*Bull. Sci. math.* 125, 4 (2001) 253–278

S0007-4497(00)01072-1/FLA

# RELEVEMENTS CONTINUS DE CHAMPS DE VECTEURS

PAR

CLAUDIO MUROLO[a], DAVID TROTMAN[b]

[a] *Università di Napoli, Dipartimento di Matematica ed Applicazioni, Via Claudio 21, 80125, Napoli, Italy*
[b] *UMR-CNRS (LATP) 6632 et Université de Provence, CMI (U.F.R. M.I.M.), 39 rue Joliot-Curie, 13453 Marseille Cedex 13, France*

Manuscrit présenté par J.-P. FRANÇOISE, reçu en juin 2000

ABSTRACT. – We improve the known theorems on the continuous lifting of vector fields defined on a stratum $X$ of a regular stratification of a closed set of a smooth manifold by introducing the notion of *canonical distribution* $\mathcal{D}_X$: a continuous $l$-bundle near $X$ ($l = \dim X$) such that the lifting on $\mathcal{D}_X$ of each vector field defined on $X$ gives a canonical continuous stratified extension. © 2001 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

*Keywords:* Regular stratifications; Stratified vector fields

*AMS classification:* 58A35; 58A30

RÉSUMÉ. – Nous améliorons les théorèmes connus sur le relèvement continu de champs de vecteurs définis sur une strate $X$ d'une stratification régulière d'un fermé d'une variété lisse, en introduisant la notion de *distribution canonique* $\mathcal{D}_X$ : un $l$-fibré continu près de $X$ ($l = \dim X$) tel que les relevés sur $\mathcal{D}_X$ des champs de vecteurs sur $X$, soient des extensions stratifiées canoniques continues. © 2001 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

*Mots Clés:* Stratifications régulières; Champs de vecteurs stratifiés

*AMS classification:* 58A35; 58A30

*E-mail addresses:* murolo@cds.unina.it, murolo@gyptis.univ-mrs.fr (C. Murolo), trotman@gyptis.univ-mrs.fr (D. Trotman).

## 1. Introduction

L'extension continue d'un champ de vecteurs donné sur une strate d'une stratification d'un fermé d'une variété lisse, a été considérée en premier par J.-L. Verdier [31] (1976) pour des stratifications $(w)$-régulières et puis par M.-H. Schwartz [22] (1991) pour des stratifications $(a)$-régulières à strates analytiques.

Pour des stratifications dont le type de régularité entraîne l'existence d'un système de données de contrôle $\mathcal{F} = \{(\pi_Z, \rho_Z) : T_Z \to Z \times [0, \infty[\,\}_{Z \in \Sigma}$ [12], la condition usuelle permettant d'obtenir la continuité du flot intégral d'un champ relevé est que le champ soit relevé de manière *contrôlée* par rapport à $\mathcal{F}$. L'extension contrôlée d'un champ de vecteurs est classique pour des stratifications $(b)$-régulières [9,12], mais la condition de contrôle n'implique pas la continuité du champ de vecteurs relevé [8,9].

Le relèvement à la fois continu et contrôlé a été considéré dans la littérature en premier lieu par M. Shiota [23] (1984) pour des stratifications $(b)$-régulières qui en annonça l'existence en donnant une démonstration dans le cas de deux strates $X < Y$ ; plus de détails sont donnés dans son livre (Lemma I.1.5, [24]). Récemment, en donnant une démonstration dans la situation générale de plusieurs strates, A. du Plessis a démontré que l'existence de relèvements de champs de vecteurs continus et contrôlés est une propriété caractérisant les stratifications $(c)$-régulières [1] [7,8]. La $(c)$-régularité, introduite en 1988 par K. Bekka [1], est une condition de régularité strictement plus faible que la $(b)$-régularité de Whitney mais qui garde la plupart des bonnes propriétés topologiques de $(b)$ ; notamment le théorème d'isotopie de Thom–Mather reste valable [3].

L'existence des relèvements continus a permis dernièrement des applications significatives : S. Simon utilise cette propriété pour démontrer un théorème de Poincaré-Hopf pour les champs de vecteurs stratifiés totalement radiaux [25], H. Hamm pour une démonstration simplifiée du Théorème Fondamental de la théorie de Morse stratifiée de Goresky et MacPherson [10], et L. Noirel pour obtenir un plongement $(w)$-régulier sous-analytique de tout ensemble stratifié abstrait [19,20].

[1] Un théorème de relèvement continu contrôlé fut communiqué par A. du Plessis à D. Trotman déjà en 1988.

Dans cet article nous traitons le cas de stratifications $(a)$- et $(c)$-régulières à strates lisses. La condition $(b)$ de Whitney entrainant la $(c)$-régularité de Bekka [1], notre théorème de relèvement continu contrôlé de champs de vecteurs sur des stratifications $(c)$-régulières généralise celui de Shiota. Nous obtenons aussi un résultat plus précis pour les stratifications $(w)$-régulières et lipschitziennes.

Dans le §2, nous donnons une caractérisation de la $(a)$-régularité en termes d'existence d'une distribution continue locale (théorème 1) qui sera le point clef pour obtenir le théorème de relèvement continu.

Dans le §3, nous démontrons le théorème de relèvement continu d'un champ de vecteurs $\xi_X$ défini sur une strate $X$ fixée en un champ $\xi = \bigcup_{Y \geqslant X} \xi_Y$ sur un voisinage stratifié $T_X = \bigcup_{Y \geqslant X} T_X \cap Y$ de $X$ dans $A$ (théorème 2). Le champ construit vérifie la condition de contrôle par rapport à une famille de projections $\{\pi_Y : T_Y \to Y\}_{Y \geqslant X}$ compatibles entre elles. Nous remarquons aussi que la $(a)$-régularité de Whitney caractérise l'existence des prolongements continus de champs de vecteurs.

Dans le §4, nous considérons une stratification $(c)$-régulière. K. Bekka a démontré que sur une telle stratification il est possible de construire un système de données de contrôle $\mathcal{F} = \{(\pi_Z, \rho_Z) : T_Z \to Z \times [0, \infty[\}_{Z \in \Sigma}$ dont les fonctions distance $\{\rho_Z\}_Z$ sont des applications de Thom [2]. Nous utilisons ce théorème important pour déduire des propositions analogues à celles du §2. Ceci nous permet de démontrer l'existence d'un relèvement continu $\xi = \bigcup_{Y \geqslant X} \xi_Y$ contrôlé par rapport aux projections $\{\pi_Z\}_Z$ et aux fonctions distance $\{\rho_Z\}_Z$, i.e. contrôlé par rapport à $\mathcal{F}$ (théorème 3).

Enfin, dans le §5, nous unifions les résultats des paragraphes précédents en définissant, pour toute strate $X \in \Sigma$, une distribution stratifiée canonique $\mathcal{D}_X : T_X \to \mathbb{G}_l(TM)$ ($l = \dim X$) globalement définie dans un voisinage tubulaire stratifié $T_X$ de $X$ dans $A$ qui étend l'application de Gauss $\mathcal{D}_X : X \to \mathbb{G}_l(TM)$ ($\mathcal{D}_X(x) = T_x X$) et par laquelle le relèvement de chaque champ de vecteurs $\xi_X$ défini sur $X$ acquiert une expression particulièrement simple et naturelle (théorème 4). Ce résultat est valable également pour des stratifications $(w)$-régulières et lipschitziennes (théorème 5).

Le nouveau point de vue que nous proposons pour obtenir des relèvements continus de champs de vecteurs (théorèmes 4 et 5) unifie les idées des démonstrations précédentes. La notion de distribution canonique ici introduite va nous permettre d'étudier l'amélioration de la régularité des flots $\Phi$ des relèvements continus contrôlés de champs de vecteurs et celle d'applications stratifiées plus générales $f:\mathcal{X}\to\mathcal{X}'$ : les notions de morphisme *horizontalement-*$C^1$ et *semi-différentiable* en dépendent [14,15]. Leur utilité a été vérifiée dans plusieurs applications [4,13,16,17].

Nous remercions Karim Bekka pour plusieurs discussions utiles.

*Quelques préliminaires*. – Rappelons qu'une *stratification* d'un espace topologique $A$ est la donnée d'une partition $\Sigma$ localement finie de $A$ en variété $C^1$ connexes (dites les *strates* de $\Sigma$) vérifiant la *condition de frontière* : pour tout couple de strates $X, Y \in \Sigma$, si $X \cap \overline{Y} \neq \emptyset$ alors $X \subseteq \overline{Y}$. On note alors $X < Y$ et en posant $\partial Y = \overline{Y} - Y$ on a $\overline{Y} = Y \sqcup (\bigsqcup_{X<Y} X)$ et $\partial Y = \bigsqcup_{X<Y} X$ [12] ($\sqcup$ = réunion disjointe). Le couple $\mathcal{X} = (A, \Sigma)$ est dit un *espace stratifié* de *support* $A$ et de *stratification* $\Sigma$. La réunion $A_k$ des strates de dimension $\leqslant k$ est dite *$k$-squelette* de $A$, et induit un espace stratifié $\mathcal{X}_k = (A_k, \Sigma_{|A_k})$.

Des conditions de régularité supplémentaires peuvent être imposées à $\Sigma$ : être un *ensemble stratifié abstrait* au sens de Mather [9,11,12, 31] ou, si $A$ est un sous-ensemble d'une variété $C^1$ $M$, de satisfaire les conditions $(a)$ ou $(b)$ de Whitney [11,12,32], ou $(c)$ de Bekka [1,2] ou, si $A$ est un sous-ensemble d'une variété $C^2$, de satisfaire les conditions $(w)$ de Kuo-Verdier [31], ou $(L)$ (*i.e. Lipschitzienne*) de Mostowski [21].

