Équations différentielles ordinaires et équations de transport. Notes de cours, 2^{ème} partie.

Maxime Hauray

2010-2011

1 Équations de transport et de conservation linéaires

1.1 Définitions

Définition 1. *Une* équation de transport *est une équation du type ci-dessous, régissant le comportement d'une quantité f dépendant du temps t et d'une autre variable x (qui peut-être une position, une vitesse, un couple position-vitesse ou bien d'autres choses encore...) appartenant à un domaine Ω*

$$\partial_t f(t,x) + b(t,x,f) \cdot \nabla_x f(t,x) = 0\,, \tag{1}$$

eq:trans

où b est un champ de vecteur qui peut dépendre du temps, de la variable x, mais aussi de la solution f elle-même (via sa valeur au point ou de manière plus globale).
En général, on ajoute la condition initiale $f(0,x) = f^0(x)$, ou bien plus rarement une condition finale.

Le cas des ouverts à bords
Généralement, Ω est un ouvert régulier de $\mathbb{R}^n$. Si Ω possède des bords, il faut rajouter une condition au bord f_b sur la partie de la frontière ou le champ est rentrant uniquement

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \forall x \in \partial\Omega, b(t,x) \cdot \overrightarrow{n}(x) < 0 \Rightarrow f(t,x) = f_b(t,x)$$

où $\overrightarrow{n}$ désigne la normale extérieure à Ω. Attention, si on oublie de restreindre cette condition à la partie rentrante, le problème devient sur-déterminé (Pour les explications, il faut attendre d'avoir vu la méthode de résolution). Un cas plus simple est le cas où b est tangent au bords : $b(t,x) \cdot \overrightarrow{n}(x) = 0$, pour tout $x \in \partial\Omega$, car alors la valeur de f au bord n'a pas d'influence à l'intérieur.
Comme la présence de bord complique fortement les notations, on travaillera dans la suite de ces notes sur les ouverts sans bords $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{T}^n$.

Définition 2. *Une équation (ou loi) de conservation est une équation de la forme*

$$\partial_t f(t,x) + \operatorname{div}\left(f(t,x) b(t,x,f)\right) = 0\,, \tag{2}$$

eq:cons

où b est toujours un champ de vecteur. Le nom de l'équation vient du fait que l'intégrale de f est conservée au cours du temps. En effet, on a formellement

$$\frac{d}{dt}\left(\int f(t,x)\,dx\right) = -\int \operatorname{div}\left(f(t,x)b(t,x,f)\right)\,dx = 0\,.$$

On passe d'une équation à l'autre grâce à la formule $\operatorname{div}(fb) = f \operatorname{div} b + b \cdot \nabla f$. Par exemple, l'équation de conservation peut s'écrire comme une équation de transport avec second membre de la manière suivante

$$\partial_t f(t,x) + b(t,x,f) \cdot \nabla_x f(t,x) = -\operatorname{div} b(t,x,f)\, f(t,x)\,.$$

En particulier, les deux équations sont équivalentes si le champ b est à divergence nulle. On pourra donc traiter simultanément les deux équations en ajoutant le second membre. Mais il ne faut pas oublier que si l'on connaît mal la divergence de b (pas d'estimation sur celle-ci) le passage ne peut se faire simplement.

Remarque 1. *Dans toute la suite, f désignera toujours une solution de l'équation de transport (eq:trans 1), éventuellement avec second membre, et g une solution de l'équation de conservation.*

Cas scalaire et cas vectoriel.
Remarquez que la fonction f est souvent à valeurs vectorielles (plusieurs composantes). Le problème vectoriel est d'ailleurs beaucoup plus difficile que le problème scalaire dans le cas non linéaire. Mais dans le cas linéaire, le cas vectoriel n'est que la superposition de plusieurs cas scalaires indépendants et ne pose pas de problèmes particuliers. Nous nous restreindrons donc ici au cas scalaire.

