Université Paris 7 — 2007-2008

Intégration — L3 Maths Appliquées

Seconde feuille d'exercices

Exercice 1: Limites sup et inf d'une suite de parties

Dans cet exercice on considère un ensemble Ω, et (A_n) une suite de parties de Ω. On appelle limite sup et limite inf de la suite (A_n) les parties:

$$\liminf A_n = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq p} A_n, \qquad \limsup A_n = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq} A_n$$

1) Trouver l'analogie avec la définition de limite sup et inf pour les réels?

2) Soient (A_n) et (B_n) deux suites de parties de l'ensemble Ω.
  a) Vérifier l'inégalité $\liminf A_n \subset \limsup A_n$ et l'égalité $(\liminf A_n)^c = \limsup(A_n^c)$.
  b) Montrer que $\limsup(A_n \cup B_n) = (\limsup A_n) \cup (\limsup B_n)$.

3)a) Montrer que $\limsup A_n = \{x | \ x \text{ appartient à une infinité des } A_n\}$,
et que $\liminf A_n = \{x | \ x \text{ appartient à tous les } A_n \text{ à partir d'un certain rang}\}$.
  b) En déduire que $\limsup A_n \cap \liminf B_n \subset \limsup(A_n \cap B_n) \subset (\limsup A_n) \cap (\limsup B_n)$.

Exercice 2: Quelques exemples

1) Soit (u_n) est une suite quelconque de réels
  a) Montrer que $]-\infty, \limsup u_n[\subset \limsup]-\infty, u_n[\subset \limsup]-\infty, u_n] \subset]-\infty, \limsup u_n]$.
  b) Donner des exemples montrant que ces inclusions peuvent être strictes.

2) On pose comme dans la première feuille d'exercice
$a_1 = 1/2$, $a_2 = 1/3$, $a_3 = 2/3$, $a_4 = 1/4$, $a_5 = 2/4$, $a_6 = 3/4$, $a_7 = 1/5$...
et on définit $I_n = [a_n, a_{n+1}]$. Calculer $\limsup I_n$ et $\liminf I_n$.

3)a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists!(p_n, q_n) \in \mathbb{N}^2, n = 2^{p_n} + q_n, 0 \leq q_n < 2^{p_n}$.
  b) On note $I_n = [\frac{q_n}{2^{p_n}}, \frac{1+q_n}{2^{p_n}}]$. Déterminer $\limsup I_n$ et $\liminf I_n$.

Exercice 3: Inégalité de Jensen

Soit Φ une fonction convexe continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Et soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comparer $\Phi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n})\right)$ et $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \Phi(f(\frac{k}{n}))$

2) En déduire l'inégalité de Jensen:

$$\Phi\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right) \leq \int_0^1 \Phi \circ f(x)\,dx$$

3) Application: On suppose $1 \le p \le q < +\infty$. Comparer

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(x)|^p\right)^{1/p} \quad \text{et} \quad \left(\|f\|_q = \int_0^1 |f(x)|^q\right)^{1/q}$$

Exercice 4.

1) Montrer que la fonction caractéristique de $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ n'est pas Riemann-intégrable.

2) Montrer que la fonction $f : [0,1] \to [0,1]$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ x \text{ irrationnel} \\ 1 & \text{si } \ x = 0 \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ fraction irréductible} \end{cases}$$

est Riemann-intégrable. (*Essayer de 1) construire pour* $\varepsilon > 0$ *une division* D *de [0,1] pour laquelle* $S(D) < 2\varepsilon$ *où* $S(D)$ *est la grande somme de Darboux associée à* f *et* D*; 2) trouver les discontinuités de* f*; 3) Montrer que* f *est limite uniforme de fonctions en escalier.*)

3) Utiliser cette fonction et la fonction indicatrice de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ pour montrer que la Riemann-intégrabilité n'est pas stable par composition. Utiliser la fonction indicatrice de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ pour montrer que la Riemann-intégrabilité n'est pas stable par limite simple.