DÉFINITION 1. – *Soit $\mathcal{X} = (A, \Sigma)$ un espace stratifié. Une famille $\mathcal{F} = \{(\pi_X, \rho_X, T_X)\}_{X\in\Sigma}$ est dite un système de données de contrôle (S.D.C.) de $\mathcal{X}$ si pour toute strate $X$ de $\mathcal{X}$ on a :*

(1) *$T_X$ est un voisinage de $X$ dans $A$ (dit voisinage tubulaire de $X$) ;*
(2) *$\pi_X : T_X \to X$ est une rétraction continue de $T_X$ sur $X$ (dite la projection sur $X$) ;*
(3) *$\rho_X : T_X \to [0,\infty[$ est une fonction continue telle que $X = \rho_X^{-1}(0)$ (dite la fonction distance de $X$) ;*

*et, de plus, pour tout couple de strates adjacentes $X < Y$, en considérant les restrictions $\pi_{XY} = \pi_{X|T_{XY}}$ et $\rho_{XY} = \rho_{X|T_{XY}}$ aux sous-ensembles $T_{XY} = T_X \cap Y$, on a :*

(4) *l'application $(\pi_{XY}, \rho_{XY}) : T_{XY} \to X\times]0,\infty[$ est une submersion $C^1$ (et il s'en suit en particulier que* $\dim X < \dim Y$) ;
(5) *pour toute strate $Z$ de $\mathcal{X}$ tel que $Z > Y > X$ et pour tout $z \in T_{YZ} \cap T_{XZ}$ les conditions de contrôle suivantes sont valables :*
 (i) $\pi_{XY}\pi_{YZ}(z) = \pi_{XZ}(z)$ (*dite la condition de $\pi$-contrôle*) ;

(ii) $\rho_{XY}\pi_{YZ}(z) = \rho_{XZ}(z)$ (*dite la condition de* $\rho$*-contrôle*).
*On note alors* $T_X(\varepsilon) = \rho_X^{-1}([0,\varepsilon[)\,, \forall\,\varepsilon > 0$ *où on peut supposer* $T_X = T_X(1)$ [9,12].

Si $A$ est un espace topologique séparé, localement compact et à base dénombrable alors le couple $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ est dit un *ensemble stratifié abstrait* (et comme on travaille d'habitude avec un unique système de données de contrôle $\mathcal{F}$ de $\mathcal{X}$, $\mathcal{F}$ peut être alors omis). Dans ce cas $A$ est métrisable et les voisinages tubulaires $\{T_X\}_{X\in\Sigma}$ peuvent être choisis tels que "$T_{XY} \neq \emptyset$ si et seulement si $X < Y$ ou $X > Y$ ou $X = Y$" (voir [12] page 41 et suivantes).

DÉFINITION 2. – *Un champ de vecteurs stratifié sur* $\mathcal{X} = (A, \Sigma)$ *est la donnée d'une famille* $\xi = \{\xi_X\}_{X\in\Sigma}$ *où chaque* $\xi_X$ *est un champ de vecteurs* $C^1$ *sur la strate* $X$. *Un tel* $\xi = \{\xi_X\}_{X\in\Sigma}$ *est dit contrôlé* (*par rapport à* $\mathcal{F}$) *si les deux conditions de contrôle suivantes sont valables* :

$$\begin{cases} \pi_{XY*}(\xi_Y(y)) = \xi_X(\pi_{XY}(y)) & (\textit{la condition de } \pi\textit{-contrôle pour } \xi) \\ \rho_{XY*}(\xi_Y(y)) = 0 & (\textit{la condition de } \rho\textit{-contrôle pour } \xi). \end{cases}$$

La notion de système de données de contrôle introduite par Mather pour définir les ensembles stratifiés abstraits [12] s'est révélée être un instrument fondamental pour obtenir de "bonnes" extensions de champs de vecteurs sur un espace stratifié. En fait pour tout champ de vecteurs $\xi_X$ sur une strate $X$ de $\mathcal{X}$, il existe un relèvement $(\pi,\rho)$-contrôlé $\xi = \{\xi_Y\}_{Y\geqslant X}$ défini sur un voisinage tubulaire $T_X(\varepsilon)$ de $X$. De plus la condition de contrôle simultanée par rapport à $\pi$ et à $\rho$ implique que si $\xi_X$ admet un flot global $\{\phi_t : X \to X\}_{t\in\mathbb{R}}$, alors le relevé $\xi$ admet un flot global également.

Les ensembles stratifiés abstraits ne sont pas a priori plongés dans une variété donc pour eux la continuité des champs de vecteurs stratifiés n'a aucun sens. Cependant les stratifications $(b)$- et $(c)$-régulières admettent un système de données de contrôle (resp. [1,2,12]) (et une structure d'ensemble stratifié abstrait) ainsi que les stratifications $(w)$- ou $(L)$-régulières à strates analytiques (resp. [21,29]).

D'autre part même pour les stratifications $(a)$-régulières ou $(w)$- ou $(L)$-régulières n'admettant pas un S.D.C. nous considérerons dans la suite des voisinages ouverts des strates, des projections et des fonctions distances (ne provenant pas d'un S.D.C.) pour lesquelles il nous conviendra de préserver les notations des ensembles stratifiés abstraits et de leurs S.D.C. : $T_X$, $\pi_X : T_X \to X$, $\rho_X : T_X \to [0,1[$ et pour toute strate $Y > X$, de noter $T_{XY} = T_X \cap Y$, $\pi_{XY} = \pi_{X|T_{XY}}$ et $\rho_{XY} = \rho_{X|T_{XY}}$.

## 2. La distribution canonique locale et (a)-régularité de Whitney

Soient $X < Y$ deux sous-variétés lisses (i.e. au moins de classe $C^1$) de $\mathbb{R}^n$, $l = \dim X$, $k = \dim Y$. L'étude que nous envisageons étant locale sur $X$, nous supposons $X = \mathbb{R}^l \times 0^{n-l}$ et notons $E_1, \ldots, E_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $p_{\mathbb{R}^l} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l \times 0$ la projection canonique sur $\mathbb{R}^l \times 0$. Soient de plus :

$$\mathbb{V}_l(TY) = \bigcup_{y \in Y} \{(v_1, \ldots, v_l) \in (T_yY)^l \mid v_1, \ldots, v_l \text{ indépendants}\},$$

$$\mathbb{G}_l(TY) = \{T_yY \mid y \in Y\} \quad \text{et} \quad q : \mathbb{V}_l(TY) \to \mathbb{G}_l(TY)$$

respectivement la variété de Stiefel des $l$-repères de $TY$, la grassmannienne des $l$-sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ tangents à $Y$ et la projection canonique $q(v_1, \ldots, v_l) = [v_1, \ldots, v_l]$ de $\mathbb{V}_l(TY)$ sur $\mathbb{G}_l(TY)$. Alors on a :

THÉORÈME 1. – *Le couple $(X, Y)$ est $(a)$-régulier si et seulement s'il existe un ouvert $W \subseteq Y$, une distribution $\mathcal{D}_{XY} : W \to \mathbb{G}_l(TY)$ et un relèvement $\tilde{\mathcal{D}}_{XY} : W \to \mathbb{V}_l(TY)$ de $\mathcal{D}_{XY}$ dans $\mathbb{V}_l(TY)$ rendant commutatif le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{V}_l(TY) \arrow[d, "q"] \\ W \arrow[ur, "\tilde{\mathcal{D}}_{XY}"] \arrow[r, "\mathcal{D}_{XY}"] & \mathbb{G}_l(TY) \end{tikzcd}$$

*et tels que* :

(i) *$X \cup W$ est un voisinage de $X$ dans $X \cup Y$ et $X \subseteq \overline{W}$* ;

(ii) *en notant $\tilde{\mathcal{D}}_{XY}(y) = (v_1(y), \ldots, v_l(y))$ on a $pr_{\mathbb{R}^l}(v_i(y)) = E_i$, $\forall i = 1, \ldots, l$* ;

(iii) *$\tilde{\mathcal{D}}_{XY}$ prolonge par continuité sur $X \cup W$ l'application $\tilde{\mathcal{D}}_{XY}(x) = (E_1, \ldots, E_l)$ et $\mathcal{D}_{XY}$ prolonge par continuité sur $X \cup W$ l'application de Gauss $\mathcal{D}_{XY}(x) = T_xX = [E_1, \ldots, E_l]$.*

*Preuve.* – “*Si*”. Dans ces hypothèses il existe le sous-fibré $\mathcal{D}_{XY} = \bigcup_{y\in W}\{y\} \times \mathcal{D}_{XY}(y)$ de $TW \subseteq TY$ tel que pour toute suite $\{y_n\}_n \subseteq Y$ telle que $\lim_n y_n = x \in X$ on ait $\lim_n \mathcal{D}_{XY}(y_n) = T_x X$ grâce à (iii). Alors, comme d’autre part $\mathcal{D}_{XY}(y_n) \subseteq Ty_n Y\ \forall n$, on trouve en particulier que $\lim_n Ty_n Y \supseteq \lim_n \mathcal{D}_{XY}(y_n) = T_x X$.

“*Seulement si*”. Si par hypothèse $(X, Y)$ est $(a)$-régulier, il existe un ouvert $W \subseteq Y$ tel que la restriction $p_{\mathbb{R}^l|W} : W \to \mathbb{R}^l \times 0$ soit une submersion et qui vérifie (i) [28].

Notons $T_{XY} = W$ et $\pi_{XY} = p_{\mathbb{R}^l|W}$ selon la terminologie usuelle des stratifications.