1.2 Origine

Il y a deux façons d'obtenir des équations de transport à partir des modèles physiques (ou autres..) : le point de vue Eulerien, où l'observateur est immobile, et le point de vue Lagrangien, où l'observateur suit le mouvement.

Point de vu Eulérien. À une quantité extensive [1] G (masse,...) d'un fluide, on associe la quantité intensive [2] $g = \frac{G}{V}$, qui est en quelque sorte la densité de G. g dépend du temps t et d'une position x. On considère un petit élément de volume Ω, et on note $n_\Omega(t)$ la quantité de G dans Ω au cours du temps. On peut calculer la dérivée de n_Ω au cours du temps en remarquant que la variation de n_Ω pendant un intervalle de temps dt est égal à "ce qui entre moins ce qui sort". Cela permet d'écrire

$$\frac{d}{dt} n_\Omega(t) = \int_{\partial\Omega} gb \cdot \overrightarrow{n}\, d\sigma = -\int_\Omega \operatorname{div}(gb)\, dx\,,$$

grâce à la formule de Green et comme $n_\Omega(t) = \int_\Omega g(t,x)\, dx$, on obtient

$$\int_\Omega \partial_t g + \operatorname{div}(gb)\, dx\,.$$

sur tout volume Ω, ce qui implique l'équation.

Figures/M2Tr-Euler.pdf

Point de vue Lagrangien. Une quantité vraiment intensive [3] $f(t,x)$ dépends du temps t et d'une position x, et est associée à des particules qui occupent l'espace et se déplacent à une vitesse $v(t,x)$ (qui dépend aussi du temps et de la position). Supposons que la quantité associée à une particule soit constante. Alors, le long d'une trajectoire $x(t)$ d'une des particules, on a

$$0 = \frac{d}{dt} f(t,x(t)) = \partial_t f(t,x(t)) + \dot{x}(t) \cdot \nabla f(t,x(t)) = \partial_t(t,x(t)) + v(t,x(t)) \cdot \nabla f(t,x(t))\,,$$

et comme cela est vrai en tout point $(t,x(t))$, cela veut dire que f vérifie une équation de transport du type (eq:trans 1). Si la quantité f évolue le long des trajectoires, il faudra rajouter des termes, mais le terme transport sera bien présent.
Cette observation va nous permettre de résoudre toutes les équations de transport, car les solutions seront toujours constantes le long des trajectoires associées.

1.3 Quelques exemples

L'équation de Vlasov.
C'est l'équation qu'on peut écrire dans le cas où la variable est en fait un couple position-vitesse (x,v). Une densité $f(t,x,v)$ de particules soumises à une force $F(t,x)$ vérifie l'équation

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + F(t,x) \cdot \nabla_v f = 0\,. \tag{3}$$ eq:Vla

C'est bien une équation de transport car si on écrit $y = (y_1, y_2) = (x,v)$ et $B(t,y) = (v, F(t,x)) = (y_2, F(t,y_1))$, on peut ré-écrire l'équation (eq:Vla 3) sous la forme $\partial_t f(t,y) + B \cdot \nabla_y f(t,y) = 0$. On remarquera par ailleurs $\operatorname{div}_y B = \operatorname{div}_x v + \operatorname{div}_v F = 0$, ce qui implique que l'équation de Vlasov peut aussi être écrite sous la forme conservative

$$\partial_t f + \operatorname{div}_v(vf) + \operatorname{div}_y(F(t,x)f) = 0\,.$$

L'équation écrite ici est une équation de Vlasov linéaire, mais dans les cas physiquement intéressants (modélisation d'une galaxie ou d'un plasma), le champ de force F dépend aussi de la distribution f des particules sous la forme d'une équation de champ moyen : la force dépend de toute la distribution des particules via une formule du type

$$F(t,x) = \int -\nabla V(x-y)\rho(t,y)\, dy \qquad \text{avec } \rho(t,y) = \int f(t,y,w)\, dw\,,$$

où V est le potentiel d'interaction entre deux particules, et ρ la densité en position uniquement.

