Université Paris 7 — 2007-2008
Intégration — L3 Maths Appliquées

TD3: Indications et solutions

Le sujet est nouveau et les exercices sont pas faciles (parfois durs). Il faut prendre le temps de s'habituer aux raisonnements, au vocabulaire, même si vous ne comprenez pas tout.

Exercice 1: Mesures diffuses
2) Il y a au plus $nm(\mathbb{R})$ atomes de masse $1/n$. Et si A st l'ensemble des atomes, et A_n celui des atomes de masse $\leq 1/n$, alors $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et une union de d'ensemble finis est dénombrable.
3) On note A_m l'ensemble des atomes de m, puis $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $m_d(B) = m(B \cap A)$ et $m_a(B) = m(B\backslash A)$. Pour l'unicité, on suppose qu'il y a deux décomposition possible $m = m_d^1 + m_a^1 = m_d^2 + m_a^2$, on montre alors que $m_d^1 = m_d^2$ et $m_a^1 = m_a^2$.

Exercice 2: Ouverts et mesure
1) Un ouvert contient toujours un petit intervalle ouvert $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ de mesure 2ε.
2)a) On prends une suite (x_n) qui parcourt tous les rationnels (dénombrables). C'est-à-dire que $\mathbb{Q} = \{x_n | n \in \mathbb{N}\}$. On pose alors $O_\varepsilon = \cup_{n\in\mathbb{N}} B(x_n, 2^{-n})$
b) Par contraposition pour la première partie. Pour la seconde question: "Que serait le complémentaire d'un tel ensemble?"
3)a) Prendre $\cup_{n\in\mathbb{N}} \left[n, n+\frac{1}{n^2}\right]$.
b) Dans $\mathbb{R}^2$, essayer avec $B = \{(x,y) | 1 \leq x \text{ et } 0 \leq y \leq x^{-2}\}$. Pour $\mathbb{R}^d$, avec $d \geq 3$, on peut choisir $B \times [0,1]^{d-2}$.

Exercice 3: La mesure de Lebesgue est la seule mesure invariante par translation
1) $[0,1]$ contient une infinité de singletons qui tous des translatés du singleton $\{0\}$. Cela implique que $m(\{0\}) = 0$.
2) $m([0,1[) = \sum_{k=0}^{q-1} m([k/q,(k+1)/q[) = qm([0,1/q[)$.
Puis, $m([0,p/q[) = \sum_{k=0}^{q-1} m([k/q,(k+1)/q[) = pm([0,1/q[)$
3) Il suffit de prouver qu'on a aussi $m([0,x[) = x$ pour tout réel (on encadrera x par des rationnels).

Exercice 5. Mesures absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue
1) On peut utiliser au choix les théorèmes de convergence monotone ou dominée pour la suite $\sum_{k=1}^n f_k$.
2) On a démontré le caractère additif de μ à la question precédente. L'absolue continuité est triviale.
3) On le démontre d'abord pour les fonctions étagées, puis on approche une fonction mesurable positive quelconque par une fonction étagée et on utilise un théorème de convergence ad-hoc.

Exercice 6. On pose $f_n = \sum_{k=0}^{n2^n} k2^{-n} 1_{\{k2^{-n} \leq f(x) < (k+1)2^{-n}\}}$. Les f_n sont des fonctions étagées. Leur intégrale vaut exactement la somme voulue. Il reste à montrer que $f_n \to f$ presque partout, et à utiliser le bon théorème de convergence.

Exercice 7. Il faut rajouter que la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
1)a) $g^-(x) = \sup\limits_{y<x} g(x)$ et $g^+(x) = \dots$

b) Faire un dessin pour s'aider à comprendre. Entre $-N$ et N, il y a au plus $n(g(N)-g(-N))$ sauts de hauteur supérieure à $1/n$. C'est-à-dire un nombre fini. si S_n est l'ensemble points de saut de hauteur supérieure à $1/n$, et S l'ensemble des points de saut, alors $S \cap [-N, N] = \cup_{n\in\mathbb{N}} S_n \cap [-N, N]$ et donc $S \cap [-N, N]$ est dénombrable comme union d'ensembles finis d'après ce qui précede. Et donc $S = \cup_{N\in\mathbb{N}} S_n \cap [-N, N]$ est aussi dénombrable.

c) (Délicat) Soit $h(x) = \sum\limits_{s\in S}((g^+(s)-g^-(s))1_{\{s<x\}} + (g(s)-g^-(s))1_{\{x=s\}})$. C'est la fonction constante par morceaux, qui saute au même moment que f de la même hauteur, mais ne croît pas entre les sauts. Il faut faire un dessin dans un cas simple de la fonction h. On peut voir que h est borélienne, car étagée. Et aussi que $f-h$ est continue, car h annule tous les sauts de f

d) (Dur) Si A est la partie sur laquelle f est croissante, et $\tilde{g}(x) = \sup\limits_{y\in A, y\le x} g(y)$, alors $f = \tilde{g}1_A$ avec $\tilde{g}$ croissante donc borélienne et 1_A borélienne.