Soit $\mathcal{D}_{XY}$ la distribution de dimension $l$ définie pour tout $y \in T_{XY}$ par le sous-espace orthogonal à $\ker \pi_{XY*y}$ dans $T_y Y$,

$$\mathcal{D}_{XY} : T_{XY} \to \mathbb{G}_l(TY), \qquad \mathcal{D}_{XY}(y) = \perp (\ker \pi_{XY*y}, T_y Y).$$

Comme pour tout $y \in Y$ la restriction $\pi_{XY*y|} : \mathcal{D}_{XY}(y) \to \mathbb{R}^l \times 0$ est un isomorphisme d’espaces vectoriels, tout vecteur $E_i$ de la base canonique de $\mathbb{R}^l \times 0$ se relève en un unique vecteur $v_i(y) = (\pi_{XY*y|})^{-1}(E_i)$ dans $\mathcal{D}_{XY}(y)$, i.e. nous définissons

$$v_i(y) = \perp (\ker \pi_{XY*y}, T_y Y) \cap p_{\mathbb{R}^l}{}^{-1}(E_i).$$

Alors les vecteurs relevés $v_1(y), \ldots, v_l(y)$ ayant leurs projections $E_1, \ldots, E_l$ indépendantes sont eux aussi indépendants. Donc $(v_1(y), \ldots, v_l(y))$ forme un $l$-repère de $\mathbb{R}^n$ qui par construction appartient à $\mathbb{V}_l(TY)$, et on peut définir l’application :

$$\tilde{\mathcal{D}}_{XY} : T_{XY} \to \mathbb{V}_l(TY), \qquad \tilde{\mathcal{D}}_{XY}(y) = \big(v_1(y), \ldots, v_l(y)\big)$$

qui à nouveau par construction vérifie évidemment $\pi_{XY*}(v_i(y)) = E_i,\ \forall i$ et $\mathcal{D}_{XY} = q\tilde{\mathcal{D}}_{XY}$.

Afin de démontrer (iii) nous établissons le lemme ci-dessous où on note $\tau_y = T_y Y$ pour tout $y \in T_{XY}$ et $p_{\tau_y} : \mathbb{R}^n \to \tau_y$ la projection orthogonale.

LEMME. – $\mathcal{D}_{XY}(y) = p_{\tau_y}(\mathbb{R}^l \times 0)$ *pour tout* $y \in T_{XY}$.

*Preuve.* – En notant pour tout sous-espace $V \subseteq \mathbb{R}^n$, $V^\perp$ l’orthogonal à $V$ dans $\mathbb{R}^n$, on voit facilement que

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{XY}(y) &= \perp \big(\ker p_{\mathbb{R}^l|\tau_y}, \tau_y\big) = \tau_y \cap \big(\big(0 \times \mathbb{R}^{n-l}\big) \cap \tau_y\big)^\perp \\ &= \tau_y \cap \big(\big(\mathbb{R}^l \times 0\big) + \tau_y^\perp\big).\end{aligned}$$

Alors $\forall w \in \mathcal{D}_{XY}(y)$ on peut écrire $w = v + v'$ avec $v \in \mathbb{R}^l \times 0$ et $v' \in \tau_y^{\perp}$, d'où :

$$p_{\tau_y}(v) = p_{\tau_y}(w - v') = p_{\tau_y}(w) - p_{\tau_y}(v') = w + 0 = w$$

et donc $w \in p_{\tau_y}(\mathbb{R}^l \times 0)$.

D'autre part, tout vecteur $u \in p_{\tau_y}(\mathbb{R}^l \times 0)$ est de la forme $u = p_{\tau_y}(v)$ avec $v \in \mathbb{R}^l \times 0$ et si $u' \in \tau_y^{\perp}$ est la projection (orthogonale) de $v$ sur $\tau_y^{\perp}$ on a $v = u + u'$ où $u = v - u'$ c.à.d. $u \in \tau_y \cap ((\mathbb{R}^l \times 0) + \tau_y^{\perp})$ et donc $u \in \mathcal{D}_{XY}(y)$. □

*Suite de la preuve du théorème.* – A présent les deux conditions :

$$\lim_{y \to x} \tau_y \supseteq \mathbb{R}^l \times 0 \quad \text{et} \quad \lim_{y \to x} p_{\tau_y}\big(\mathbb{R}^l \times 0\big) = \mathbb{R}^l \times 0$$

sont précisement la $(a)$-régularité de $X < Y$ et une conséquence immédiate de cette dernière. Donc, grâce au lemme, on déduit immédiatement que :

$$\begin{cases} \lim\limits_{y \to x} \mathcal{D}_{XY}(y) = \lim\limits_{y \to x} p_{\tau_y}\big(\mathbb{R}^l \times 0\big) = \mathbb{R}^l \times 0, \\ \lim\limits_{y \to x} v_i(y) = \lim\limits_{y \to x} p_{\tau_y}\big(\mathbb{R}^l \times 0\big) \cap p_{\mathbb{R}^l}{}^{-1}(E_i) = E_i, \quad \forall i = 1, \ldots, l \end{cases}$$

c.à.d. les conditions de continuité (iii) à démontrer. □

DÉFINITION. – *La distribution $\mathcal{D}_{XY}$ de sous-espaces de dimension $l = \dim X$ de $TY$ définie au théorème* 1 *sera appelée la distribution canonique locale induite par $X$ sur $Y$.*

*Remarque* 1. – Le lemme 1 dit aussi que le sous-espace $\mathcal{D}_{XY}(y)$ est le sous-espace de $T_yY$ à distance minimale de $T_xX$ où $x = \pi_{XY}(y)$.

Quand nous ne sommes plus dans une analyse locale i.e. où $X = \mathbb{R}^l \times 0$ et $\pi_{XY} = p_{\mathbb{R}^l|Y}$, on conviendra (comme dans le §5) que $\mathcal{D}_{XY}(y) = p_{\tau_y}(T_xX)$, où $\tau_y = T_yY$ et $x = \pi_{XY}(y)$. Aussi pour les problèmes qui nous intéressent, il ne sera pas restrictif d'identifier le voisinage $W$ (domaine de $\mathcal{D}_{XY}$) avec $Y$.

*Remarque* 2. – Comme l'ont remarqué Thom [26] et Whitney [32], la $(a)$-régularité en $x \in X$ d'un couple de strates $X < Y$ implique la $(t)$-régularité en $x$. Cette notion introduite par R. Thom en 1964 signifie que la transversalité à $X$ en $x$ d'une variété $S$ entraîne aussi la transversalité de $S$ à la strate supérieure $Y$ au voisinage de $x$. Soulignons que la distribution canonique $\mathcal{D}_{XY}$ donne précisement un sous-fibré $\bigcup_{y\in Y}\{y\}\times\mathcal{D}_{XY}(y)$ de $TY$ qui permet de préserver une telle transversalité en passant de $X$ à $Y$.

D'autre part, la $(a)$-régularité de $X<Y$ caractérise en fait la stabilité de la transversalité à $X\cup Y$, i.e. que pour toutes variétés $N$ et $M$ avec $X\cup Y\subseteq M$, l'ensemble $\{f\in C^1(N,M)\mid f$ est transverse à $X\cup Y\}$ est ouvert dans $C^1(N,M)$ avec la $C^1$-topologie forte [30].

*Remarque* 3. – Dans [28], D. Trotman démontre qu'il y a une version géométrique de la $(a)$-régularité d'un couple $X<Y$ : celle-ci équivaut à demander que dans toute carte $C^1$, la projection $\pi_{XY}$ soit une submersion. Nous précisons que le sous-espace relevé canonique $\mathcal{D}_{XY}(y)$ comporte une telle submersivité et qu'en particulier on a : "$\pi_{XY*y|}:\mathcal{D}_{XY}(y)\to T_xX$ *est un isomorphisme*".

## 3. La $(a)$-régularité caractérise l'existence des relèvements continus

Dans ce paragraphe nous considérons le problème du prolongement d'un champ de vecteurs $\xi_X$ donné sur une certaine strate $X$ d'une stratification $(a)$-régulière $\mathcal{X}=(A,\Sigma)$, aux strates supérieures $Y\geqslant X$ adjacentes à $X$.

Notre théorème s'inspire principalement de celui de M. Shiota [23] (Lemme 4.11.) où l'on construit un voisinage de $X$, réunion de voisinages coordonnés de points de $X$, sur lequel il existent les relèvements continus et contrôlés des champs définis sur $X$. Afin d'obtenir la continuité du champ relevé et à la différence des arguments de [23,24] (et de [9,12] qui cherchaient à obtenir un relèvement contrôlé, mais pas nécessairement continu), nous relèverons les champs locaux dans les sous-espaces de la distribution canonique locale définie au §1.

La $(a)$-régularité de Whitney est une condition évidemment nécessaire pour qu'un relèvement continu de tout champ de vecteurs soit possible. Nous montrons alors, en affaiblissant les hypothèses de [23], que la $(a)$-régularité est également une condition suffisante pour avoir une extension continue et contrôlée par rapport à une famille de projections $\{\pi_Y:T_Y\to Y\}_Y$ compatibles.

Remarquons qu'un théorème de relèvement continu sous l'hypothèse de $(a)$-régularité a été démontré par M.-H. Schwartz [22] pour des stratifications analytiques, mais ceci sans considérer aucune condition de contrôle.

THÉORÈME 2. – *Soient $\mathcal{X} = (A, \Sigma)$ un espace stratifié $(a)$-régulier de support un fermé $A$ d'une variété $C^1$ $M^n$, $X$ une strate de $\mathcal{X}$ et $\{\pi_Y : T_Y \to Y\}_{Y \geqslant X}$ une famille de projections compatibles (i.e. : $\pi_{YZ}\pi_{ZZ'} = \pi_{YZ'}$, $\forall X \leqslant Y < Z < Z'$) avec chaque $T_Y$ un voisinage ouvert de $Y$ dans $M$.*

*Pour tout champ de vecteurs $C^1$ $\xi_X$ sur $X$, il existe un voisinage ouvert $T_X$ de $X$ et un champ de vecteurs stratifié $\xi = \{\xi_Y\}_{Y \geqslant X}$ sur $T_X$ qui est un prolongement continu de $\xi_X$, contrôlé par rapport à $\{\pi_Y\}_Y$.*

*Preuve.* – Remarquons qu'un voisinage $T_X$ de $X$ n'intersecte pas nécessairement les strates $X' < X$, donc l'extension ne concerne que les strates $Y > X$. Soit $l = \dim X$.

