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$$

.
1) Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$.
2) Montrer que $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ est stable par produit, c'est-à-dire que si $f, g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$, alors $f\,g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$. Puis que $\|f\,g\|_\infty \le \|f\|_\infty \|g\|_\infty$.
(*Remarque*: Dans cette dernière question, on a montrer que $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ était une algèbre de fonctions, et que la norme infinie était une norme d'algèbre.)

Exercice 5. Approximations de l'identité
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit:

$$K_n(f) = \int_0^1 f(x)x^n\,dx, \qquad I_n(f) = nK_n(f).$$

1) Montrer que $\lim_{n\to\infty} K_n(f) = 0$ si f est constante, puis que cela reste vrai dans le cas général.

2) Vu que $\lim_{n\to\infty} K_n(f) = 0$, on cherche maintenant à calculer, si elle existe, $\lim_{n\to\infty} I_n(f)$.
 a) Calculer tous les $I_n(f)$ si f est:
i) une fonction constante, ii)Un monôme x^p pour $p \in \mathbb{N}$, iii) Un polynôme.
En déduire la limite des $I_n(f)$ dans chacun des cas.

 b) Faire une hypothèse sur la valeur de la limite dans le cas général.

3) Démontrer cette hypothèse.

4) Que vaut la limite de $J_n(f) = n\int_0^1 f(x)(1-x)^n\,dx$?

On considère maintenant une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et bornée. On définit:

$$A_n(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x)\,dx}{1+(nx)^2}, \qquad B_n(g) = nA_n(g).$$

5) Montrer que l'intégrale est bien définie et calculer la limite de $A_n(g)$.

6) Calculer tous les $B_n(g)$ ainsi que leur limite si f est une fonction constante.
 a) Que valent les $B_n(g)$ si f est une fonction impaire?
 b) Calculer $\lim_{n\to\infty} B_n(g)$ pour $g(x) = 1_{\{|x|\geq a\}}$ (la fonction qui vaut 1 si $|x| \geq a$ et 0 sinon.), pour tout $a > 0$.
 c) Faire une hypothèse sur la valeur de la limite dans le cas général.

7) Démontrer cette hypothèse.

8) Avec les mêmes hypothèses sur g, calculer pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} n\,\frac{g(y-x)\,dx}{1+(nx)^2}$$

Exercice 6. Limites sup et inf d'une suite de réels
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. On considère les éléments suivants de $\bar{\mathbb{R}}$ appelés limite sup et limite inf de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\liminf u_n = \sup_{p\in\mathbb{N}}(\inf_{n>p} u_n),\ \limsup u_n = \inf_{p\in\mathbb{N}}(\sup_{n>p} u_n)$$

1) Que valent $\limsup u_n, \liminf u_n, \inf u_n, \sup u_n$ dans les cas suivants:
 i) a^n (où $a \in \mathbb{R}^*$), ii) $(-1)^n(1+\frac{1}{n+1})$, iii) $n\cos^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)$, iv) $\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$.
v) $a_1 = 1/2$, $a_2 = 1/3$, $a_3 = 2/3$, $a_4 = 1/4$, $a_5 = 2/4$, $a_6 = 3/4$, $a_7 = 1/5$, et ainsi de suite.

2) Montrer que $\limsup u_n$ et $\liminf u_n$ ne varient pas si on change les M premiers termes de la suite. Cela est-il vrai pour $\sup u_n$ et $\inf u_n$? (la réponse à ses questions demande une démonstration ou un contre-exemple)
3) Quelles inégalités peut-on écrire avec les éléments de $\bar{\mathbb{R}}$ suivants:

$$\limsup u_n, \quad \liminf u_n, \quad \inf u_n, \quad \sup u_n.$$

4) Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.
 a) Comparer

$$\limsup(u_n+v_n) \quad \text{et} \quad \limsup u_n + \limsup v_n$$

$$\liminf(u_n + v_n) \quad \text{et} \quad \liminf u_n + \liminf v_n,$$

et donner des exemples dans lesquels les inégalités démontrées sont strictes.

b) On suppose les deux suites positives. Démontrer des inégalités similaires à celle de la question précedente pour la suite produit $(u_n v_n)$.

5) Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n$. Comparer $\limsup(u_n)$ et $\liminf(v_n)$.

6)a) Comparer les limites inf et sup de (u_n) et (v_n) quand $\lim_{n\to\infty} |u_n - v_n| = 0$.
b) En déduire lim sup et lim inf de la suite $\big(\sin(\frac{n\pi}{4} + \frac{1}{n^2})\big)$.

7)a) Montrer que $\limsup u_n$ et $\liminf u_n$ sont des valeurs d'adhérence de la suite (u_n).
(*Rappel: Une valeur d'adhérence de* (u_n) *peut être finie ou infinie. Dans les deux cas a est valeur d'adhérence ssi on peut extraire de la suite* (u_n) *une sous-suite* $(u_{\phi(n)})$ *qui converge vers a,* ϕ *étant une application strictement croissante de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$*).*)
b) On note $Val(u_n)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (u_n). Montrer que $\liminf u_n = \inf Val(u_n)$ et que $\limsup u_n = \sup Val(u_n)$.