Exercice 5. Pour la suite de fonctions $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \frac{nx}{(1+n^2x^2)^2}$$

calculer $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$. La convergence est-elle uniforme ? A-t'on

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx \quad ?$$

Mêmes questions pour la suite $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ donnée par $g_n(x) = \dfrac{n^2x}{(1+n^2x^2)^2}$.

Exercice 6.

1) Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des parties bornées de $\mathbb{R}$.
   a) Caractériser l'algèbre de Boole notée $\mathcal{C}$ engendrée par $\mathcal{B}$.
   b) Cette algèbre $\mathcal{C}$ est-elle une tribu?

2) Soit E un ensemble. Caractériser l'algèbre de Boole et ensuite la tribu engendrée par les singletons $\{x\}, x \in E$.

Exercice 7. Soient $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ deux tribus sur un ensemble E. Montrer que la tribu engendrée par

$$\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 = \{A | A \in \mathcal{A}_1 \text{ ou } \ A \in \mathcal{A}_2\}$$

coïncide avec la tribu engendrée par $\{A_1 \cap A_2 | A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}$ ou encore par $\{A_1 \cup A_2 | A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}$.

Exercice 8. Parties bornées
Soit $\mathcal{B}$ une tribu sur un ensemble E, et F une partie de E. On note $\mathcal{B}_F$ la tribu trace de $\mathcal{B}$ sur F.

1)a) Comparer $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B} \cap \P(F) = \{B \in \mathcal{B}, B \subset F\}$.
b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{B}_F = \mathcal{B} \cap \P(F)$.

2) Soit $\mathcal{C}$ une classe de parties engendrant la tribu $\mathcal{B}$. On note $\mathcal{C}_F = \{C \cap F | C \in \mathcal{C}\}$. Montrer que $\mathcal{C}_F$ engendre $\mathcal{B}_F$. (*Voir ceci comme un cas particulier du Lemme de transport.*)

Exercice 9. Les ouverts de $\mathbb{R}$ sont des réunions d'intervalles ouverts
Soit $\mathcal{O}$ l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$ et $O \in \mathcal{O}$.

1)a) Pour tout x, on pose $C_x = \bigcup_{x \in]a,b[\subset O}]a,b[$. Montrer que C_x est un intervalle ouvert.
b) Montrer qu'il n'y a qu'un nombre dénombrable de C_x distincts. En déduire que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints.

2) Montrer que la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ des boreliens de $\mathbb{R}$ peut être engendrée par l'une des classes suivantes:

$$\mathcal{C}_1 = \{]a,b[, a,b \in \mathbb{Q}\} \qquad \mathcal{C}_2 = \{]-\infty, a], a \in \mathbb{Q}\} \qquad \mathcal{C}_3 = \{]-\infty, a[, a \in \mathbb{Q}\}$$

$$\mathcal{C}_4 = \{]a, +\infty[, a \in \mathbb{Q}\} \qquad \mathcal{C}_5 = \{[a, +\infty[, a \in \mathbb{Q}\} \qquad \mathcal{C}_6 = \{]-\infty, a], a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$$

3) Montrer que la tribu borélienne de $\bar{\mathbb{R}}$ est engendrée par $\bar{\mathcal{C}}1 = \{[a, +\infty], a \in \bar{\mathbb{R}}\}$ et $\bar{\mathcal{C}}2 = \{[a, +\infty], a \in \mathbb{Q} \cup \{-\infty\}\}$

Exercice 10: Petites tribus
Soit E un ensemble et A, B, C trois parties de E. Décrire les tribus engendrées respectivement par (A), (A, B) et (A, B, C).

Exercice 11: Il n'existe pas de tribu dénombrable
Soit $\mathcal{A}$ une tribu dénombrable sur E. Pour tout $x \in E$, on pose

$$B_x = \bigcap_{A \in \mathcal{A}, x \in A} A$$

1)a) Montrer que $B_x \in \mathcal{A}$ et que c'est le plus petit ensemble de la tribu contenant x.
b) Montrer qu'il n'y a qu'un nombre dénombrable de B_x distincts. On les notera dorénavant B_n, et on notera $\mathcal{B} = \{B_n | n \in \mathbb{N}\}$.