*Etape 1 : relèvement sur une strate $Y > X$.* Pour tout $x \in X$, considérons une carte $\varphi_x : (U_x, U_x \cap X) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^l \times 0)$, définie sur un voisinage ouvert $U_x$ de $x$ dans $M^n$, qui plonge localement $X \cap U_x$ comme $\mathbb{R}^l \times 0$ dans $\mathbb{R}^n$, en transformant $\pi_X$ en la projection canonique $p_{\mathbb{R}^l}$, i.e. telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} U_x & \xrightarrow{\pi_X} & \pi_X(U_x) \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_|} \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{p_{\mathbb{R}^l}} & \mathbb{R}^l \times 0. \end{array}$$

L'ensemble $U = \bigcup_{x \in X} U_x$ est donc un voisinage ouvert de $X$ dans $M$ et quitte à rétrécir le domaine $T_X$ de $\pi_X$, on peut supposer $T_X = U$.

Fixons une strate $Y > X$ et, afin de définir un premier relèvement continu $\xi_{XY}$ de $\xi_X$ sur $Y$, considérons une famille de relèvements locaux $\xi_{U_x \cap Y}$ sur $U_x \cap Y$ qui se recollent convenablement entre eux ainsi qu'avec $\xi_X$.

Pour tout $x \in X$ soit $\xi_{\varphi(U_x \cap X)} = \varphi_*(\xi_{U_x \cap X})$ le champ image de $\xi_{U_x \cap X}$ sur $\mathbb{R}^l \times 0$ via $\varphi_*$ et posons :

$$\xi_{\varphi(U_x \cap X)}(p') = \sum_{i=1}^{l} b_i(p') E_i \quad \text{où } p' = (p_1, \ldots, p_l, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^l \times 0.$$

En substituant les vecteurs de la base canonique $\{E_i\}_i$ de $\mathbb{R}^l \times 0$ par ceux de la base correspondante relevée $\{v_i(p)\}_i$ dans la distribution canonique locale $\mathcal{D}_{\varphi(X)\varphi(Y)}$ autour de $\varphi(x) = 0 \in X = \mathbb{R}^l \times 0$, on obtient un champ relevé $\xi_{\varphi(U_x \cap Y)}$ sur $\varphi(U_x \cap Y)$,

$$\xi_{\varphi(U_x \cap Y)}(p) = \sum_{i=1}^{l} b_i(p')v_i(p)$$
$$\text{où } p = (p_1, \ldots, p_l, p_{l+1}, \ldots, p_n) \in \varphi(U_x \cap Y) \subseteq \mathbb{R}^n,$$

qui prolonge continûment $\xi_{\varphi(U_x \cap X)}$ et qui est contrôlé par rapport à $p_{\mathbb{R}^l}$ (théorème 1(ii)).

Le champ image réciproque via $\varphi_*^{-1}$, sur $U_x \cap \overline{Y} = (U_x \cap Y) \sqcup (U_x \cap X)$ :

$$\xi_{U_x \cap \overline{Y}} = \begin{cases} \varphi_*^{-1}(\xi_{\varphi(U_x \cap Y)}) = (\text{notons-le aussi } \xi_{U_x \cap Y}) & \text{sur } U_x \cap Y, \\ \xi_{U_x \cap X} & \text{sur } U_x \cap X, \end{cases}$$

est alors un relèvement local continu et $\pi$-contrôlé de $\xi_{U_x \cap X}$ (i.e. $\pi_{X*}(\xi_{U_x \cap Y}) = \xi_{U_x \cap X}$).

Par une partition de l'unité lisse $\{\lambda_x : U_x \cap Y \to [0,1]\}_{x \in X}$ subordonnée au recouvrement $\{U_x \cap Y\}_{x \in X}$ de $T_X \cap Y = T_{XY}$, on peut définir le champ global $\xi_{XY}$, par

$$\xi_{XY}(y) = \begin{cases} \sum_x \lambda_x(y)\xi_{U_x \cap Y}(y) & \text{si } y \in \bigcup_x U_x \cap Y = T_{XY}, \\ \xi_X(y) & \text{si } y \in \bigcup_x U_x \cap X = X, \end{cases}$$

qui est une extension continue et $\pi$-contrôlée de $\xi_X$ sur $T_X \cap Y$.

En fait, notant $y' = \pi_X(y)$ $\forall y \in T_{XY}$, chaque $\xi_{U_x \cap Y}$ étant contrôlé on a :

$$\begin{aligned} \pi_{X*y}\Big(\sum_x \lambda_x(y)\xi_{U_x \cap Y}(y)\Big) &= \sum_x \lambda_x(y)\pi_{X*y}\big(\xi_{U_x \cap Y}(y)\big) \\ &= \Big[\sum_x \lambda_x(y)\Big] \cdot \xi_{U_x \cap X}(y') \\ &= 1 \cdot \xi_{U_x \cap X}(y') = \xi_X(y'); \end{aligned}$$

et similairement comme $\lim_{y \to x'} \xi_{U_x \cap Y}(y) = \xi_{U_x \cap X}(x')$, $\forall x' \in X$ on trouve :

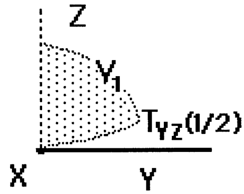


FIG. 1.

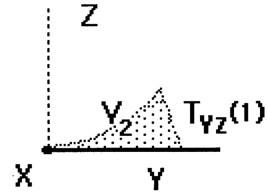


FIG. 2.

$$\lim_{y\to x'} \xi_{U\cap Y}(y) = \lim_{y\to x'} \sum_x \lambda_x(y)\xi_{U_x\cap Y}(y) = 1\cdot \xi_{U_x\cap X}(x') = \xi_X(x').$$

*Etape 2 : relèvement aux strates supérieures*. Soit $X < X_1 < \cdots < X_r$ une chaîne maximale de strates adjacentes à $X$, et prouvons que le relèvement peut être prolongé jusqu'à $T_{XX_r} = T_X \cap X_r$. Il suffit de considérer le cas $r = 2$, $X < Y < Z$ : il sera *a posteriori* clair que la preuve s'étend par récurrence.

Considérons des relèvements définis comme dans l'étape 1, par rapport aux trois couples de strates adjacentes $X < Y,\ X < Z,\ Y < Z$ :

$$\begin{cases} \xi_{XY} & : \text{le relèvement continu contrôlé de } \xi_X \text{ sur } T_{XY}\,; \\ \xi_{XZ} & : \text{le relèvement continu contrôlé de } \xi_X \text{ sur } T_{XZ}\,; \\ \xi_{YZ} & : \text{le relèvement continu contrôlé de } \xi_{XY} \text{ sur } T_X \cap T_{YZ}. \end{cases}$$

Pour une métrique riemannienne fixée sur $M^n$, la continuité du champ $\xi_{YZ}$ sur $T_{XY} \cup T_{YZ}$ (voir aussi les figures 1 et 2) implique celle de l'application

$$h : T_{XY} \cup T_{YZ} \to [0,\infty[, \qquad h(z) = \big\| \xi_{YZ}(z) - \xi_{XY}\big(\pi_{YZ}(z)\big)\big\|.$$

D'autre part, comme $\forall y' \in T_{XY}$ on a $h(y') = 0$ et $\delta_{y'} = d(y', X) > 0$, il existe un voisinage ouvert $W_{y'}$ de $y'$ dans $T_{XY} \cup T_{YZ}$ tel que $h(z) < \delta_{y'}/2$, $\forall z \in W_{y'}$ et tel que le point $y = \pi_{YZ}(z)$ vérifie $d(y, y') < \delta_{y'}/2$. Alors $W = \bigcup_{y'\in T_{XY}} W_{y'}$ est un voisinage ouvert de $T_{XY}$ dans $T_{XY} \cup T_{YZ}$ tel que $\forall z \in W$, si $y' \in Y$ est tel que $z \in W_{y'}$, on trouve

$$d(y', X) \leqslant d(y', y) + d(y, X) < \frac{1}{2} d(y', X) + d(y, X)$$

$$\text{et donc } h(z) < \frac{1}{2}\delta_{y'} < d(y, X).$$

Il n'est pas restrictif de supposer, par un rétrécissement du voisinage tubulaire $T_Y$, que $T_Y \cap Z = W$ et puis par un changement de métrique que ce nouveau $T_Y$ soit encore de rayon 1, $T_Y = T_Y(1)$.

En rappelant que $X \subseteq \overline{T}_{XY} \subseteq \overline{T}_{YZ}$, on trouve alors que le champ restriction de $\xi_{YZ}$ à ce nouveau $T_{YZ}$, (notons-le encore $\xi_{YZ}$) vérifie la condition de continuité sur $X$ :

$$(*) \qquad \lim_{z\to x} \xi_{YZ}(z) = \xi_X(x), \quad \text{pour tout } x \in X,$$

car

$$\begin{cases} \|\xi_{YZ}(z) - \xi_X(x)\| \leqslant \|\xi_{YZ}(z) - \xi_{XY}(\pi_{YZ}(z))\| \\ \quad + \|\xi_{XY}(\pi_{YZ}(z)) - \xi_X(x)\| \,; \\ \lim\limits_{z\to x} \|\xi_{XY}(\pi_{YZ}(z)) - \xi_X(x)\| = 0, \\ \quad \text{par construction de } \xi_{XY} \,; \\ \lim\limits_{z\to x} \|\xi_{YZ}(z) - \xi_{XY}(\pi_{YZ}(z))\| \\ \quad = \lim\limits_{z\to x} h(z) \leqslant \lim\limits_{z\to x} d(\pi_Y(z), X) = 0. \end{cases}$$

Soit maintenant $\{\alpha,\ \beta\}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement ouvert $\{V_1 = T_{XZ}(1) - \overline{T_{YZ}(1/2)},\ V_2 = T_{XZ}(1) \cap T_{YZ}(1)\}$ de $T_{XZ} = T_X(1) \cap Z$.