1. qui augmente proportionnellement à la taille du système
2. qui ne dépend pas de la taille du système
3. c'est-à-dire sans quantité extensive associée comme une vitesse

L'équation d'Euler incompressible
Elle modélise un fluide incompressible en mouvement. La densité d'un fluide incompressible reste constante, et on s'intéresse alors au champ de vitesse $\overrightarrow{u}(t,x)$ du fluide. Celui-ci vérifie l'équation

$$\begin{cases} \partial_t \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{u}\cdot\nabla)\overrightarrow{u} = -\nabla p \\ \operatorname{div}\overrightarrow{u} = 0 \end{cases} \tag{4}$$

eq:Euler

où p désigne la pression (que l'on peut voir comme un multiplicateur de Lagrange pour que la condition $\operatorname{div} u = 0$ soit toujours vérifiée au cours de l'évolution). L'opérateur $\overrightarrow{u}\cdot\nabla$ désigne la dérivée dans la direction $\overrightarrow{u}$ et s'écrit

$$(\overrightarrow{u}\cdot\nabla)f = \sum_i u_i \partial_i f\,.$$

pour l'appliquer à un vecteur, on l'applique indépendamment à chacune des composantes. C'est une équation de transport non-linéaire, la vitesse $\overrightarrow{u}$ étant transporté par elle-même. Un cas particulier intéressant est le cas de la dimension deux, où si le domaine consideré est l'espace tout entier, on peut écrire une équation scalaire sur la vorticité $\omega = \partial_2 u_1 - \partial_1 u_2$

$$\begin{cases} \partial_t\omega + u(t,x)\cdot\nabla\omega = 0 \quad , \\ u(t,x) = \int \frac{(x-y)^\perp}{|x-y|^2}\omega(t,y)\,dy \end{cases} \tag{5}$$

eq:Euler2

qui est également une équation de champ moyen.

Remarque 2. *Nous avons ici un premier modèle "cinétique" et un second "fluide". Dans les modèles fluides, toutes les particules situées en un point on la même vitesse et celle-ci est donc une fonction de la position. C'est le cas quand les particules occupent une part importantes de l'espace disponible. Dans le cas "cinétique", la vitesse ne dépends plus de la position, et des particules peuvent-être au même point à la même vitesse. C'est le cas dans les gaz, ou les molécules occupent une faible portion de l'espace disponible.*

Les systèmes hyperboliques
Si dans l'équation de conservation b dépend de f via la valeur de f au point (t,x) on se retrouve avec un problème hyperbolique du type

$$\partial_t f + \operatorname{div}\Big(A\big(t,x,f(t,x)\big)f\Big) = 0$$

dont l'équation de Burgers $\partial_t u + \partial_x\left(\frac{u^2}{2}\right) = 0$, est un exemple.

Dans toute la suite nous allons nous intéresser au *cas linéaire*, quand b ne dépend que de t et de x. Les cas non-linéaires demandant en général des théories complexes adaptés à chacun des exemples donnés ci-dessus. Pour autant, l'étude du cas linéaire permet d'obtenir des résultats d'existence de solutions dans des cas non-linéaires. Nous essaierons d'expliquer pourquoi à la fin de ce cours.

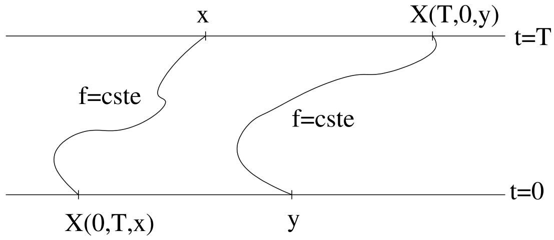
2 Résolution dans le cas linéaire régulier : méthode des caractéristiques.

