Université Paris Diderot | Année 2007/08
L3 Maths Appliquées | Intégration

Examen du 7 janvier

Durée: 3 h. Barème: 8, 4, 8.

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont munis de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue.

I

Questions de cours.

1)

a) Pour tout k, $A_k = f^{-1}([k, +\infty[)$ est un borélien car c'est l'image réciproque par la fonction mesurable (car intégrable) f de l'intervalle (et donc borélien) $[k, +\infty[$.

b) Remarquons que $\forall x \in X$, $k1_{A_k}(x) \leqslant f(x)$. On intègre cette inégalité:

$$k\mu(A_k) = \int k1_{A_k}\, d\mu \leqslant \int f\, d\mu.$$

On peut donc choisir $\alpha = \displaystyle\int f\, d\mu$.

c) Soit $A_\infty = \{x \in X \ :\ f(x) = +\infty\}$. On a alors que $A_\infty = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$. D'après les propriétés de la mesure, et comme $\mu(A_1) \leqslant \alpha < +\infty$, on a que $\mu(A_\infty) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mu(A_n)$ (qui existe car la suite $(\mu(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante). Mais d'après la question précédente, $0 \leqslant \mu(A_n) \leqslant \dfrac{\alpha}{n}$, ce qui implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mu(A_n) = 0$. On en déduit que $\mu(A_\infty) = 0$, ce qui signifie exactement que $f(x) < +\infty$ pour μ-presque tout $x \in X$.

2) Voir cours.

3)

a) Dans cette question on posera $h(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)g(y)|\, dy$. La fonction $(x,y) \mapsto |f(x-y)g(y)|$ est bien mesurable comme produit et composition de fonctions mesurables. D'après le théorème de Fubini pour les fonctions positives, h est aussi mesurable et:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} |f(x-y)g(y)|\, dxdy &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)g(y)|\, dy\right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(x)\, dx\end{aligned}$$

En utilisant une nouvelle fois Fubini en commençant par intègrer en x, on obtient:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} |f(x-y)g(y)|\, dxdy &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)g(y)|\, dx\right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|\, dx\right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx\right) dy \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} |g(y)|\, dy\right) \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx\right) \\ &< +\infty\,,\end{aligned}$$

puisque f et g sont intégrables. On déduit de ces deux équations que $\int_{\mathbb{R}} h(x)\,dx < +\infty$. D'après la question 1), cela implique que h est finie presque partout.

b) Il faut utiliser, pour un x fixé, le changement de variable linéaire $y \mapsto (x-y)$. Pour cette transformation, le Jacobien est 1. On obtient que

$$(f*g)(x) = \int f(x-y)g(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\,dy = (g*f(x))$$

c) On utilise le théorème de Fubini et le fait que la valeur absolue d'une intégrale est toujours inférieure à l'intégrale de la valeur absolue, pour calculer:

$$\begin{aligned}
\|f*g\|_1 &= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,dy \right| dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)||g(y)|\,dy \right) dx \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}} h(x)\,dx = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} |g(y)|\,dy \right) \\
&\leqslant \|f\|_1\,\|g\|_1
\end{aligned}$$

On a utilisé pour les trois dernières lignes les calculs fait dans la première partie de la question 3).

d) On utilise Fubini comme précedemment cette fois-ci sans valeur absolue. on obtient:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} (f*g)(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,dy \right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} f(x-y)g(y)\,dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,dx \right) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} g(y) \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y)\,dx \right) dy \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} g(y)\,dy \right).
\end{aligned}$$

II

1) La fonction $f = \dfrac{\cos(x)}{x^\alpha}$, pour $\alpha \in]0,1[$ est continue sur $[\pi, +\infty[$, donc borélienne . Par définition, f est intégrable au sens de Lebesgue sur $[\pi, +\infty[$ si $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} |f(x)|\,dx < +\infty$.

