CMA CM (chapitre 6)

lundi 16 novembre 2020 07:58

Th 8 **Preuve** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Mq $|||A|||_2 = \sqrt{\rho({}^tAA)}$.

Par déf, $|||A|||_2 = \max_{v \neq \vec{0}} \dfrac{\|Av\|_2}{\|v\|_2}$

- $\forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$, on a $\left(\dfrac{\|Av\|_2}{\|v\|_2}\right)^2 = \dfrac{{}^t(Av)(Av)}{{}^tv\,v} = \dfrac{{}^tv({}^tA\,A)v}{{}^tv\,v} = R_{{}^tAA}(v)$

- Ainsi, $|||A|||_2^2 = \left(\max_{v \neq \vec{0}} \dfrac{\|Av\|_2}{\|v\|_2}\right)^2 = \max_{v \neq \vec{0}} \left(\dfrac{\|Av\|_2}{\|v\|_2}\right)^2 = \max_{v \neq \vec{0}} R_{{}^tAA}(v)$

$\overset{\text{Lemme 3}}{=} \rho({}^tA\,A)$

donc $|||A|||_2 = \sqrt{\rho({}^tAA)}$.

Ex Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, $S_p({}^tA\,A) = \{16 ; 1\}$

donc $|||A|||_2 = \sqrt{\rho({}^tAA)} = \sqrt{16} = 4$.

Th 10 **Preuve**

1) $\Rightarrow$ 3) : On suppose $A^k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0_n$.

Soit $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{C}^n$ et $|||.|||$ la norme subordonnée associée.

Soit $v \in \mathbb{C}^n$. Mq $A^k v \xrightarrow[k \to +\infty]{} \vec{0}$.

* Si $v = \vec{0}$, $A^k v = \vec{0} \xrightarrow[k \to +\infty]{} \vec{0}$

* Si $v \neq \vec{0}$, alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{\|A^k v\|}{\|v\|} \leq |||A^k|||$

donc $0 \leq \|A^k v\| \leq \underbrace{\overbrace{|||A^k|||}^{\xrightarrow[k \to +\infty]{} 0}\,\|v\|}_{\xrightarrow[k \to +\infty]{} 0}$

donc $\|A^k v\| \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$ i.e. $A^k v \xrightarrow[k \to +\infty]{} \vec{0}$

3) $\Rightarrow$ 2) : On montre l'implication par contraposée : on suppose que $\rho(A) \geq 1$, mq $\exists v \in \mathbb{C}^n$ tq $A^k v \not\xrightarrow[k \to +\infty]{} \vec{0}$.

Comme $\rho(A) \geq 1$, $\exists \lambda \in S_{p\mathbb{C}}(A)$ tq $|\lambda| \geq 1$.

Soit $v \in E_\lambda \setminus \{\vec{0}\}$. Alors $Av = \lambda v$, donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k v = \lambda^k v$,

$|\lambda| \geq 1$

et alors $A^k v = \lambda^k v \underset{k\to+\infty}{\not\longrightarrow} \vec{0}$ car $\lambda^k \underset{k\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$ car $|\lambda| \geq \cdots$
et $v \neq \vec{0}$

2) $\Rightarrow$ 4) : On suppose que $\rho(A) < 1$. Soit $\varepsilon > 0$ tq $\rho(A) + \varepsilon < 1$.
D'après Th 11, $\exists\, |||\cdot|||$ une norme matricielle subordonnée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tq $\underline{|||A|||} \leq \rho(A) + \varepsilon \underline{< 1}$

4) $\Rightarrow$ 1) : On suppose qu'il existe une norme matricielle subordonnée $|||\cdot|||$ tq $|||A||| < 1$. Mq $A^k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0_n$. On a $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq |||A^k||| \underset{\substack{\text{car } |||\cdot||| \\ \text{est une norme} \\ \text{matricielle}}}{\leq} \underbrace{|||A|||^k}_{\substack{\longrightarrow 0 \\ k\to+\infty \\ \text{car } |||A|||<1}}$$

donc $|||A^k||| \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (par th. d'encadrement) donc $A^k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0_n$

$\underline{\text{Ex}}$ $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}^k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ car $\rho\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}$

Déf 12

$\underline{\text{Ex}}$: • $\text{Cond}_1(A) = |||A|||_1 \; |||A^{-1}|||_1 = 33 \times 136 = 4488$

$= \text{Cond}_\infty(A)$ (car $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$)

• Si $D := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{R})$, $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

et $\text{Cond}_\infty(D) = |||D|||_\infty \; |||D^{-1}|||_\infty = 2 \times 3 = 6$

$\underline{\text{Prop 13}}$ Preuve de 2) Soit $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, mq $\text{Cond}(\lambda A) = \text{cond}(A)$.

On a $\text{Cond}(\lambda A) = |||\lambda A|||\; |||(\lambda A)^{-1}||| = |||\lambda A|||\; |||\frac{1}{\lambda} A^{-1}|||$

$= |\lambda|\; |||A||| \times \frac{1}{|\lambda|}\; |||A^{-1}|||$

$= |||A|||\; |||A^{-1}||| = \text{cond}(A)$.

3) On a $\underline{1} = |||I_n||| = |||AA^{-1}||| \underline{\leq} |||A|||\; |||A^{-1}||| = \underline{\text{cond}(A)}$.

$\underline{\text{Th 14}}$ $\underline{\text{Preuve}}$ Mq $\dfrac{\|X - X'\|}{\|X\|} \leq \text{Cond}(A) \dfrac{\|B - B'\|}{\|B\|}$

• On a $AX = B$ et $AX' = B'$ donc $A(X - X') = B - B'$

$w := B - B'$

donc $X - X' = A^{-1}(B - B')$

$\dfrac{\|A^{-1}w\|}{\|w\|} \leq |||A^{-1}|||$ $\Leftarrow$ $\|A^{-1}w\| \leq |||A^{-1}|||\; \|w\|$

Ainsi $\|X - X'\| = \|A^{-1}(B - B')\| \leq |||A^{-1}|||\; \|B - B'\|$

$$\boxed{|||A\,||| = \max_{v \neq \vec{0}} \frac{\|A^{-1} v\|}{\|v\|}}$$

• On a $B = AX$ donc $\|B\| = \|AX\| \leqslant |||A|||\ \|X\|$ donc $\frac{}{\|X\|} = \frac{}{\|B\|}$

Ainsi $\frac{\|X - X'\|}{\|X\|} \leqslant |||A^{-1}|||\ \|B - B'\| \times \frac{|||A|||}{\|B\|} = \underbrace{|||A||| \times |||A^{-1}|||}_{= \mathrm{cond}(A)} \times \frac{\|B - B'\|}{\|B\|}$