2.1 Le cas de l'équation de transport

Dans le cas où b est suffisamment régulier (localement Lipschitz en x avec des constantes intégrables en temps), la résolution de l'équation de transport utilise le flot X associé au champ b. En effet, remarquons que si pour une solution f régulière de eq:trans 1 l'on définit $g(t,x) = f(t, X(t,0,x))$, alors

$$\begin{aligned} \partial_t g(t,x) &= \partial_t f(t,X(t,0,x)) + \nabla f(t,X(t,0,x))\cdot\partial_t X(t,0,x) \\ &= \partial_t f(t,X(t,0,x)) + \nabla f(t,X(t,0,x))\cdot b(t,X(t,0,x)) = 0\,, \end{aligned}$$

ce qui veut dire que $g(t,x) = g(0,x) = f^0(x)$, ou encore que f est constante le long des courbes $(t, X(t,0,x))$, les trajectoires associées au champ de vecteurs b. Elles sont aussi appelées courbes caractéristiques, et donnent leur nom à la méthode de résolution. La valeur de f en (t,x) sera donc donnée par la valeur de f^0 au point $(0,y)$ qui appartient à la même trajectoire que (t,x). Pour trouver ce point $(0,y)$ qu'on appelle le *pied* de la caractéristique, il faut remonter les trajectoires dans le temps ce qui s'écrit aussi $y = X(0,t,x)$.



Et la solution est donc donnée par la formule

$$f(t,x) = f^0(X(0,t,x))$$

Remarque 3. *Si on compose la solution f par une fonction régulière $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on obtient une fonction $\beta \circ f$ toujours solution de l'équation de transport avec la condition initiale $\beta \circ f^0$. Cette observation est à la base de la théorie DiPerna-Lions de résolution des équations de transport qui sera évoquée à la fin de cette partie.*

Pour une équation de transport linéaire avec second membre

$$\partial_t f(t,x) + b(t,x) \cdot \nabla_x f(t,x) = c(t,x)\, f(t,x) \tag{6}$$ eq:trans2

où $c \in L^1_{t,loc}(L^\infty_x)$, on voit de la même manière (exercice) que la solution est donnée par

$$f(t,x) = f^0(X(0,t,x))\, e^{\int_0^t c(t,X(s,t,x))\, ds}\,.$$

2.2 Le cas de l'équation de conservation

En utilisant le dernier résultat avec $c = -\operatorname{div} b$, on voit que la solution de l'équation de conservation eq:cons 2 est donnée par

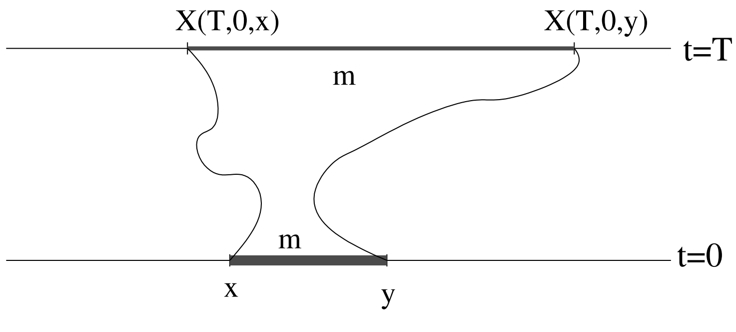
$$f(t,x) = f^0(X(0,t,x))\, e^{-\int_0^t \operatorname{div} b(s,X(s,t,x))\, ds}\,.$$

Or d'après les propriétés du Jacobien de X : $JX(t,0,x) = e^{\int_0^t \operatorname{div} b(s,X(s,0,x))\, ds} = e^{\int_0^t \operatorname{div} b(s,X(s,t,X(t,0,x)))\, ds}$, ce qui permet de déduire

$$f(t,x) = \frac{f^0(X(0,t,x))}{JX(t,0,X(0,t,x))} = f^0(X(0,t,x))\ JX(0,t,x)\,, \tag{7}$$ eq:solcon

où on a fréquemment utiliser les lois $X(s,t,X(t,u,\cdot)) = X(s,u\cdot)$ et notamment le fait que $X(t,0,\cdot)$ et $X(0,t,\cdot)$ sont des difféomorphismes inverses l'un de l'autre. De la précédente formule on peut montrer que $\int f(t,x)\, dx = \int f^0(x)\, dx$ et plus généralement que $\|f(t,\cdot)\|_p = \|f^0\|_p$.

