Université Paris Diderot
L3 Maths Appliquées

Année 2007/08
Intégration

**Partiel du 24 novembre**
*Durée : 3 h. Barème :*

1) **Question de cours.**

a) Donner l'énoncé du théorème de convergence dominée.

b) L'intervalle $[0,1]$ étant muni de la mesure de Lebesgue, soit $(f_n)_{n\geqslant 2}$ la suite définie par

$$f_n(x) = n(1-xn) \quad \text{pour}\, x \in [0,1/n]\,; \quad f_n(x) = 0 \quad \text{pour}\, x \in ]1/n,1]\,.$$

Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \quad \text{et} \quad \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx\,.$$

Peut-on appliquer à la suite $(f_n)_{n\geqslant 2}$ le théorème de convergence dominée ?

2) Soit $(X,\mathcal{B})$ un espace mesurable. Soit $\mathcal{G}$ un ensemble de parties de $X$ stable par intersections finies, tel que $\sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{B}$. Soient $\mu_1$ et $\mu_2$ des mesures sur $(X,\mathcal{B})$ telles que $\mu_1(X) = \mu_2(X) < +\infty$.

a) Soit $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{B} \,:\, \mu_1(A) = \mu_2(A)\}$. Montrer que $\mathcal{C}$ est une classe monotone.

b) En déduire que, si $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ pour tout $A \in \mathcal{G}$, on a $\mu_1 = \mu_2$.

3) On munit l'intervalle $I = ]0,+\infty[$ de la mesure de Lebesgue. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite dans $I$. On définit la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ par

$$f_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \mathrm{e}^{-a_j x}\,, \quad \forall x \in I\,.$$

a) Montrer que $f_n$ est intégrable sur $I$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers une fonction borélienne $f$ à valeurs dans $[0,+\infty]$.

c) On suppose que la série $\sum \frac{1}{a_n}$ est convergente. Montrer que $f(x) < +\infty$ pour tout $x \in I$.

d) Montrer que la fonction $f$ est intégrable sur $I$ si et seulement si la série $\sum \frac{1}{a_n}$ est convergente.

4) Soit $(X,\mathcal{B},\mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) = 1$. Soit $g$ une fonction mesurable sur $(X,\mathcal{B})$ à valeurs dans $[0,+\infty[$. On pose

$$f(t) = \int_X \mathrm{e}^{-tg(x)}\,d\mu(x)\,, \quad \forall t \geqslant 0\,.$$

a) Montrer que la fonction $f$ est définie et continue sur $[0,+\infty[$. Que vaut $f(0)$ ?

b) On suppose que $g$ est $\mu$-intégrable. Montrer que $f$ est dérivable sur $[0,+\infty[$.

c) Réciproquement on suppose que $f$ est dérivable (à droite) en 0. Montrer que $g$ est $\mu$-intégrable. *Indication* : montrer que

$$g(x) = \lim_{n\to+\infty} n\left(1 - \mathrm{e}^{-g(x)/n}\right)$$

pour tout $x \in X$ et appliquer le lemme de Fatou.