Or on a $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} |f(x)|\,dx = \sum_{k=2}^{+\infty} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |f(x)|\,dx \geqslant \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(\pi k)^\alpha} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\cos(x)|\,dx = \frac{2}{\pi^\alpha} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

Puisque la série $\sum \dfrac{1}{k^\alpha}$ est divergente si $\alpha \in]0,1[$, on conclut que la fonction f n'est pas intégrable.

2) En intégrant par parties, on obtient $\displaystyle\int_\pi^r f(x)\,dx = \frac{\sin r}{r^\alpha} + \frac{1}{2} \int_\pi^r \frac{\sin x}{x^{\alpha+1}}\,dx \quad \forall r > \pi$. La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x^{\alpha+1}}$ est intégrable sur $[\pi, +\infty[$, si $\alpha \in]0,1[$. En effet

$$\int_\pi^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x^{\alpha+1}} \right| dx \leqslant \int_\pi^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha+1}} = \frac{1}{\alpha\,\pi^\alpha}\,.$$

On en déduit que $\lim_{r\to+\infty} \int_\pi^r \frac{\sin x}{x^{\alpha+1}}\,dx = \int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha+1}}\,dx$.

Par ailleurs, $\lim_{r\to+\infty} \frac{\sin r}{r^\alpha} = 0$ ($|\sin(r)| \leqslant 1$). On peut donc conclure que $\int_\pi^r f(x)\,dx$ admet une limite finie quand $r \to +\infty$, et donc que f admet une intégrale généralisée sur $[\pi, +\infty[$.

III

1)

- D'après le théorème de croissance comparée, pour tout $y > 0$ la fonction $(1+x)^n e^{-xy}$ est intégrable sur R^+. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $y > 0$, il existe un rang à partir duquel $(1+x)^n \leqslant e^{xy/2}$ et alors $(1+x)^n e^{-xy} \leqslant e^{-xy/2}$ qui est intégrable pour tout $y > 0$.
- $\mathcal{L}(f)(y) = \int h(x,y)\,dx$ avec $h(x,y) = f(x)e^{-xy}$. On a $\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = -xf(x)e^{-yx}$.

  Soit $a > 0$. Pour tout $y \geqslant a$, $\left|\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\right| \leqslant xf(x)e^{-ay} \leqslant c(1+x)^{n+1}e^{-ax}$.

  Cette dernière fonction majorante et indépendante de y est intégrable, pour les mêmes raisons qu'à la question 1). Nous pouvons donc appliquer le théorème de dérivabilité des intégrales à un paramètre, et en déduire que $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$, et donc sur $]0, +\infty[$. Sa dérivée est donné par la formule

  $$\mathcal{L}(f)'(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\,dx = -\int_0^{+\infty} xf(x)e^{-xy}\,dx$$

- La fonction $-xf(x)$ vérifie $|-xf(x)| \leqslant c(1+x)^{n+1}$, elle satisfait donc les hypothèses permettant de calculer la transformée de Laplace, et nous pouvons lui appliquer le résultat de la question précedente. Nous obtenons que $\mathcal{L}(f)''(y) = \int_0^{+\infty} x^2 f(x)e^{-xy}\,dx$. Nous pouvons recommencer: la fonction $x^2 f(x)$ satisfait à son tour la condition $x^2 f(x) \leqslant c(1+x)^{n+2}$ et ainsi de suite. Par récurrence nous obtenons que $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que ses dérivées sont données par:

  $$\mathcal{L}(f)^{(j)} = (-1)^j \int_0^{+\infty} x^j f(x)e^{-xy}\,dx\,.$$

- On utilise une intégration par partie dans l'intégrale $\int_0^M f(x)e^{-xy}\,dx$, avec $u'(x) = f'(x)$ et $v(x) = e^{-xy}$. On obtient

  $$\begin{aligned}\int_0^M f'(x)e^{-xy}\,dx &= [f(x)e^{-xy}]_0^M + \int_0^M yf(x)e^{-xy}\,dx \\ &= f(M)e^{-My} - f(0) + y\int_0^M f(x)e^{-xy}\,dx\end{aligned}$$