Comment interpréter cette formule ? On voit que la solution f n'est plus constante le long des trajectoires. il y a maintenant un facteur JX en plus. Par contre la valeur en (t,x) dépend bien de la valeur au pied de la trajectoire $X(0,t,x)$. Mais maintenant, pour préserver la masse, il faut multiplier f par le facteur de dilatation JX. Dans l'exemple dessiné ci-dessus, JX est assez grand car le flot X est dilatant. La densité f doit donc être divisée par JX pour que la masse entre les deux ligne de champ soit préservée.



Interprétation en terme de mesures.
Si on considère g^0 comme la mesure $g^0(x)\, dx$.[4] Alors,

$$g^0(X(-t,x))JX(-t,x)\, dx \ \text{ est la mesure } \ X(t,\cdot)_\#\big(g^0(x)\, dx\big)\,,$$

4. C'est ainsi que l'on notera la mesure de densité g^0 par rapport à la mesure de Lebesgue.

la mesure image par le flot de la mesure de Lebesgue. En effet, si l'on choisit une fonction régulière ϕ (et dans le cas autonome pour simplifier),

$$\begin{aligned}\int \phi(x) g^0(X(-t,x)) JX(-t,x)\, dx &= \int \phi(X(t, X(-t,x))g^0(X(-t,x))JX(-t,x)\, dx \\ &= \int \phi(X(t,x))g^0(x)\, dx \\ &= \int \phi(x)\, dX(t,\cdot)_{\#}\lambda(x)\end{aligned}$$

Remarque 4. *Remarquons que le Jacobien $JX(0,t,x)$ de la transformation qui remonte les caractéristiques est solution de l'équation*

$$\partial_t JX + \mathrm{div}\,(JX\, b) = 0$$

avec condition initiale $JX^0 = 1$. Cela peut-être utile pour calculer numériquement ce Jacobien sans utliser sa formule de définition compliquée.

thm:casreg **Théorème 1.** *Pour récapituler, la solution d'une équation de transport (eq:trans2 6) avec condition initiale f^0 et un champ $b \in L^1_{t,loc}(W^{1,\infty}_x)$ est donnée par*

$$f(t,x) = f^0(X(0,t,x))^{\int_0^t c(t,X(s,t,x))\, ds}\,.$$

La solution d'une équation de conservation (eq:cons 2) est donnée par

$$g^0(X(0,t,x))\ JX(0,t,x) = X(t,\cdot)_{\#} g^0\,.$$

2.3 Estimations des normes

Dans cette partie, on utilisera souvent les constantes de "compression" et "dilatation" du champ b définies respectivement pour tout $t \geq 0$ par

$$L^-_t := e^{\int_0^t \|\mathrm{div}\, b^-\|_\infty\, ds}, \qquad L^+_t = e^{\int_0^t \|\mathrm{div}\, b^+\|_\infty\, ds}$$

Proposition 1. *Si f est une solution de l'équation de transport (eq:trans 1) alors pour tout $t \geq 0$,*

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(L^-_t)^{\frac{1}{p}}}\|f^0\|_p \leq \|f(t,\cdot)\|_p \leq (L^+_t)^{\frac{1}{p}}\|f^0\|_p \qquad \textit{pour } p \in [1,+\infty[\\ &\|f(t,\cdot)\|_\infty = \|f^0\|_\infty \\ &\frac{1}{L^-_t}\lambda\big(\{f^0(x) \in A\}\big) \leq \lambda\big(\{f(t,x) \in A\}\big) \leq L^+_t \lambda\big(\{f^0(x) \in A\}\big)\end{aligned}$$