Alors le champ $\xi$, recollement de $\xi_{XZ}$ et $\xi_{YZ}$,

$$\xi : T_X \cap Z \to TZ, \quad \xi(z) = \alpha(z)\xi_{XZ}(z) + \beta(z)\xi_{YZ}(z)$$

vérifie :

( i) $\xi$ est continu sur $T_{XY}$ et sur $X$ où il vaut respectivement $\xi_{XY}$ et $\xi_X$,

(ii) $\xi$ est contrôlé sur $T_{XZ}$ par rapport au système de projections $\{\pi_X,\ \pi_Y,\ \pi_Z\}$.

*Preuve (i).* – Si $y \in T_X \cap Y$, comme dans $T_{YZ}(1/2)$ on a $\alpha_{|T_{YZ}(1/2)} \equiv 0$ et $\beta_{|T_{YZ}(1/2)} \equiv 1$, alors $\xi_{|T_{YZ}(1/2)} = \xi_{YZ}$ et par conséquent

$$\lim_{z\to y} \xi(z) = \lim_{z\to y} \xi_{|T_{YZ}(1/2)}(z) = \lim_{z\to y} \xi_{YZ}(z) = \xi_{XY}(y).$$

D' autre part $\forall x \in X$ on a :

$$\lim_{z\to x} \xi_{XZ}(z) = \xi_X(z) \quad \text{et} \quad \lim_{z\to x} \xi_{YZ}(z) = \xi_X(x),$$

respectivement par construction (étape 1) et grâce à $(*)$ au-dessus. Donc on conclut :

$$\lim_{z\to x} \xi(z) = \lim_{z\to x} \alpha(z)\xi_{XZ}(z) + \beta(z)\xi_{YZ}(z) = \xi_X(x).$$

*Preuve (ii).* – Le champ $\xi$ coïncide avec $\xi_X$ sur $X$, avec $\xi_{XY}$ sur $T_{XY}$ et avec $\xi_{YZ}$ sur $T_{YZ}(1/2)$, alors les conditions de contrôle sont automatiquement vérifiées par construction (étape 1), relativement à $X < Y$ sur $T_{XY}(1)$ et à $Y < Z$ sur $T_{YZ}(1/2)$ et il reste donc à les vérifier pour le couple $X < Z$. En fait, si $z \in T_X(1) \cap Z$ un seul des cas suivants a lieu :

$(a)$ $z \in V_1 - V_2$. Alors $\xi_{|V_1-V_2} = \xi_{XZ|V_1-V_2}$ et la condition découle de l'étape 1.

$(b)$ $z \in V_2 - V_1$. Alors $\xi_{|V_2-V_1} = \xi_{YZ|V_2-V_1}$ et la condition suit encore de l'étape 1.

$(c)$ $z \in V_1 \cap V_2$. Dans ce cas, en notant $y = \pi_{YZ}(z)$ et $x = \pi_{XZ}(z) = \pi_{XY}(y)$, par linéarité de $\pi_{XZ*z} : T_z Z \to T_x X$ et grâce aux cas (a) et (b), on trouve :

$$\begin{aligned}
\pi_{XZ*z}\big(\xi(z)\big) &= \alpha(z)\pi_{XZ*z}\big(\xi_{XZ}(z)\big) + \beta(z)\pi_{XY*y}\pi_{YZ*z}\big(\xi_{YZ}(z)\big)\\
&= \alpha(z)\xi_X\big(\pi_{XZ}(z)\big) + \beta(z)\pi_{XY*y}\xi_{XY}\big(\pi_{YZ}(z)\big)\\
&= \alpha(z)\xi_X\big(\pi_{XZ}(z)\big) + \beta(z)\xi_X\big(\pi_{XY}\big(\pi_{YZ}(z)\big)\big)\\
&= \big[\alpha(z)+\beta(z)\big]\cdot \xi_X\big(\pi_{XZ}(z)\big) = \xi_X\big(\pi_{XZ}(z)\big). \qquad \square
\end{aligned}$$

*Remarque* 1. – La démonstration du théorème 1 contient aussi la preuve de son analogue sans condition de contrôle : "*Si $\mathcal{X}$ est $(a)$-régulier tout champ de vecteurs $C^1$ $\xi_X$ sur une strate $X$, admet un relèvement stratifié $\xi = \{\xi_Y\}_{Y \geqslant X}$ continu défini sur un voisinage ouvert $T_X$ de $X$*". Ceci découle de : (1) les distributions canoniques locales considérées dans l'étape 1 existent indépendamment des conditions de contrôle ; (2) les différentes partitions de l'unité utilisées (étape 1 et étape 2) pour les recollements par continuité peuvent également être considérées sans aucune modification ; (3) l'ensemble $W = \bigcup_y W_y$ peut être similairement défini en considérant $\forall y \in T_{XY}$, $h_y(z) = \|\xi_{YZ}(z) - \xi_{XY}(y)\|$ et $W_y = h_y^{-1}([0, \delta_y[)$.

*Remarque* 2. – La $(a)$-régularité étant évidemment une condition nécessaire pour qu'un relèvement continu de tout champ de vecteurs soit possible on obtient donc que :

*“La* $(a)$*-régularité de Whitney est une condition nécessaire et suffisante pour l’existence des relèvements continus de champs de vecteurs définis sur une strate”.*

*Remarque* 3. – Le théorème de relèvement implique en particulier que si un champ de vecteurs est donné sur toutes les strates de profondeur maximale, on peut en déduire une extension continue et contrôlée, définie sur la stratification $A$ toute entière (et sur la variété ambiante $M$).

*Remarque* 4. – Les voisinages $\{T_Y\}_{Y \geqslant X}$ sur lesquels le relèvement final (est défini et) vérifie les conditions de $\pi$-contrôle sont des rétrécissements (a priori) des voisinages de définition des projections $\pi_Y$ (que nous avons noté avec abus encore par $\{T_Y\}_{Y \geqslant X}$).

## 4. Relèvements sur des stratifications $(c)$-régulières

En 1988 K. Bekka a introduit dans sa thèse [1] la condition $(c)$ de régularité pour un espace stratifié $\mathcal{X} = (A, \Sigma)$ de support $A$ contenu dans une variété lisse $M$. La $(c)$-regularité implique la condition $(a)$ de Whitney et est plus faible que la condition $(b)$ [1]. Dans sa thèse Bekka l’appelle *la “condition de Whitney faible”*, mais maintenant cette appelation est réservée à la conjonction des conditions $(a)$ et $(\delta)$, laquelle est plus forte que la condition $(c)$ mais toujours plus faible que $(b)$ [5]. De plus Bekka a démontré [1,2] que l’on peut construire pour $A$ un système de données de contrôle $\mathcal{F} = \{(\pi_X, \rho_X) : T_X \to X \times [0, \infty[\,\}_{X \in \Sigma}$ [9,12] et que toute stratification $(c)$-régulière vérifie le premier théorème d’isotopie de Thom.

DÉFINITION 1. – *Une application stratifiée $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$, entre deux espaces stratifiés $\mathcal{X} = (A, \Sigma)$ et $\mathcal{X}' = (B, \Sigma')$, est la donnée d’une application continue $f : A \to B$ qui envoie chaque strate $X$ de $\mathcal{X}$ dans une unique strate $X'$ de $\mathcal{X}'$, telle que la restriction $f_X : X \to X'$ soit une application $C^1$. Une telle $f$ est dite un homéomorphisme stratifié* (*resp. une submersion stratifiée*) *si $f$ est un homéomorphisme* (*resp. une surjection*) *et si chaque $f_X$ est un difféomorphisme* (*resp. une submersion*).

DÉFINITION 2. – *On dit qu’une submersion stratifiée $f = \bigcup_{Y \in \Sigma} f_Y : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ vérifie la condition $(a_f)$ de Thom, si pour tout couple de strates*

*$X < Y$ dans $A$ et pour toute suite $\{y_n\}_n$ dans $Y$ telle que* $\lim_n y_n = x \in X$ *et* $\lim_n \ker f_{Y*y_n} = \tau$ *on a aussi* $\tau \supseteq \ker f_{X*x}$.

DÉFINITION 3. – *Un espace stratifié $\mathcal{X} = (A, \Sigma)$ est dit $(c)$-régulier si, pour toute strate $X \in \Sigma$, il existe un voisinage $U_X$ de $X$ dans la variété ambiante $M$ et une fonction continue $\rho_X : U_X \to [0, \infty[$, dont chaque restriction $\rho_{XY} : U_X \cap Y \to ]0, \infty[$ $(\forall\, Y > X)$ est de classe $C^1$, telle que $\rho_X^{-1}(0) = X$ et telle que l'application stratifiée*

$$\rho_X : Et(X) \cap U_X \to [0, \infty[ \quad \text{où } Et(X) = \bigcup_{Y \geqslant X} Y$$

*définie sur $Et(X) \cap U_X$ avec la stratification induite par $\Sigma$ soit une application de Thom.*

La $(c)$-régularité de Bekka signifie donc que pour tout couple de strates adjacentes $X < Y$, les espaces tangents en $y \in Y$ aux hypersurfaces de niveaux $\rho_X^{-1}(\varepsilon)$ (où $\varepsilon = \rho_X(y)$) ont des limites qui contiennent l'espace tangent $T_x X$ quand $y \to x \in X$.

Dans [3], Bekka montre que sur une stratification $(c)$-régulière on peut construire une *famille d'applications tapissantes* $\{f_Y : T_{\partial Y} \to [0, \infty[\,\}$ et qu'à partir de cela on peut relever (par image réciproque) des champs de vecteurs continus qui sont *contrôlés* par rapport à cette famille. En étudiant la relation entre ces fonctions tapissantes et les applications distance tubulaires $\{\rho_Y\}_Y$ du S.D.C. on peut déduire que le théorème de Bekka [3] implique celui de Shiota énoncé pour des stratifications $(b)$-régulières [23, Lemme 4.11]. En tout cas (bien que cela ne soit pas immédiat) l'idée clef, commune aux deux auteurs, reste celle de relever les champs sur les hypersurfaces de niveau d'une fonction distance laquelle dans [23] (où on considère une stratification de Whitney) se réduit à la distance standard $\rho_{XY}(y_1, \ldots, y_n) = \sum_{i=l+1}^{n} y_i^2$ $(l = \dim X)$. Cette idée est également présente dans le travail de A. du Plessis [7,8].

