Université Paris Diderot
 Année 2007/08
L3 Maths Appliquées
 Intégration

Examen du 7 janvier
Durée : 3 h. Barème : 8, 4, 8.

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont munis de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue.

I

Questions de cours.

1) Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré. Soit f une fonction positive intégrable sur $(X, \mathcal{B}, \mu)$. Pour tout entier $k \geqslant 1$, on pose

$$A_k = \{x \in X \, : \, f(x) \geqslant k\} \, .$$

a) Montrer que $A_k \in \mathcal{B}$ pour tout k.

b) Montrer qu'il existe un réel positif α tel que $\mu(A_k) \leqslant \dfrac{\alpha}{k}$, pour tout k.

c) En déduire que $f(x) < +\infty$ pour μ-presque tout $x \in X$.

2) Donner l'énoncé du théorème de Fubini.

3) Soit f, g deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$.

a) En utilisant les deux questions précédentes, montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)g(y)| \, dy < +\infty \quad \text{pour presque tout } x \in \mathbb{R} \, .$$

Sous ces conditions, on définit la fonction $f * g$, presque partout sur $\mathbb{R}$, par la formule

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y) \, dy \, .$$

Établir les propriétés suivantes :

– $f * g = g * f$.
– $\|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1$.
– $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} (f * g)(x) \, dx = \left(\int_{\mathbb{R}} f(x) \, dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} g(x) \, dx \right)$.

II

On définit $f : [\pi, +\infty[\to \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{\cos x}{x^{3/4}} \, , \quad \forall x \geqslant \pi \, .$$

1) Montrer que f n'est pas intégrable au sens de Lebesgue sur $[\pi, +\infty[$.

2) Montrer que f admet une intégrale généralisée sur $[\pi, +\infty[$.

III

1) Soit f une fonction borélienne à valeurs réelles (ou complexes) définie sur $[0, +\infty[$. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $C \in \mathbb{R}^+$ tels que $|f(x)| \leqslant C(1+x)^n$ pour tout $x \geqslant 0$.

– Montrer que, pour tout $y > 0$, la fonction $x \mapsto f(x)e^{-yx}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. *On posera désormais*

$$\forall y > 0 \quad \mathcal{L}(f)(y) = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-yx}\, dx.$$

La fonction $\mathcal{L}(f)$ s'appelle la transformée de Laplace de f et l'application $\mathcal{L} : f \mapsto \mathcal{L}(f)$ la transformation de Laplace.

– Montrer que la fonction $\mathcal{L}(f)$ est continûment dérivable sur $]0, +\infty[$ et que

$$\forall y > 0 \quad \mathcal{L}(f)'(y) = -\int_0^{+\infty} x f(x)e^{-yx}\, dx\,.$$

– Montrer que $\mathcal{L}(f)$ est indéfiniment dérivable et exprimer $\mathcal{L}(f)^{(j)}$, pour $j \geqslant 2$, par une formule analogue à la formule ci-dessus.

– On suppose que f est continûment dérivable, et que f' vérifie aussi la condition $|f'(x)| \leqslant C'(1+x)^{n'}$ pour une constante C' et un entier n'. Montrer que

$$\forall y > 0 \quad \mathcal{L}(f')(y) = y\, \mathcal{L}(f)(y) - f(0)$$

(Ce que l'on peut traduire par : “via la transformation de Laplace, dériver revient à multiplier par y, à une constante près.”)

2) Calculer $\mathcal{L}(f)$ successivement dans les cas suivants :

– $f(x) = x^m$, pour tout $x \geqslant 0$, où m est un entier naturel donné.

– $f(x) = e^{-cx}$, pour tout $x \geqslant 0$, où c est un réel strictement positif donné.

– $f(x) = e^{i\omega x}$, pour tout $x \geqslant 0$, où ω est un réel donné.

3) On cherche à résoudre l'équation différentielle linéaire $f'' = -\omega f$, où $\omega > 0$.

– On suppose que les hypothèses qui permettent de calculer les transformées de Laplace de f, f', f'' sont vérifiées. Montrer que la transformée de Laplace de f vérifie :

$$(a^2 + c)\mathcal{L}(f) = af(0) + f'(0)\,.$$

– *On admettra ici que la transformation de Laplace est injective.* Utiliser les calculs de la question précédente pour montrer que

$$\forall x \geqslant 0 \quad f(x) = f(0)\cos(\omega x) + f'(0)\sin(\omega x)\,.$$

– Utiliser la même technique pour résoudre l'équation $f' = cf$, $c > 0$.