Si g est une solution de l'équation de conservation (eq:cons 2) alors

$$\begin{aligned}&\|g(t,\cdot)\|_1 = \|g^0\|_1 \\ &\frac{1}{(L^+_t)^{1-\frac{1}{p}}}\|g^0\|_p \leq \|g(t,\cdot)\|_p \leq (L^-_t)^{1-\frac{1}{p}}\|g^0\|_p \qquad \textit{pourp} \in]1,+\infty]\end{aligned}$$

Dans le cas particulier ou $\mathrm{div}\, b = 0$*, toutes les normes sont conservées.*

On remarquera que le comportement des équations est symétrique. C'est normal car il y a une propriété de dualité cachée :

prop:dual **Proposition 2** (Dualité)**.** *Le problème dual de l'équation de transport (eq:trans 1) est l'équation de conservation*

$$\partial_t g + \mathrm{div}(gb) = 0\,. \tag{8}$$ eq:cons-

Démonstration. Si $\phi, \psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont des fonctions régulières à supports compacts, alors avec des IPP et la formule de Green, on peut écrire

$$\int (\partial_t \phi + b \cdot \nabla_x \phi)\, \psi\, dxdt = -\int \phi\, (\partial_t \psi + \mathrm{div}(\psi b))\ dxdt\,,$$

ave des intégrales sur tout l'espace. Si on intègre seulement sur $[0,T] \times \mathbb{R}^n$, alors il faut rajouter deux termes de bords à droite : $\int f(T,x)g(T,x)\, dx - \int f(0,x)g(0,x)\, dx$. □

2.4 Cas de données initiales peu régulières.

Dans cette partie, on suppose toujours pour l'instant que le champ b est suffisamment régulier pour que la théorie de Cauchy-Lipschitz s'applique, mais la donnée initiale f^0 ou g^0 n'est plus régulière. On suppose seulement qu'elle appartient à un L^p, pour un $p \geq 1$ (Le cas de conditions initiales distributions est aussi possible, voir exercice exo:dist 2). Les formules qui définissent les solutions $f(t,x)$ et $g(t,x)$ ont toujours un sens, mais on ne peut plus dériver les composée $f^0(X(0,t,x))$ pour donner un sens ponctuel à l'équation. Mais il est encore possible de donner un sens à cette équation en utilisant les distributions.

Définition 3 (Solutions au sens des distributions). *Une fonction $f \in \mathcal{C}([0,+\infty[, L^1(\mathbb{R}^d))$ est une solution de l'équation de transport (eq:trans 1) avec condition initiale f^0 lorsque pour toute fonction $\phi : [0,+\infty[\times\mathbb{R}^d$ régulière à support compact*

$$\int_{[0,+\infty[\times\mathbb{R}^d} f\,(\partial_t\phi + \mathrm{div}(\phi\, b))\; dx = -\int_{\mathbb{R}^d} f^0(x)\phi(0,x)\,dx$$

De même une fonction $g \in \mathcal{C}([0,+\infty[, L^1(\mathbb{R}^d))$ est une solution de l'équation de conservation (eq:cons 2) avec condition initiale g^0 lorsque pour toute fonction $\phi : [0,+\infty[\times\mathbb{R}^d$ régulière à support compact

$$\int_{[0,+\infty[\times\mathbb{R}^d} f\,(\partial_t\phi + b\cdot\nabla\phi)\; dx = -\int_{\mathbb{R}^d} f^0(x)\phi(0,x)\,dx$$

Avec ces définitions, on peut montrer

Théorème 2. *Les formules données précédemment (au théorème thm:casreg 1) fournissent toujours les uniques solutions à l'EdT (eq:trans 1) et à l'EC (eq:cons 2) appartenant à $L^\infty_t(L^1_x)$).*