Nous reprenons alors cette idée pour définir notre relèvement continu contrôlé "*canonique*" pour une stratification $(c)$-régulière. Dans ce cas, nous obtenons des résultats analogues à ceux de §2 et §3 mais avec des champs et des flots qui seront de plus contrôlés par rapport aux fonctions distance $\{\rho_Z\}_Z$. Pour obtenir cela, il suffira d'apporter quelques modifications à la construction du §2.

Soient alors $\mathcal{X} = (A, \Sigma)$ un espace stratifié $(c)$-régulier et $\mathcal{F} = \{(\pi_X, \rho_X) : T_X \to X \times [0, \infty[\,\}_{X \in \Sigma}$ un S.D.C. dont les fonctions distance $\rho_X$ sont de plus des applications de Thom (un tel S.D.C. existe par [2]). Fixons une strate $X$ de $\mathcal{X}$ et pour chaque $Y > X$, soit $\rho_{XY} : T_{XY} \to [0, \infty[$ la restriction de $\rho_X$ à $T_{XY} = T_X \cap Y$.

Les notations et le lemme ci-dessous sont les analogues dans le cas $(c)$-régulier des notations et du lemme introduits au §2 pour le cas $(a)$-régulier.

Pour tout $y \in Y$, soient $\sigma_y$ le sous-espace de $T_yY$ tangent à l'hypersurface de niveau $\rho_{XY}^{-1}(\rho_{XY}(y))$ de $\rho_{XY}$ en $y$, $\sigma_y = T_y\rho_{XY}^{-1}(\rho_{XY}(y)) = \ker \rho_{XY*y}$, $p_{\sigma_y} : \mathbb{R}^n \to \sigma_y$ la projection orthogonale sur $\sigma_y$. Si $X = \mathbb{R}^l \times 0$ et $\pi_{XY} = p_{\mathbb{R}^l|Y}$, on a :

LEMME. – $p_{\sigma_y}(T_xX) = \perp (\ker \pi_{XY*y} \cap \ker \rho_{XY*y}, \ker \rho_{XY*y})$ *où* $x = \pi_{XY}(y)$.

*Preuve.* – La démonstration est complètement analogue à celle du lemme au §2. □

PROPOSITION. – *Si* $X = \mathbb{R}^l \times 0 < Y$ *est un couple* $(c)$*-régulier, les propriétés* (i), (ii) *et* (iii) *du théorème* 1 *peuvent être obtenues en construisant des applications*

$$\mathcal{D}_{XY} : T_{XY} \to \mathbb{G}_l(\ker \pi_{XY*}) \quad \textit{et} \quad \tilde{\mathcal{D}}_{XY} : T_{XY} \to \mathbb{V}_l(\ker \pi_{XY*}),$$

*i.e. avec les* $\mathcal{D}_{XY}(y) = [v_1(y), \ldots, v_l(y)]$ *tangent aux hypersurfaces de niveau* $Y \cap \rho_X^{-1}(\rho_X(y))$.

*Preuve.* – De l'hypothèse de $(c)$-régularité [2], on déduit qu'il existe un voisinage $T_{XY}(\varepsilon)$ (appelons-le $T_{XY}$) tel que l'application $(\pi_{XY}, \rho_{XY}) : T_{XY} \to X \times ]0, \varepsilon[$ soit une submersion. On peut définir alors la distribution $\mathcal{D}_{XY}$ par la formule (analogue au §2)

$$\mathcal{D}_{XY} : T_{XY} \to \mathbb{G}_l(\ker \rho_{XY*}),$$
$$\mathcal{D}_{XY}(y) = \perp \big(\ker (\pi_{XY}, \rho_{XY})_{*y}, \ker \rho_{XY*y}\big).$$

L'espace tangent à l'hypersurface de niveau $\{\varepsilon = \rho_X(y)\}$ est :

$$T_y\big(Y \cap \rho_X^{-1}(\varepsilon)\big) = T_yY \cap T_y\rho_X^{-1}(\varepsilon) = \ker \big(\rho_{X|Y}\big)_{*y} = \ker \rho_{XY*y}$$

qui grâce à la $(c)$-régularité vérifie :

$$\lim_{y\to x} \ker \rho_{XY*y} \supseteq \mathbb{R}^l \times 0, \quad \text{pour tout } x \in X.$$

Alors en utilisant le lemme précédent, de même que celui du §2 dans théorème 1, où ici $\sigma_y = \ker \rho_{XY*y}$ a remplacé $\tau_y = T_y Y$, on trouve :

$$\lim_{y\to x} \mathcal{D}_{XY}(y) = \mathbb{R}^l \times 0.$$

D'autre part comme la restriction $\pi_{XY*y|} : \mathcal{D}_{XY}(y) \to \mathbb{R}^l \times 0$ est un isomorphisme, nous pouvons à nouveau définir $\forall i = 1, \ldots, l$ les vecteurs $v_i(y)$ relèvements des vecteurs canoniques $E_i$ de $\mathbb{R}^l \times 0 = T_x X$ dans cette nouvelle distribution par la formule

$$v_i(y) = \mathcal{D}_{XY}(y) \cap \pi_{XY*y|}^{-1}(E_i), \quad \forall i = 1, \ldots, l.$$

La preuve se conclut en observant que, encore grâce au lemme précédent, l'application

$$\tilde{\mathcal{D}}_{XY} : T_{XY} \to \mathbb{V}_l(\ker \rho_{XY*}), \qquad \tilde{\mathcal{D}}_{XY}(y) = \big(v_1(y), \ldots, v_l(y)\big),$$

vérifie

$$\lim_{y\to x} v_i(y) = E_i \quad \text{et} \quad \lim_{y\to x} \tilde{\mathcal{D}}_{XY}(y) = (E_1, \ldots, E_l). \qquad \square$$

THÉORÈME 3. – *Soient $\mathcal{X} = (A, \Sigma)$ un espace stratifié $(c)$-régulier, $X$ une strate de $A$ et $\mathcal{F} = \{(\pi_Y, \rho_Y) : T_Y \to Y \times [0, \infty[\}_Y$ un système de données de contrôle de $A$.*

*Pour tout champ de vecteurs $C^1$ $\xi_X$ sur $X$, il existe un champ de vecteurs stratifié $\xi = \{\xi_Y\}_{Y \geqslant X}$ défini sur un voisinage $T_X$ de $X$ qui prolonge $\xi_X$ de manière continue et $(\pi, \rho)$-contrôlée.*

*Preuve.* – Avec les nouvelles définitions des vecteurs $v_i$, la construction du champ est formellement identique à celle du théorème 2. Il suffit donc d'observer que le champ final $\xi$ ainsi obtenu est de plus contrôlé par rapport aux fonctions distance $\{\rho_Y\}_{Y \geqslant X}$.

En fait, dans l'étape 1, $\forall Y > X$ et $\forall y \in T_Y(1/2)$ on a

$$(*): \qquad \rho_{XY*}(\xi_{XY}) = \sum_x \rho_{XY*y}\big(\xi_{U_x \cap Y}(y)\big) = 0$$

car par construction chaque $\xi_{U_x \cap Y}(y) \in \ker \rho_{XY*y}$.

D’autre part, dans l’étape 2 *cas* (c), pour tout $z \in T_{XZ} \cap T_{YZ}(\geqslant 1/2)$ on a encore :

$$\begin{aligned}\rho_{XZ*}\big(\xi(z)\big) &= \rho_{XZ*}\big(\alpha(z)\xi_{XZ}(z) + \beta(z)\xi_{YZ}(z)\big)\\ &= \alpha(z)\rho_{XZ*}\big(\xi_{XZ}(z)\big) + \beta(z)\rho_{XY*}\big(\pi_{YZ*}\xi_{YZ}(z)\big) = 0,\end{aligned}$$

car grâce à la propriété $(*)$ ci-dessus

$$\rho_{XZ*}\big(\xi_{XZ}(z)\big) = 0 \quad \text{et} \quad \rho_{XY*}\big(\pi_{YZ*}\xi_{YZ}(z)\big) = \rho_{XY*}\big(\xi_{XY}(z)\big) = 0. \qquad \square$$

*Remarque* 1. – Le prolongement peut être obtenu globalement sur $A$ tout entier si le champ est donné sur des strates de profondeur maximale.

*Remarque* 2. – En ce qui concerne les flots, la condition de $\rho$-contrôle permet d’obtenir que l’existence d’un flot global pour le champ $\xi_X$ implique l’existence d’un flot global $\Phi = \bigcup_{Y \geqslant X} \Phi_Y$ du champ relevé $\xi = \bigcup_{Y \geqslant X} \xi_X$ [9,23]. On obtient de plus qu’un tel flot $\Phi : T_X \times \mathbb{R} \to T_X$ est une application continue. Précisons aussi que la condition de contrôle des champs relevés est suffisante pour obtenir une telle continuité des flots relevés sans nécessiter d’hypothèse sur leur continuité [12].

## 5. La distribution canonique globale $\mathcal{D}_X$

Dans ce paragraphe, nous montrons que les méthodes de partition de l’unité développées au §3 pour recoller les champs de vecteurs relèvements continus contrôlés (définis dans la distribution canonique locale) se réappliquent convenablement et permettent de définir une *distribution canonique globale* donnant une formulation plus simple et naturelle du théorème de relèvement continu.

Après avoir considéré le cas des stratifications $(c)$ (et donc $(b)$-) régulières, nous considérons le cas des stratifications $(w)$-régulières [31] et lipschitziennes [21] (lesquelles n’admettent pas nécessairement un S.D.C.) et nous définissons également pour ces types de stratification une distribution canonique globale.