8) Montrer qu'une suite (u_n) converge dans $\mathbb{R}$ ssi $\limsup u_n = \liminf u_n$ et cette valeur commune est réelle. Et qu'elle converge dans $\bar{\mathbb{R}}$ si $\limsup u_n = \liminf u_n$ dans $\bar{\mathbb{R}}$.

9) (difficile) Soit α un réel tel que $\frac{\alpha}{\pi}$ soit irrationnel.
a) Montrer que $\{m\alpha + 2n\pi | (m, n) \in \mathbb{Z}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
(*Rappel: Les sous-groupes de* $\mathbb{R}$ *sont soit denses dans* $\mathbb{R}$*, soit de la forme* $a\mathbb{Z}$*, pour un* $a > 0$*.*)
b) Montrer qu'il existe deux suites (m_k) et (n_k) d'entiers naturels telles que $\lim_{k\to\infty} m_k = \lim_{k\to\infty} = +\infty$ et $\lim_{k\to\infty} m_k\alpha + n_k 2\pi = 0$
c) En déduire que $\{m\alpha + 2n\pi | (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
d) En déduire les liminf, limsup, et l'ensemble des valeurs d'adhérence pour la suite $u_n = \sin(n\alpha)$.

Exercice 7. Limites sup et moyennes de Césaro
Soit (u_n) une suite réelle et (v_n) sa moyenne de Césasro définie par:

$$v_n = \frac{u_0 + \cdots + u_n}{n+1}.$$

Comparer les limites inf et sup de u_n et v_n (On donnera des exemples prouvant qu'il n'y a pas toujours égalité dans les inégalités obtenues).

Exercice 8. Suites réelles à croissance lente (difficile)
Soit u_n une suite réelle telle que $\lim_{n\to+\infty} |u_{n+1} - u_n| = 0$.
1) Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de u_n est un intervalle.
2) Quel est l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite des $\big(\ln(n) - E(\ln(n)\big)$ (où $E(x)$ désigne la partie entière de x)?

Exercice 9. Cardinaux et dénombrabilité
1) Soit E et F deux ensembles. On définit une relation $\mathcal{R}$ par

$$E\mathcal{R}F \text{ si et seulement s'il existe une bijection de } E \text{ dans } F$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est un relation d'équivalence.
Les *cardinaux* (ou *puissance*) sont alors par définition les classes d'équivalence pour cette relation. $E\mathcal{R}F$ se lit "E et F ont même *cardinal*". La classe d'équivalence de E, c'est-à-dire son cardinal, est notée $\mathrm{Card}(E)$ et si E et F sont en bijection, on a donc $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$.

2) On définit une relation sur les cardinaux par $\omega_1 \leq \omega_2$ si, pour deux ensembles $E \in \omega_1$ et $F \in \omega_2$, il existe une injection de E dans F.

a) Montrer que l'existence d'une injection ne dépend pas des représentants E et F choisis (c'est à-dire que si $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(E')$ et $\mathrm{Card}(F) = \mathrm{Card}(F')$, alors il y a une injection de E dans F ssi il y en a une de de E' dans F').

b) Montrer que cette relation est une relation d'ordre pour les cardinaux. On admettra pour cela le fameux et difficile théorème de Cantor-Bernstein que voici: s'il existe une injection entre A et B et une injection entre B et A, alors il existe une bijection entre B et A.

Un ensemble est dit dénombrable s'il a le même cardinal que $\mathbb{N}$, noté $\mathrm{Card}(N) = \aleph_0$.

3) Comparer les cardinaux de $\mathbb{N}$, de l'ensembles des nombres pairs, et de celui des nombres impairs.

4)a) Trouver une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ (On pourra parcourir $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ en diagonale en commencant par $(0,0),(1,0),(0,1),(2,0),(1,1),\ldots$).

b) En déduire qu'une réunion dénombrable d'ensemble dénombrable est dénombrable.

c) En déduire le cardinal de l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$.

d) En déduire le cardinal de l'ensemble des nombres algébriques (Les nombres complexes qui sont racines de polynômes à coefficients rationnels)

5) Montrer que pour tout ensemble E, $\mathrm{Card}(E) < \mathrm{Card}(\mathcal{P}(E))$. On raisonnera par l'absurde en supposant connue une bijection f de E dans $\mathcal{P}(E)$ et on montrera que la partie
$B = \{x \in E | x \notin f(x)\}$ ne peut pas possèder d'antécedent.

6)a) En déduire que $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) > \aleph_0$.

b) Soit C un ensemble tel que $\mathrm{Card}(C) > \aleph_0$ et $D \subset C$ une partie dénombrable. Montrez que C D et C on même cardinal.

7) Montrer que $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = \mathrm{Card}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$. (Utiliser un moyen commode de fabriquer une fonction à partir d'un ensemble)

8) Utiliser le développement des réels en base deux pour montrer que

$$\mathrm{Card}([0,1]) = \mathrm{Card}(\mathcal{P}(\mathbb{N})).$$

a) Montrer que $\mathrm{Card}([0,1]) = \mathrm{Card}(\mathbb{R})$. En déduire que le cardinal de $\mathbb{R}$ est strictement plus grand que celui de $\mathbb{N}$. On le note habituellement $\mathrm{Card}(\mathbb{R}) = c_0$. C'est le cardinal ou la puissance du continu.

b) Quel est le cardinal de l'ensemble des nombres transcendants, les nombres réels qui ne sont pas algébriques?