Partiel du 1er dcembre

Dure : 3 h. Barme : 4, 4 , 4, 4, 4.

Sauf prcision contraire, les intervalles de $\mathbb{R}$ sont munis de la tribu borlienne et de la mesure de Lebesgue, note λ.

1) **Question de cours 1.**
   a) Donner l'nonc du thorme de convergence domine.
   b) Soit $(f_n)_{n\geqslant 2}$ la suite de fonctions sur $[0,1]$ dfinie par
   $$f_n(x) = n(1-xn) \quad \text{pour}\, x\in[0,1/n]\,; \quad f_n(x)=0 \quad \text{pour}\, x\in]1/n,1]\,.$$
   Calculer
   $$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx \quad \text{et} \quad \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx\,.$$
   Peut-on appliquer la suite $(f_n)_{n\geqslant 2}$ le thorme de convergence domine ?

2) **Question de cours 2.** On se propose d'tablir que la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ est invariante par translation.
   Soit $p\in\mathbb{R}$. Pour toute partie A de $\mathbb{R}$, on pose $A+p=\{x+p\ :\ x\in A\}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $I_n=[-n,n]$ et on note $\mathcal{C}_n$ l'ensemble des borliens A de I_n tels que $\lambda(A+p)=\lambda(A)$.
   a) Montrer que $\mathcal{C}_n$ est une classe monotone sur I_n.
   b) En dduire que $\lambda(A+p)=\lambda(A)$ pour tout borlien $A\subset I_n$.
   c) En dduire que $\lambda(A+p)=\lambda(A)$ pour tout borlien A de $\mathbb{R}$.

3) Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite dans $I=]0,+\infty[$. On dfinit la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ par
   $$f_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \mathrm{e}^{-a_j x}\,, \quad \forall x\in I\,.$$
   a) Montrer que f_n est intgrable sur I, quel que soit $n\in\mathbb{N}$.
   b) Montrer que la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers une fonction borlienne f valeurs dans $[0,+\infty]$.
   c) Montrer que la fonction f est intgrable sur I si et seulement si la srie $\sum\frac{1}{a_n}$ est convergente.

4) Soit g une fonction borlienne sur $I=[0,1]$, valeurs dans $[0,+\infty[$. On pose
   $$f(t) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-tg(x)}\,dx\,, \quad \forall t\geqslant 0\,.$$
   a) Montrer que la fonction f est dfinie et continue sur $[0,+\infty[$. Que vaut $f(0)$?
   b) On suppose que g est intgrable. Montrer que f est drivable sur $[0,+\infty[$.
   c) Rciproquement on suppose que f est drivable (droite) en 0. Montrer que g est intgrable. *Indication* : montrer que
   $$g(x) = \lim_{n\to+\infty} n\left(1-\mathrm{e}^{-g(x)/n}\right)$$
   pour tout $x\in I$ et appliquer le lemme de Fatou.

5) On dfinit $f:[\pi,+\infty[\to\mathbb{R}$ par
   $$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,, \quad \forall x\geqslant\pi\,.$$
   a) Montrer que f n'est pas intgrable au sens de Lebesgue sur $[\pi,+\infty[$.
   b) Montrer que f admet une intgrale gnralise sur $[\pi,+\infty[$.