> *Attention, en formulation distribution, il faut quand même préciser dans quel espace on cherche des solutions pour obtenir un résultat d'unicité. Par exemple, pour l'équation d'Euler 2D (eq:Euler 4), on peut montrer (grâce notamment à la théorie des inclusions différentielles) qu'il existe des solutions non nulles dans $L^\infty_t(L^2)$ avec la condition initiale nulle. Par contre, on sait montrer que la seule solution dans $L^\infty_t(W^{1,\infty})$ qui s'annule en $t=0$ est la solution nulle.*

Démonstration. Donnons la démonstration pour l'équation de transport. On choisit une fonction $\phi : [0,+\infty[\times\mathbb{R}^d$ régulière à support compact et on calculer

$$\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^d} f^0(X(-t,x))\big(\partial_t\phi + \mathrm{div}(\phi b)\big)\,dxdt = \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^d} f^0(y)\big(\partial_t\phi + \mathrm{div}(\phi b)\big)(X(t,y))JX(t,y)\,dydt$$

Vu que la fonction ϕ est composée par $X(t,x)$ dans le membre de droite, il est assez logique d'introduire la fonction $\tilde\phi(t,y) = \phi(t, X(t,y)$. Cela permet de simplifier carac

$$\partial_t\tilde\phi(t,y) = \partial_t\phi(t,X(t,x)) + b\cdot\nabla_x\phi(t,X(t,x))\,.$$

On peut donc écrire le terme en ϕ et JX du membre de droite comme

$$\partial_t\tilde\phi(t,y)JX(t,y) + \tilde\phi(t,y)\,\mathrm{div}\, b(t,X(t,y))JX(t,y)\,,$$

mais comme $\partial_t JX(t,y) = \mathrm{div}\, b(t,X(t,y))JX(t,y)$, ce terme n'est rien d'autre que $\partial_t\big(\tilde\phi(t,y)JX(t,y)\big)$. Ce qui donne donc finalement

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^d} f^0(X(-t,x))\big(\partial_t\phi + \mathrm{div}(\phi b)\big)\,dxdt &= \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^d} f^0(y)\partial_t\big(\tilde\phi(t,y)JX(t,y)\big)\,dydt\\ &= -\int_{\mathbb{R}^d} f^0(y)\phi(0,y)\,dy\end{aligned}$$

car $JX(0,y)=1$, ce qui est bien le résultat attendu. □

3 Exercices

exo:vp **Exercice 1. Valeurs propres d'une EdT**
On considère l'équation de transport sur $f(t,x)$

$$\partial_t f - x_2\partial_1 f + x_1\partial_2 f = 0\,,$$

où $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$.

1. Dessiner le champ de vecteur, calculer sa divergence et trouver le flot X du système d'EDO associé. On pourra utiliser la notation $R(t)$ pour la rotation de centre 0 et d'angle t.
2. En déduire l'expression de la solution f de cette équation avec la condition initiale f^0.
3. Trouver toutes les solutions radiales de cette équation.
4. On cherche maintenant les fonctions $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ indépendantes du temps qui vérifie pour un λ complexe

$$\lambda g - x_2 \partial_1 g + x_1 \partial_2 g = 0$$

   (a) Montrer qu'une solution g doit vérifier

$$g(X(t,x)) = g(x) e^{-\lambda t} \, .$$

   (b) En déduire que des solutions existent seulement si $\lambda \in i\mathbb{Z}$, et donner dans ce cas toutes les solutions.