  De plus, f vérifie $f(x) \leqslant c(1+x)^n$, ce qui implique que $\lim_{M\to+\infty} f(M)e^{-My} = 0$ et que $f(x)e^{-xy}$ et intégrable, et donc que $\int_0^M f(x)e^{-xy}\,dx$ converge vers $\int_0^{+\infty} f(x)e^{-xy}\,dx$, quand $M \to +\infty$. De même $\lim_{M\to+\infty} \int_0^M f'(x)e^{-xy}\,dx = \int_0^{+\infty} f'(x)e^{-xy}\,dx$ qui est bien définie. Nous concluons donc que

  $$\mathcal{L}(f')(y) = y\,\mathcal{L}(f)(y) - f(0)$$

2)

– Posons $a_n(y) = \mathcal{L}(x^n)(y) = \displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-xy}\, dx$. En utilisant la formule démontrée à la question précedente, nous obtenons que

$$a_n(y) = \mathcal{L}(x^n)(y) = y\mathcal{L}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)(y) - 0 = \frac{y}{n+1} a_{n+1}(y)\,.$$

D'autre part, $a_0(y) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-xy}\, dx = \frac{1}{x}$. Et grâce à la formule de récurrence démontrée, nous obtenons que $a_n(y) = \mathcal{L}(f)(y) = \dfrac{n!}{x^{n+1}}$.

– $\mathcal{L}(e^{-cx})(y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(c+y)x}\, dx = \frac{1}{c+y}$

– $\mathcal{L}(e^{i\omega x})(y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(y-i\omega)x}\, dx = \frac{1}{y-i\omega}$

3) De la question 2) nous déduisons que

$$\begin{aligned}\forall y > 0,\, \mathcal{L}(f'')(y) &= y\mathcal{L}(f') - f'(0) = y(y\mathcal{L}(f) - f(0)) - f'(0)\\ &= y^2\mathcal{L}(f) - yf(0) - f'(0)\,.\end{aligned}$$

De plus, si f vérifie $f'' = -\omega^2 f$, alors $\mathcal{L}(f'') = -\omega^2\mathcal{L}(f)$. En utilisant cette relation dans l'égalité ci-dessus, nous obtenons que

$$(y^2 + \omega^2)\mathcal{L}(f) = f'(0) + yf(0)$$

On obtient donc que $\mathcal{L}(f) = \dfrac{f'(0) + yf(0)}{y^2 + \omega^2}$. A la question précedente, nous avions montré que $\mathcal{L}(e^{i\omega x})(y) = \dfrac{1}{y - i\omega}$. En prenant la partie réelle, puis la partie imaginaire dans cette égalité, on obtient que $\mathcal{L}(\cos(\omega x))(y) = \dfrac{y}{y^2+\omega^2}$ et que $\mathcal{L}(\sin(\omega x))(y) = \dfrac{\omega}{y^2+\omega^2}$. Par combinaison linéaire, on obtient que

$$\mathcal{L}\left(f(0)\cos(\omega x) + \frac{f'(0)}{\omega}\sin(\omega x)\right)(y) = \frac{f'(0) + yf(0)}{y^2+\omega^2}\,.$$

Comme nous avons admis que la transformée de Laplace est injective, nous pouvons conclure que

$$\forall x \leqslant 0,\, f(x) = f(0)\cos(\omega x) + \frac{f'(0)}{\omega}\sin(\omega x)$$

puisque ces deux fonctions ont la même tranformée de Laplace.

4) Ici, en transformée de Laplace, l'équation différentielle devient $-c\mathcal{L}(f)(y) = y\mathcal{L}(f)(y) - f(0)$, ce qui implique que

$$\mathcal{L}(f)(y) = \frac{f(0)}{y+c}\,.$$

D'après les calculs de la question 2, et l'injectivité de la transformée de Laplace, nous concluons que $f(x) = f(0)e^{-cx}$