Fabien Priziac

I2M UMR 7373, Aix-Marseille Université
39, rue F. Joliot-Curie 13453 MARSEILLE CEDEX 13
✉ *fabien.priziac@univ-amu.fr*

Expériences professionnelles

depuis le 1/9/2014 **Maître de conférences**, *Aix-Marseille Université*, Marseille.
Rattaché au laboratoire I2M (UMR 7373 du CNRS)
192h d'enseignements par an

2012-2013 **Attaché Temporaire d'Enseignement et de Recherche**, *Université de Bretagne Occidentale*, Brest.
Rattaché au laboratoire LMBA (UMR 6205 du CNRS)
96h d'enseignements

2009-2012 **Doctorant contractuel**, *Université de Rennes 1*, Rennes.
Rattaché au laboratoire IRMAR (UMR 6625 du CNRS)
Missions d'enseignement : 192h sur 3 ans

Formation

2013-2014 **Post-doctorat**, *Université de Saitama (Japon)*.

2009-2012 **Doctorat Mathématiques et applications**, *Université de Rennes 1*.
Thèse intitulée "Filtration par le poids équivariante pour les variétés algébriques réelles avec action", effectuée sous la direction de Goulwen Fichou

2009 **Admission à l'Agrégation externe de Mathématiques**.

2009 **Master Mathématiques et applications**, *Université de Bretagne Occidentale*, Brest.

Publications

2021 **Products of real equivariant weight filtrations**, *manuscripta mathematica* **164** *(2021), pp 151-192, doi :10.1007/s00229-020-01178-2.*

2020 **Quotients and invariants of $\mathcal{AS}$-sets equipped with a finite group action**, *Mathematische Annalen* **377** *(2020), pp 1015-1055, doi :10.1007/s00208-020-01994-7.*

On the equivariant blow-Nash classification of simple invariant Nash germs, *Bulletin de la Société Mathématique de France* **148** *no. 2 (2020), pp 329-382, doi :10.24033/bsmf.2808.*

2016 **Equivariant zeta functions for invariant Nash germs**, *Nagoya Mathematical Journal* **222** *(2016), pp 100-136, doi :10.1017/nmj.2016.12.*

2016 **Equivariant weight filtration for real algebraic varieties with action**, *Journal of the Mathematical Society of Japan* **68** *no. 4 (2016), pp 1789-1818, doi :10.2969/jmsj/06841789.*

2015 **Cohomology and products of real weight filtrations**, *avec Thierry Limoges, Annales de l'Institut Fourier* **65** *no. 5 (2015), pp 2235-2271, doi :10.5802/aif.2987.*

2014 **Complexe de poids des variétés algébriques réelles avec action**, *Mathematische Zeitschrift* **277** *(2014), pp 63-80, doi :10.1007/s00209-013-1244-8.*

Thèse

2012 **Filtration par le poids équivariante pour les variétés algébriques réelles avec action**, *Thèse de Doctorat, Université de Rennes 1.*

Délégations

sep. 2020 - août 2021 **Délégation d'enseignement à l'Université de Rennes 1**.

fév. 2020 - août 2020 **Délégation CNRS au laboratoire IRMAR**, *Rennes.*

sep. 2019 - janv. 2020 **Délégation d'enseignement à l'Université de Rennes 1**.

sep. 2018 - août 2019 **Délégation d'enseignement à l'Université de Rennes 1**.

Activités de recherche

Membre de

depuis 2019 **Projet 80 Prime "Géométrie algébrique complexe/réelle et mécanique des matériaux" (GAMM)**.

depuis 2013 **GDRI Singularités**.

depuis 2009 **GDR Singularités et Applications**.

Organisation

juin 2019 **Co-organisateur du second workshop "Eclatement de Nash et Tour de Semple"**, *Leuven, Belgique*, 3 - 7/06/19.

fév. 2018 **Co-organisateur du workshop "Eclatement de Nash et Tour de Semple"**, *Marseille*, 5 - 9/02/18.

juin 2017 **Organisateur de la rencontre "Arcs et Singularités"**, *Marseille*, 14 - 16/06/17.

janv. 2016 **Membre du comité d'organisation de la rencontre "Chambéry-Marseille-Nice Singularités"**, *Marseille*, 4 - 6/01/16.

juin 2011 **Participation à l'organisation de la conférence "Real Algebraic Geometry"**, *Rennes*, 20 - 24/06/11.

sept. 2017 - sept. 2018 **Co-organisateur du Séminaire Géométrie, Dynamique et Topologie de l'I2M**.

sept. 2015 - juin 2017 **Co-organisateur du Séminaire Singularités de l'I2M**.

Porteur de projets

2016-2017 **Porteur du projet JCJC RACINGS (ARCs et SINGularités) soumis à l'ANR en 2016 et en 2017**.

2015-2016 **Porteur du projet de coopération internationale entre l'Université d'Aix-Marseille et l'Université de Hokkaïdô (Sapporo, Japon)**, *accord signé le 1er décembre 2016*.

Rapporteur

2020 **Rapporteur et membre du jury de la thèse de doctorat de Dewi Gleuher, intitulée "Hypercohomologie bigraduée des variétés algébriques réelles", dirigée par Johannes Huisman et soutenue le 7 février 2020 à l'Université de Bretagne Occidentale de Brest**.