THÉORÈME 4. – *Soient $\mathcal{X} = (A, \Sigma)$ un espace stratifié $(c)$-régulier de support un fermé $A$ d’une variété $C^1$ $M$ et $\mathcal{F} = \{(\pi_X, \rho_X) : T_X \to X \times \mathbb{R}\}_{X \in \Sigma}$ un S.D.C. de $\mathcal{X}$.*

*Pour toute strate $X \in \Sigma$, il existe une application stratifiée $\mathcal{D}_X = \{\mathcal{D}_{XY}\}_{Y \geqslant X}$*

$$\mathcal{D}_X : T_X \to \mathbb{G}_l(TM), \quad \textit{où } l = \dim X$$

*définie sur un voisinage stratifié $T_X = \bigcup_{Y \geqslant X} T_{XY}$ de $X$ à valeurs dans la grassmannienne $\mathbb{G}_l(TM)$ et telle que* :

(i) *$\mathcal{D}_X$ est continue sur $T_X$* ;

(ii) *$\mathcal{D}_{XX}(x) = T_x X$ pour tout $x \in X$* ;

(iii) *$\mathcal{D}_{XY}$ est un sous-fibré de* $\ker \rho_{XY*}$, $\forall Y \geqslant X$ ;

(iv) *$T_y Y = \mathcal{D}_{XY}(y) \oplus \ker \pi_{XY*y}$ est une somme directe $\forall Y \geqslant X$ et $\forall y \in T_{XY}$* ;

(v) *la restriction $\pi_{XY*y|} : \mathcal{D}_{XY}(y) \to T_x X$ est un isomorphisme* (*où* $x = \pi_X(y)$) ;

(vi) *pour tout champ de vecteurs $C^1$ $\xi_X$ défini sur $X$, la formule*

$$\xi_Y(y) = \mathcal{D}_{XY}(y) \cap \pi^{-1}_{XY*y}\big(\xi_X(x)\big), \quad \textit{où } x = \pi_X(y),$$

*définit un champ de vecteurs stratifié $\xi_{T_X} = \{\xi_Y\}_{Y \geqslant X}$ relèvement continu controlé de $\xi_X$ sur $T_X = \bigcup_{Y \geqslant X} T_{XY}$.*

*Preuve.* – Pour tout $X < Y$, considérons la distribution $Q_{XY}$ définie par

$$Q_{XY} : T_{XY} \to \mathbb{G}_l(\ker \rho_{XY*}), \qquad Q_{XY}(y) = p_{\sigma_y}(T_x X)$$

où $x = \pi_{XY}(y)$, $\sigma_y = \ker \rho_{XY*y} = T_y \rho^{-1}_{XY}(\rho_{XY}(y))$ et $p_{\sigma_y} : \mathbb{R}^n \to \sigma_y$ est la projection orthogonale sur $\sigma_y$. Comme $X < Y$ est $(c)$-régulier on a $\lim_{y \to x'} \sigma_y \supseteq T_{x'} X$, et on en déduit évidemment la continuité de $Q_{XY}$ en tout point de $X$. Alors quitte à rétrécir les rayons des tubes $\{T_X\}_{X \in \Sigma}$ du S.D.C. on peut supposer que $\forall y \in T_X$ la restriction $p_{\sigma_y | T_x X} : T_x X \to \sigma_y$ est injective et donc $\dim Q_{XY}(y) = \dim X = l$.

Soit $Z > Y$ une troisième strate adjacente à $X$. De la $(c)$-régularité de $Y < Z$, de même que pour $X < Y$ on a $\lim_{z \to y} Q_{YZ}(z) \supseteq T_y Y$ $(\forall y \in T_{XY})$ et de plus, en notant

$$\widetilde{Q_{XY}}(z) = p_{Q_{YZ}(z)}\big(Q_{XY}(y)\big) \quad \text{où} \begin{cases} y = \pi_{YZ}(z) \\ \text{et} \\ p_H = \text{projection orthogonale sur } H \end{cases}$$

on déduit également la continuité de $\widetilde{Q_{XY}}$ en tout point de $T_{XY}$ : $\lim_{z\to y}\widetilde{Q_{XY}}(z)=Q_{XY}(y)$.

Fixons une métrique riemannienne sur $M$ et considérons la "fonction distance" $\delta$ entre deux espaces vectoriels $U$ et $V$ d'un même $T_xM$ :

$$\delta(U,V)=\sup_{\substack{u\in U\\ ||u||=1}}\inf_{v\in V}\|u-v\|$$

avec laquelle on a $U\subseteq V\Longleftrightarrow\delta(U,V)=0$.

De manière similaire au théorème 2 (de relèvement continu) il existe un voisinage ouvert $W$ de $T_{XY}$ dans $T_{XY}\cup T_{YZ}$, tel que si $x=\pi_{XY}(y)=\pi_{XZ}(z)$,

$$W\subseteq\left\{z\in T_{YZ}\cap T_{XZ}\mid\delta\left(\widetilde{Q_{XY}}(z),Q_{XY}(y)\right)<d(y,x)\right\}$$

et quitte à rétrécir $T_Y$ on peut supposer $T_{YZ}\subseteq W$. De ceci nous déduisons la continuité de la restriction $\widetilde{Q_{XY}}_{|T_{YZ}}$ : $\lim_{z\to x}\widetilde{Q_{XY}}_{|T_{YZ}}(z)=T_xX$, $\forall x\in X$.

De même qu'au théorème 2 (§3), étant donnée une partition de l'unité relative au recouvrement ouvert $\{V_1,V_2\}$ de $T_{XZ}$,

$$V_1=T_{XZ}(1)-\overline{T_{YZ}(1/2)},\qquad V_2=T_{XZ}(1)\cap T_{YZ}(1)$$

(figures 1 et 2), les deux distributions continues

$$Q_{XZ}:V_1\to\mathbb{G}_l(\ker\rho_{XZ*})\quad\text{et}\quad\widetilde{Q_{XY}}:V_2\to\mathbb{G}_l(\ker\rho_{XZ*})$$

peuvent être recollées par la partition de l'unité $\{\alpha,\beta\}$ afin de définir une distribution finale stratifiée $\mathcal{D}_X:T_X\to\mathbb{G}_l$ qui vérifie évidemment les conditions (i), (ii) et (iii).

A ce propos, nous précisons seulement que la partition de l'unité sur les deux espaces vectoriels $Q_{XZ}(z)$ et $\widetilde{Q_{XY}}(z)$ de même dimension $l=\dim X$ peut être faite le long de l'angle minimum entre eux orienté et linéairement reparamétré en $[0,1]$, ou bien le long de l'arc géodesique dans la variété grassmannienne $\mathbb{G}_l(\ker\rho_{XZ*})$, car $Q_{XZ}(z)$ et $\widetilde{Q_{XY}}(z)$ sont très proches au voisinage de $X$ (ces deux méthodes semblent être équivalentes).

Parce que la distribution finale $\mathcal{D}_X$ vérifie les conditions (i), (ii) et (iii), il est facile d'observer que pour tout champ de vecteurs $\xi_X$ sur $X$ et pour tout $z \in T_X$ en notant $x = \pi_X(z)$, l'intersection transversale entre $\mathcal{D}_X(z)$ et la fibre $\pi^{-1}_{X*z}(\xi_X(x))$ détermine un vecteur unique

$$\xi_{T_X}(z) = \mathcal{D}_X(z) \cap \pi^{-1}_{X*z}\big(\xi_X(x)\big)$$

tel que $\xi_{T_X}$ soit un relèvement continu contrôlé du champ initial $\xi_X$. $\square$

Le théorème 5 est l'analogue du théorème 4 pour des stratifications $(w)$- et $(L)$-régulières.

THÉORÈME 5. – *Soient $\mathcal{X}$ un espace stratifié $(w)$-régulier (resp. lipschitzien) de support un fermé $A$ d'une variété $C^2$ $M^n$ et $\mathcal{F} = \{\pi_X : T_X \to X\}_{X\in\Sigma}$ une famille de projections compatibles de $\mathcal{X}$.*

*Pour toute strate $X \in \Sigma$ il existe une application stratifiée $\mathcal{D}_X = \{\mathcal{D}_{XY}\}_{Y\geqslant X}$*

$$\mathcal{D}_X : T_X \to \mathbb{G}_l(TM), \quad \textit{où } l = \dim X$$

*définie dans un voisinage stratifié $T_X = \bigcup_{Y\geqslant X} T_{XY}$ de $X$, à valeurs dans la grassmannienne $\mathbb{G}_l(TM)$, et telle que :*

(i) *$\mathcal{D}_X$ est rugueuse (resp. lipschitzienne) sur $T_X$ ;*
(ii) *$\mathcal{D}_{XX}(x) = T_xX$ pour tout $x \in X$ ;*
(iii) *$\mathcal{D}_{XY}$ est un sous-fibré du fibré tangent $TY$ à la strate $Y$, $\forall Y \geqslant X$ ;*
(iv) *$T_yY = \mathcal{D}_{XY}(y) \oplus \ker \pi_{XY*y}$ est une somme directe $\forall Y \geqslant X$ et $\forall y \in T_{XY}$ ;*
(v) *la restriction $\pi_{XY*y|} : \mathcal{D}_{XY}(y) \to T_xX$ est un isomorphisme $(x = \pi_X(y))$ ;*
(vi) *pour tout champ de vecteurs $\xi_X$ sur $X$, la formule*

$$\xi_Y(y) = \mathcal{D}_{XY}(y) \cap \pi^{-1}_{XY*y}\big(\xi_X(x)\big), \quad \textit{où } x = \pi_X(y),$$

*définit un champ de vecteurs stratifié $\xi_{T_X} = \{\xi_Y\}_{Y\geqslant X}$ relèvement rugueux (resp. lipschitzien) de $\xi_X$ sur $T_X = \bigcup_{Y\geqslant X} T_{XY}$.*

*Preuve.* – La démonstration de Mather [12] utilisée pour construire un S.D.C. pour des stratifications $(b)$-régulières peut être refaite pour des stratifications $(w)$-régulières (resp. lipschitziennes) de manière formellement analogue afin d'obtenir une famille d'applications $\mathcal{F} = \{(\pi_X, \rho_X) : T_X \to X \times \mathbb{R}\}_{X\in\Sigma}$ ayant toutes les propriétés d'un S.D.C. sauf éventuellement la submersivité de chaque fonction $(\pi_X, \rho_X) : T_X \to$

$X \times \mathbb{R}$.[2] Cependant, dans le cas $(w)$-régulier (resp. lipschitzien) on peut obtenir, au lieu de la submersivité de $(\pi_X, \rho_X)$, la (plus faible) submersivité de $\pi_X : T_X \to X$.