Exercice 9. (assez dur) Si m est bornée, la mesure image par f est bornée.
Pour le cas sigma fini, on regardera la fonction constamment nulle sur $\mathbb{R}$ entier.
Pour la caractère diffus, on choisira une fonction constante.
Pour $f(x) = [x]$, la mesure image est $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n$

Exercice 10: Construction d'une partie non borélienne de $\mathbb{R}$
1) Il suffit d'appliquer l'axiome du choix avec les classes d'équivalence. A noter, que l'axiome du choix est un axiome qui a longtemps étonné les mathématiciens. Ils ont longtemps pensé que cela était vrai sans savoir le démontrer, jusqu'au jour ou on a réussi à démontrer que cela était ni vrai, ni faux. A partir de ce moment là, on l'a choisi comme axiome.
2) Soit $x \in [0, 1]$. Alors il existe $y \in E$ tel que $x - y \in \mathbb{Q}$. De plus, on a forcément $|x - y| \le 1$ ce qui démontre la première inclusion.
3) λ est invariante par translation. Les $E + r$ ont tous la mème mesure. Alors $m([0, 1] \le \sum\limits_{r\in\mathbb{Q}} \lambda(E + r) \le m([-1, 2])$ et ...
On en déduit que E n'est pas borélienne.

Exercice 12.
Soit $N_n = \{x | f_n(x) \ne g_n(x)\}$. D'après les hypothèses, $\lambda(N_n) = 0$. on pose $N = \cup_{n\in\mathbb{N}} N_n$. Alors, $\lambda(N) = 0$. Et $\forall x \notin N$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = g_n(x)$, et donc $\forall x \notin N$, $\sup f_n(x) = \sup g_n(x)$.
Ce qui veut exactement dire que cette égalité a lieu presque partout.

Exercice 13.
On note λ la mesure de Lebesgue.
1) Ce sont les fonctions nulles. Si f est nulle -pp, elle est nulle sur un ensemble de mesure pleine et les ensembles de mesures pleines sont denses.
2) $1_{\mathbb{R}^+}$ est continue presque partout, mais il n'existe pas de fonction g continue telle que $g = 1_{\mathbb{R}^+}$ -pp.

$1_{\mathbb{Q}}$ est égale à la fonction nulle presque partout mais n'est dérivable en aucun point.

Exercice 13: Lemme de Borel-Cantelli
D'après l'hypothèse, $m(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n) < \infty$. Et la suite d'ensemble $\cup_{n\leq p} A_p$ est décroissante, avec un premier terme de mesure finie, donc $m(\overline{\lim} A_n) = \lim_{n\to\infty} m(\cup_{n\leq p} A_p)$. Et $m(\cup_{p\leq n} A_p) \leq \sum_{p=n}^{\infty} m(A_p)$. Or $\lim_{n\to\infty} \sum_{p=n}^{\infty} m(A_p) = 0$ comme limite du reste d'une série convergente.

Exercice 15. Fait en Td.

Exercice 16.
a) $\Rightarrow$ b) se fait par convergence dominée. ($\int_{\{|f|>n\}} |f| d\mu = \int 1_{\{|f|>n\}} |f| d\mu$)
b) $\Rightarrow$ a) se traite en décomposant $|f| = |f| 1_{\{|f|>n_0\}} + |f| 1_{\{|f|\leq n_0\}}$, avec un n_0 pour lequel $\int_{\{|f|>n\}} |f| \leq 1$.
a) $\Rightarrow$ c). c) est l'intégrale de $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} = n 1_{\{n<|f|\leq n+1\}}(x)$, une fonction que $|f|$ majore.
c) $\Rightarrow$ a). On a aussi $f(x) \leq g(x) + 1$ pour tout x.
c) $\Leftrightarrow$ d). C'est en fait deux façons d'écrire la somme $\displaystyle\sum_{n\leq k} \mu(\{k < |f| \leq k+1\}$,
ou les (n,k) sont pris sur tous les couples d'entiers qui vérifient la relation. En sommant, d'abord sur n, on obtient la somme du c), et en sommant d'abord sur n, la somme du d).

Exercice 17.
Fait en TD, on se rappelle d'ailleurs que toutes les composées, sommes, limites,... de fonctions boréliennes, sont encore boréliennes, et qu'on peut même changer la valeur de la fonction sur un ensemble négligeable.

Exercice 18.
1) Fait en Td. Il faut utiliser $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (1 - \frac{x}{n})^n = e^{-x}$, puis le théorème de convergence dominée.
2) En utilisant le théorème de convergence dominée, on voit que
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,n^2]} (1 + \frac{x}{n})^n e^{-ax} dx = \frac{1}{a-1}, \text{ si } a > 1.$$
(Dur) Quand $a \leq 1$, on peut utiliser la convergence monotone pour montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,n^2]} (1 + \frac{x}{n})^n e^{-ax} dx = +\infty\ .$$

Exercice 19. Etudier:
1) La limite vaut 0 par convergence dominée.
2) Les deux limites valent 0 par convergence dominée. Pour la seconde, la fonction majorante est plus dure à trouver. On pourra chercher une majoration valable pour $x \leq 1$, puis majorer pour $x > 1$ par $\displaystyle\frac{n}{C_n^3 x^2}$, puis par $\displaystyle\frac{3}{x^2}$.

Exercice 20. Pratiquement fait en TD. On a que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Il faut alors calculer les intégrales. Il manque l'hypothèse de domination pour appliquer le théorème de convergence dominée.