Cinquième feuille d'exercices

Exercice 1: Normes L^p

1) Calculer les normes L^1, L^∞, et L^p (pour $p \in]1, \infty[$) des fonctions suivantes (définies sur $\mathbb{R}$):

$$1_{\mathbb{Q}}(x), \qquad x1_{[0,1]}(x), \qquad (1-x)1_{[0,1]}(x), \qquad \frac{1}{x}1_{]0,1]}(x), \qquad \frac{1}{x}1_{[1,+\infty[}(x)$$

2) Calculer les normes L^1, L^∞, et L^p (pour $p \in]1, \infty[$) des fonctions suivantes (définies sur $\mathbb{R}^2$):

$$1_{\{x=0\}}(x,y), \qquad 1_{\mathbb{R}\times\mathbb{Q}}(x,y), \qquad \frac{1}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}}1_{\{x^2+y^2\leq 1\}}(x,y), \qquad \frac{1}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}}1_{\{x^2+y^2\geq 1\}}(x,y)$$

Exercice 2. Les espaces $L^p([0,1])$

Soit p et q deux entiers tels que $1 \leq p \leq q < +\infty$
1) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée (ou L^∞).
a) Montrer que $\|f\|_1 \leq \|f\|_p < \|f\|_q \leq \|f\|_\infty$.
b) En déduire des inclusions entre $L^1([0,1])$, $L^p([0,1])$, $L^q([0,1])$ et $L^\infty([0,1])$.
2) Montrer que pour toute fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mesurable, $\lim\limits_{n\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

Exercice 3. Les espaces $L^p(\mathbb{R})$

Soit p et q deux entiers tels que $1 \leq p < q \leq +\infty$.

1) Montrer qu'on ne peut écrire aucune inclusion entre $L^p(\mathbb{R})$ et $L^q(\mathbb{R})$ (On pourra utiliser des fonctions du premier exercice).
2) Montrer que l'on a par contre $L^p \cap L^q \subset \cap_{p<r<q} L^r$.
(On écrira $r = \theta p + (1-\theta)q$, avec $\theta \in [0,1]$ et on appliquera l'inégalité d'Hölder au produit $f^{\theta p} f^{(1-\theta)q}$)
3) Reprendre la preuve du 2) pour montrer que $r \mapsto \ln(\|f\|_r)$ est une fonction convexe.

Exercice 4: Convolution

Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit la convolée de f par g, notée $f * g$ par la formule:

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\,dy$$

L'idée est de calculer une moyenne de f autour du point x, avec un poids $g(x-y)$, un poid de profil g que l'on translate.
La convolée de f et$g$ n'est pas toujours définie. Il faut faire des hypothèses sur ces fonctions pour pouvoir calculer l'intégrale sur $\mathbb{R}$. Nous allons voir quelques unes de ces hypothèses.

1) Montrer que si la convolution est bien définie, on a $(f*g)(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,dy$. (C'est-à-dire que formellement, $f*g = g*f$).

2) Pour mieux comprendre la convolution, on va essayer sur un exemple: On choisit $n \in \mathbb{N}$ et on pose $f = 1_{[-1,1]}$ et $g = 1_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]}$.
a) Montrer que dans ce cas, l'intégrale qui définit la convolution est bien définie.
b) Calculer $f*g$.

c) Représenter f et $f * g$ sur le même dessin. qui montre que l'on calcule la moyenne de f sur $[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}]$.

On observe que la fonction $f * g$ est régulière, alors f ne l'est pas (et g aussi). C'est un effet très important de la convolution: le fait de faire des moyennes rend les fonctions plus régulières. On dit que la convolution a un effet **régularisant**

3) On va le démontrer dans le cas précis ci-dessus. Sans modifier g, on suppose maintenant que f est une fonction bornée quelconque.

a) Montrer que, si $x \geq x_0$, $(f * g)(x) - (f * g)(x_0) = \displaystyle\int_{x_0+\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f(x)\,dx - \int_{x_0-\frac{1}{n}}^{x-\frac{1}{n}} f(x)\,dx$

(On fera un dessin pour expliquer ce calcul).

b) Calculer la limite de cette quantité. En déduire que $(f * g)$ est continue.

On revient maintenant à des fonctions f et g quelconques. On va s'intéresser au conditions qui permettent de définir le produit de convolution.

4) On suppose que $f \in L^\infty$ et que $g \in L^1$. Montrer qu'alors $f * g$ est bien définie, que $f * g \in L^\infty$ et que l'on a:

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_1$$

5) On suppose que $f, g \in L^2$. Montrer que $f * g$ est bien définie et que $\|f * g\|_2 \leq \|f\|_2 \|g\|_2$. (*Utiliser l'inégalité de Cauchy-Scwartz*).

Dans les question suivantes, on s'intéresse nous maintenant au rapport entre convolution et dérivation. On suppose maintenant que f est de classe $\mathcal{C}^1$, que sa dérivée est bornée et que g est intégrable (c-à-d que $g \in L^1$).

6) Montrer que $(f * g)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et que sa dérivée est donnée par:

$$(f * g)'(x) = \int f'(x - y)g(y)\,dx = (f' * g)(x)$$

7) On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et que toutes ses dérivées sont bornées. Montrer que $(f * g)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et que ses dérivées sont données par:

$$(f * g)^{(n)}(x) = \int f^{(n)}(x - y)g(y)\,dx = (f^{(n)} * g)(x)$$

On va maintenant donner une méthode pour approximer des fonctions continues et bornées par des fonctions $\mathcal{C}^\infty$...

8) On ne suppose plus $f \in \mathcal{C}^\infty$, mais seulement que f est continue. Soit ϕ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, à support dans $[-1, 1]$ (c-à-d que $\phi(x) = 0$ si $|x| \leq 1$) et telle que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \phi(x)\,dx = 1$ (On admettra l'existence d'une telle fonction). On définit aussi $\phi_n(x) = n\phi(nx)$.

a) Montrer que $\forall n$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \phi_n(x)\,dx = 1$ et que $|x| \geq \frac{1}{n} \Rightarrow \phi_n(x) = 0$ (c-à-d que Φ_n a son support dans $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$.

b) Montrer que $(f * \phi_n)(x) - f(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} (f(x - y) - f(x)\phi_n(y)\,dy$

c) Représenter sur un dessin du graphe de f la différence entre $(f * \phi_n)(x)$ et $f(x)$

d) Montrer que pour tout x $\lim_{n\to\infty} (f * \phi_n)(x) = f(x)$.

e) Montrer que pour tout n, $(f * \phi_n)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

f) Montrer que si on suppose que f est uniformément continue, alors $\lim_{n\to\infty} \|f - (f * \phi_n)\|_\infty = 0$