2)a) Montrer que pout tout $A \in \mathcal{A}$, $A = \cup_{B_n \subset A} B_n$. En déduire que $\mathcal{B}$ engendre la tribu $\mathcal{A}$, et que l'on a

$$\mathcal{A} = \{\cup_{j \in J} B_n | \ J \subset \mathbb{N}\}$$

b) En déduire une contradiction et conclure l'inexistence d'une tribu dénombrable.

Exercice 12. On note $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu Borelienne de $\mathbb{R}$.
La fonction $\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) & \rightarrow & (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \\ x & \mapsto & x - [x] \end{array}$ est-elle mesurable?

Exercice 13.
Soient f et g deux applications mesurables de $(E, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Montrer que les ensembles $\{f < g\}$, $\{f \leq g\}$, $\{f = g\}$ sont $\mathcal{A}$-mesurables. Même question si f et g sont à valeurs dans $(\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$.

Exercice 14: "Dur de construire des fonctions non mesurables à partir de fonctions mesurables"
Cet exercice est fait pour se convaincre que quasimment toute fonction construite comme somme, produit, quotient, derivée, primitvie, limite uniforme ou simple... de fonctions mesurables sera mesurable. Une seule precaution à prendre: Ne pas modifier les tribus de départ et d'arrivée.
On munit $\mathbb{R}$ de la tribu borélienne (ou de la tribu de Lebesgue). Soient $(X, \mathcal{B})$ un espace muni d'une tribu, g et h deux fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}$, et (f_n) une suite de fonction mesurable de X dans $\mathbb{R}$. Dans la suite, pour une fonction $h : X \to \mathbb{R}$ et $D \subset X$. On notera $h|_D$ la restriction de h à D.

1) Rappeler pourquoi on peut dire qu'une fonction de X dans $\mathbb{R}$ est mesurable ssi $f^{-1}(]a, +\infty[)$ est mesurable pour tout a.

2)a) On munit $\mathbb{R}^2$ de sa tribu borélienne. Montrer que la fonction (f, g) de X dans $\mathbb{R}^2$ est mesurable.
b) En déduire que $f + g$, fg sont mesurables.
c) Soit $A = \{x | \ g(x) \neq 0\}$. Montrer que l'ensemble A est mesurable puis que $\frac{f}{g}|_A$ est mesurable quand on munit A de la tribu induite par celle de X.

3)a) Montrer que $\inf_n f_n$ et $\sup_n f_n$ sont mesurables comme fonctions à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}$ muni de sa tribu borélienne. La tribu borĺienne de $\bar{\mathbb{R}}$ étant engendrée par les $]a, +\infty]$.
b) Montrer que $\liminf f_n$ et $\limsup f_n$ sont mesurables.
c) Montrer que l'ensemble $B = \{x | \ (f_n(x)) \text{ converge}\}$ est mesurable. Puis que $(\lim f_n)|_B$ est mesurable quand B est muni de la tribu induite.

4)a) Parmi les questions précedentes, dire lesquelles restent vraies, et lesquelles deviennent fausses lorsqu'on remplace dans les énoncés mesurable par continue, l'espace muni d'une tribu $(X, \mathcal{B})$ par un espace métrique, et en considérant $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle (Dans le cas de réponses négatives, on donnera des contre-exemples).
b) La théorie de l'intégrale de Lebesgue permet d'integrer toutes les fonctions mesurables. Quel avantage mis en évidence ici cela procure-t-il par rapport à la théorie de l'intégrale de Riemann?

5) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Pour tout n, on définit:

$$h_n(x) = \frac{1}{n} \left(g\big(x + \frac{1}{n}\big) - g(x) \right)$$

a) Montrer que les fonctions h_n sont boreliennes.
b) Que vaut $\lim_{n \to +\infty} g_n(x)$?
c) En déduire que g' est borélienne.