Description de ma recherche récente.

1 Equations cinétiques.

Ce sont des équations apparaissant dans de nombreux domaines de physique mathématique, comme les plasmas, les gaz raréfiés, la physique de la matière condensée... Leur inconnue n'est pas la densité $\rho(t,x)$ dans l'espace physique, mais une densité $f(t,x,v)$ dans l'espace des phases. Elles s'écrivent

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = Q(f), \tag{1.1}$$

où Q est un opérateur (intégral, différentiel, ...) agissant sur la variable v.

L'équation de Boltzmann discrète.

L'équation de Boltzmann, écrite en 1872, est une équation du type (1.1) où $(t,x,v) \in [0,+\infty[\times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ et l'opérateur Q est l'opérateur de Boltzmann, intégral en vitesses. Le problème de Cauchy correspondant, i.e. avec une condition initiale donnée, a été résolu par R. DiPerna et P.-L. Lions en 1989 à l'aide de solutions renormalisées. Un point clé de leur démonstration est l'utilisation de lemmes de moyenne, qui permet de gagner en régularité lorsqu'on considére des moyennes en vitesses de la fonction de distribution f. Simultanément, de nombreuses recherches ont eu lieu sur la résolution de l'équation de Boltzmann discrète, approximation de l'équation de Boltzmann pour une fonction de distribution ne dépendant que d'un nombre fini de vitesses $(v_i)_{1\leq i\leq p}$. Si $f_i(t,x)$ désigne la fonction de distribution de vitesse i, le système à résoudre s'écrit

$$\partial_t f_i + v_i \cdot \nabla_x f_i = Q_i(f), \quad 1 \leq i \leq p, \tag{1.2}$$

où l'opérateur de collisions $(Q_i)_{1\leq i\leq p}$ est algébrique. On s'attend à ce que plus le nombre de vitesses considérées soit grand, meilleure soit l'approximation. Les résultats théoriques sur la résolution de l'équation de Boltzmann discrète depuis les années 1980 ont essentiellement porté sur le cas unidimensionnel en espace. En collaboration avec Leif Arkeryd, nous avons récemment obtenu des résultats d'existence de solutions stationnaires du modèle de Broadwell en deux dimensions d'espace. C'est un des modèles les plus simples, à 4 vitesses, d'équation de Boltzmann discrète. Nous avons ensuite obtenu des résultats d'existence de solutions stationnaires dans le plan d'équations de Boltzmann discrètes à nombre quelconque de vitesses pointant dans le même demi-espace, enfin d'équations de Boltzmann discrètes génériques dans le plan. Les lemmes de moyenne utilisés dans la résolution de l'équation de Boltzmann continue, ne sont pas exacts dans le cadre d'un nombre fini de vitesses. A leur place nous avons eu recours à de la compacité dans l'espace L^1 des fréquences de collisions, ainsi qu'à la détermination de "bonnes" i-caractéristiques le long desquelles f_i est bornée. Le problème de Cauchy, i.e. d'évolution avec une condition initiale donnée, et en dimension deux d'espace pour l'équation de Boltzmann discrète, est en cours de résolution.

2 Equations de Vlasov pour les plasmas de fusion.

En collaboration avec l'IRFM (Institut de Recherche de la Fusion par confinement Magnétique) du CEA de Cadarache, je travaille sur des modèles utilisés pour étudier les plasmas du coeur des tokamaks, où s'effectuent des expériences sur le phénomène de la fusion contrôlée. Il s'agit d'équations de Vlasov pour chaque espèce (ions et électrons), couplées par une équation d'électro-neutralité. En 2020, nous avons constitué un groupe de travail entre l'IRFM et mon laboratoire de recherche I2M (Institut de Mathématiques de Marseille), en vue d'étudier l'influence des collisions qui, bien que faibles, pourraient avoir à être prises en compte. Il est toujours en cours.