Exercice 2. Solutions des EC et des EdT avec données initiales distributions.

exo:dist

Pour un C^∞-difféomorphisme $S : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, et une distribution $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ on peut définir deux distributions transportées $S_\# f$ et $f \circ S$ par

$$\forall \phi \text{ régulière },\ \langle S_\# f, \phi \rangle = \langle f, \phi \circ S \rangle$$
$$\forall \phi \text{ régulière },\ \langle f \circ S, \phi \rangle = \langle f, S_\# \phi \rangle$$

1. Montrer que les distributions $S_\# f$ et $S_{tr} f$ sont bien définies.
2. Montrer que si f est une mesure, alors la définition de $S_\#$ donnée ici coïncide bien avec celle déjà connue, et que si $f \in L^1$, $f \circ S$ correspond bien à la composée de f par S.
3. On note X le champ associé à un champ de vecteur autonome régulier. Montrer que $X(-t,\cdot)_\# f$ est l'unique solution à valeurs distributions de l'EC avec champ b et condition initiale f, et que $X(t,\cdot)_{tr} f$ est l'unique solution de l'EdT avec CI f.
4. On choisi le champ $b(x) = x$ défini sur $\mathbb{R}$. Calculer les solutions de l'EC et l'EdT associées avec données initiales $\delta_0^{(n)}$, la dérivée n-ième du Dirac en zéro, pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. Le problème des trajectoires qui viennent de l'infini

exo:inf

1. On considère le champ b défini sur $\mathbb{R}$ par $b(x) = \mathrm{Sign}(x)\, x^2$.
   (a) Trouver l'unique solution sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$ de l'EdT associée à b, qui admet pour donner initiale $f^0 \in L^\infty$.
   (b) A-t-on toujours $f(1,\cdot) \in L^1$ si $f^0 \in L^1$?
   (c) Construire une condition initiale f^0 non nulle telle que $f(1,\cdot) = 0$.
2. On s'intéresse maintenant à l'EC associée à b.
   (a) Résoudre l'équation avec donnée initiale g^0.
   (b) Trouver une condition initiale non nulle g^0 pour laquelle $g(2,\cdot) = 0$.
   (c) Et montrer que si $g^0 \in L^1$, alors $\lim_{t \to +\infty} \|g(t,\cdot)\| = 0$.
3. On considère maintenant l'EdT associée à $-b$.
   (a) Montrer que maintenant il y a plusieurs solutions pour une même condition initiale f^0. Trouver toutes ces solutions.
   (b) Quelles sont les solutions qui conservent la norme infinie ?
   (c) Quelle est la condition sur f^0 pour qu'il existe des solutions C^1 en t et en x ?
4. Faire également l'étude de l'EC associée à $-b$.

Exercice 4. Non-unicité en formulation distribution

On reprends l'exemple simple du début du cours : b défini sur $\mathbb{R}$ par $b(x) = 1 - \chi_{\{0\}}$, où χ_A désigne la fonction caractéristique de A. On va chercher à résoudre l'équation de transport associée.

1. Puisque nous aurons besoin de remonter les trajectoires, construire deux flots X_1 et X_2 définis sur $]-\infty, 0] \times \mathbb{R}$ vérifiant

$$X(t,0) = x + \int_0^t b(X(s,0))\, dx.$$

   (on notera X_1 le flot sans arrêt en 0, et X_2 celui avec arrêt.)

2. Montrer que pour toute fonction $f^0 \in L^1$, $f(t,x) = f^0(X_1(-t,x))$ définit bien une solution de l'EdT $\partial_t f + b\partial_x f = 0$.
3. Montrer que par contre $f^0(X_2(-t,x))$ n'est pas une solution de l'EdT.
4. Pour toute fonction $g \in L^1(\mathbb{R}^+)$, montrer que la mesure f définie par

$$f(t,x) = f^0(x-t)\chi_{\{x<0\}\cup\{x\geq t\}} + g(t-x)\chi_{\{0\leq x<t\}} + m(t)\delta_0 \qquad \text{avec } m(t) = \int_{-t}^{0} f^0(s)\,ds - \int_0^t g(s)\,ds$$

   est solution de l'EdT. Quelle g doit-on choisir pour obtenir la solution $X_2(t,\cdot)_\# f^0$? tous les choix de g sont-ils associés à un flot ?
5. Quel critère faut-il imposer sur les solutions pour s'assurer de l'unicité ? *(On pourra penser à l'impossibilité de définir le produit d'une mesure avec une fonction définie presque partout)*