Si nous considérons maintenant, pour tout couple de strates $X < Y$, la distribution

$$Q_{XY} : T_{XY} \to \mathbb{G}_l(TY), \qquad Q_{XY}(y) = p_{\tau_y}(T_x X)$$

où pour tout $y \in T_{XY}$, $x = \pi_{XY}(y)$ et $\tau_y = T_y Y$, alors à partir de la $(w)$-régularité (resp. de la "lipschitzianité") de $X < Y$, on voit facilement que la distribution $Q_{XY}$ est rugueuse [31] (resp. lipschitzienne [21]). La preuve du théorème peut alors être déduite de la même manière qu'au théorème 4 avec comme seules modifications le fait de considérer chaque fois l'espace $\tau_y = T_y Y$ au lieu du précédent $\sigma_y = \ker \rho_{XY*y}$ et de recoller dans le cas de trois strates $Z > Y > X$ les deux distributions $Q_{XZ}(z)$ et $\widetilde{Q_{XY}}(z) = p_{\tau_z}(p_{\tau_y}(T_x X))$ par des partitions de l'unité rugueuses (resp. lipschitziennes). $\square$

DÉFINITION 1. – *Soit $\Sigma$ une stratification* $(c)$*-régulière* (*resp.* $(w)$*-régulière ou bien lipschitzienne*) *contenue dans une variété $M$. Pour toute strate $X \in \Sigma$, chaque application $\mathcal{D}_X : T_X \to \mathbb{G}_l(TM)$ vérifiant les propriétés dans l'énoncé du théorème* 4 (*resp. au théorème* 5) *sera dite "la distribution canonique globale déterminée par X dans $T_X$" et le champ relevé $\xi_{T_X}$ défini par la formule* (vi) *est dit "le relèvement canonique du champ $\xi_X$ sur $T_X$".*

Concluons ce paragraphe en observant que le choix des familles de distributions canoniques $\{\mathcal{D}_X\}_{X\in\Sigma}$ peut être amélioré en introduisant la notion suivante de compatibilité :

DÉFINITION 2. – *Nous dirons que la famille de distributions canoniques globales $\{\mathcal{D}_X : T_X \to \mathbb{G}_l(TM)\}_{X\in\Sigma}$, vérifie la condition de multicompatibilité si pour tout triplet de strates adjacentes $Z > Y > X$, on a : $\mathcal{D}_{XZ}(z) \subseteq \mathcal{D}_{YZ}(z)$, $\forall\, z \in T_{XZ} \cap T_{YZ}$ éventuellement en réduisant les rayons des tubes $\{T_X\}_{X\in\Sigma}$. Cette notion avec la proposition ci-dessous seront utilisées dans* [16].

[2] Si $\mathcal{X}$ est $(w)$-régulier ou bien lipschitzien et avec toutes les strates analytiques alors les $(\pi_X, \rho_X)$ peuvent de nouveau être obtenues submersives car dans ce cas $\mathcal{X}$ est de plus $(b)$-régulier [29].

PROPOSITION. – *Les familles de distributions canoniques exhibées aux théorèmes* 4 *et* 5 *peuvent être obtenues avec de plus la condition de multicompatibilité.*

*Preuve.* – C'est immédiat car, avec les mêmes notations qu'au théorème 4, pour tout $z \in T_{XZ} \cap T_{YZ}(1/2)$, on a par construction

$$\mathcal{D}_{XZ}(z) = \widetilde{Q_{XY}}(z) = p_{Q_{YZ}(z)}\big(Q_{XY}(y)\big) \subseteq Q_{YZ}(z) = \mathcal{D}_{YZ}(z). \qquad \square$$

Pour les stratifications admettant un système de données de contrôle, même si la condition de contrôle d'un champ de vecteurs relevé $\xi$ assure la continuité de son flot intégral $\Phi$, ceci n'implique pas la différentiabilité de $\Phi$ [9] (exemple de la famille des quatre droites). La notion de distribution canonique ici introduite a permis aux auteurs de démarrer l'étude de l'amélioration de la régularité des flots $\Phi$ des relèvements continus contrôlés de champs de vecteurs et celle d'applications stratifiées plus générales $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$, en définissant une notion de semi-différentiabilité, régularité située à mi-chemin entre la continuité et la différentiabilité [14–16], et dont l'utilité a déjà été vérifiée dans différentes applications [4,13–16].

## RÉFÉRENCES


[1] Bekka K., Sur les propriétés topologiques et métriques des espaces stratifiés, Thèse, Université de Paris-Sud, Orsay, 1988.

[2] Bekka K., $(C)$-régularité et trivialité topologique, in : Mond D.M.Q., Montaldi J. (Eds.), Singularity Theory and its Applications, Warwick 1989, Part I, Lecture Notes in Math., Vol. 1462, Springer, Berlin, 1991, pp. 42–62.

[3] Bekka K., Isotopy theorem, Preprint, University of Liverpool, 1991.

[4] Bekka K., Murolo C., Homology of stratified spaces, Preprint.

[5] Bekka K., Trotman D., Weakly Whitney stratified sets, in : Bruce J.W., Tari F. (Eds.), Real and Complex Singularities, São Carlos, 1998, Notes Math., Vol. 412, Chapman & Hall/CRC Res., Boca Raton, FL, 2000, pp. 1–15.

[6] Damon J.N., Topological triviality and versality for subgroups of $\mathcal{A}$ and $\mathcal{K}$, Mem. AMS 75 (389) (1988).

[7] du Plessis A., Continuous controlled vector fields, in : Bruce J.W., Mond D.M.Q. (Eds.), Singularity Theory, Proceedings of the European Singularities Conference held in honor of C.T.C. Wall on the occasion of his 60th birthday, Liverpool, 1996, London Math. Soc. Lecture Note Series, Vol. 263, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999, pp. 189–197.

[8] du Plessis A., Wall C.T.C., The Geometry of Topological Stability, London Mathematical Society Monographs New Series 9, Oxford Science Publications, 1995.
[9] Gibson C.G., Wirthmüller K., du Plessis A., Looijenga E.J.N., Topological Stability of Smooth Mappings, Lecture Notes in Math., Vol. 552, Springer Verlag, 1976.
[10] Hamm H., On stratified Morse theory, Topology 38 (1998) 427–438.
[11] Mather J., Stratifications and mappings, in : Peixoto M. (Ed.), Dynamical Systems, Academic Press, New York, 1971, pp. 195–223.
[12] Mather J., Notes on Topological Stability, Mimeographed notes, Harvard University, 1970.
[13] Murolo C., du Plessis A., Trotman D., Stratified transversality by isotopy, Preprint.
[14] Murolo C., Trotman D., Semidifferentiable stratified morphisms, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 329 (1999) 147–152.
[15] Murolo C., Trotman D., Horizontally-$C^1$ controlled stratified maps and Thom's first isotopy theorem, C. R. Acad. Sci. Paris, to appear.
[16] Murolo C., Trotman D., Semidifferentiability of stratified morphisms and Whitney's fibering conjecture, Preprint.
[17] Murolo C., Semidifférentiabilité, Transversalité et Homologie de Stratifications Régulières, Thesis, University of Provence, 1997.
[18] Murolo C., Diffeomorphisms lying in one parameter groups and extension of stratified homeomorphisms, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., to appear.
[19] Noirel L., Plongements Sous-Analytiques d'Espaces Stratifiés de Thom-Mather, Thesis, University of Provence, 1996.
[20] Noirel L., Trotman D., Subanalytic and semialgebraic realisations of abstract stratified sets, in: Delzell C.N., Madden J.J. (Eds.), Real Algebraic Geometry and Ordered Structures, Contemporary Mathematics, Vol. 253, American Mathematical Society, Providence, 2000, pp. 203–207.
[21] Parusiński A., Lipschitz stratifications, in: Uhlenbeck K. (Ed.), Global Analysis in Modern Mathematics, Proceedings of a Symposium in Honour of Richard Palais' Sixtieth Birthday, Publish or Perish, Houston, 1993, pp. 73–91.
[22] Schwartz M.-H., Champs Radiaux sur une Stratification Analytique, Travaux en cours, Hermann, Paris, 1991.
[23] Shiota M., Piecewise linearization of real analytic functions, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 20 (1984) 724–792.
[24] Shiota M., Geometry of Subanalytic and Semialgebraic Sets, Birkhaüser, Boston, 1997.
[25] Simon S., Champs totalement radiaux sur une structure de Thom–Mather, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 45 (5) (1995) 1423–1447.
[26] Thom R., Local topological properties of differentiable mappings, in: Colloquium on Differential Analysis, Tata Institute, Bombay 1964, Oxford University Press, London, New York, 1964, pp. 191–202.
[27] Thom R., Ensembles et morphismes stratifiés, Bull. Amer. Math. Soc. 75 (1969) 240–284.
[28] Trotman D.J.A., Geometric versions of Whitney regularity for smooth stratifications, Ann. Ec. Norm. Sup. Paris, Série IV 12 (1979) 453–463.

[29] Trotman D., Comparing regularity conditions on stratifications, in: Singularities, Arcata 1981, Proc. Sympos. Pure Math. 40 (A.M.S.), 1983, pp. 575–586.
[30] Trotman D.J.A., Stability of transversality to a stratification implies Whitney $(a)$-regularity, Inventiones Math. 50 (1979) 273–277.
[31] Verdier J.-L., Stratifications de Whitney et théorème de Bertini–Sard, Inventiones Math. 36 (1976) 295–312.
[32] Whitney H., Local properties of analytic varieties, in: Differential and Combinatorial Topology, Princeton Univ. Press, 1965, pp. 205–244.