Encadrements

2018 **Encadrement des stages de Master 2 Mathématiques Fondamentales de Ngoc Ha Nguyen et Hong Cong Nguyen sur le thème des Fonctions Régulues**, *Aix-Marseille Université*.

Activités d'enseignement au cours des six dernières années

2020-2021 Délégation d'enseignement (192h eq. TD) à l'Université de Rennes 1.

- CM de Calcul Matriciel en L3 Mathématiques (54h eq. TD).
- TD de Calcul Matriciel en L3 Mathématiques (36h).
- Cours/TD de Mathématiques 1 en L3 Sciences et Professorat des Ecoles (72h eq. TD).
- TD d'Algèbre et Géométrie 3 en L2 Mathématiques (42h).
- TD d'Algèbre en Préparation à l'Agrégation externe de Mathématiques (14h).
- Oraux blancs d'Algèbre en Préparation à l'Agrégation externe de Mathématiques (4h eq. TD).

2019-2020 Délégation d'enseignement (96h eq. TD) à l'Université de Rennes 1.

- Cours/TD de Mathématiques à l'Ecole d'Audioprothèse de Fougères, en 1ère année (30h).
- Cours/TD de Mathématiques à l'Ecole d'Audioprothèse de Fougères, en 2ème année (10h).
- TD d'Algèbre et Géométrie 3 en L2 Mathématiques (42h).
- TD d'Algèbre en Préparation à l'Agrégation externe de Mathématiques (12h).
- Oraux blancs d'Algèbre en Préparation à l'Agrégation externe de Mathématiques (2h eq. TD).

2018-2019 Délégation d'enseignement (192h eq. TD) à l'Université de Rennes 1.

- Cours/TD de Mathématiques à l'Ecole d'Audioprothèse de Fougères, en 1ère année (30h).
- Cours/TD de Mathématiques à l'Ecole d'Audioprothèse de Fougères, en 2ème année (10h).
- CM de Mathématiques 1 en L1 Informatique-Electronique (30h eq. TD).
- TD de Mathématiques 1 en L1 Informatique-Electronique (40h).
- TD d'Algèbre et Géométrie 3 en L2 Mathématiques (42h).
- TD d'Analyse 4 en L2 Mathématiques (24h).
- TD d'Algèbre en Préparation à l'Agrégation externe de Mathématiques (12h).
- Oraux blancs d'Algèbre en Préparation à l'Agrégation externe de Mathématiques (4h eq. TD).

2017-2018

- Remise à niveau en mathématiques en L1 Mathématiques-Informatique (20h).
- CM d'Introduction à l'analyse en L1 Mathématiques-Informatique (36h eq. TD).
- TD d'Introduction à l'analyse en L1 Mathématiques-Informatique (36h).
- CM d'Analyse et structures algébriques en L2 Informatique (36h eq. TD).
- TD d'Analyse et structures algébriques en L2 Informatique (36h).
- CM de Calcul intégral en L2 Mathématiques (36h eq. TD).
- CM d'Algèbre linéaire 2 en L2 Mathématiques (36h eq. TD).

• CM d'Introduction à la géométrie algébrique réelle en M2 Mathématiques Fondamentales (37,5h eq. TD).

• Encadrement de deux stages de M2 autour des "Fonctions régulues".

• Encadrement de deux TEM de L2 : "L'algorithme du PageRank de Google" et "Théorie des graphes", *Aix-Marseille Université*, Aix-en-Provence/Marseille.

2016-2017 • CM de Calcul intégral en L2 Mathématiques (36h eq. TD).

• CM d'Algèbre linéaire 2 en L2 Mathématiques (36h eq. TD), *Aix-Marseille Université*, Aix-en-Provence.

2015-2016 • Remise à niveau en mathématiques en L1 Mathématiques-Informatique (20h).

• CM d'Introduction à l'analyse en L1 Mathématiques-Informatique (36h eq. TD).

• TD d'Introduction à l'analyse en L1 Mathématiques-Informatique (36h).

• CM d'Analyse et structures algébriques en L2 Informatique (36h eq. TD).

• TD d'Analyse et structures algébriques en L2 Informatique (36h).

• CM de Calcul intégral en L2 Mathématiques (36h eq. TD).

• CM d'Algèbre linéaire 2 en L2 Mathématiques (36h eq. TD), *Aix-Marseille Université*, Aix-en-Provence.

Modulations de services d'enseignement

2016-2017 **Modulation de 64h pour les maîtres de conférences nouvellement recrutés (report de la modulation de 2ème année)**.

2014-2015 **Modulation de 64h pour les maîtres de conférences nouvellement recrutés (1ère année)**.

Exposés

Conférences

2019 **“Introduction à la géométrie algébrique réelle et application à l’optimisation polynomiale”**.

- Rencontres du GDR GDM, *Cachan*, 13/11/19.
- Rencontres Mathématiques-Mécanique du Congrès Français de Mécanique, *Brest*, 21/08/19.

“Quotients and invariants of $\mathcal{AS}$-sets equipped with a finite group action”.

- Real and complex singularities in Cargèse, *Cargèse*, 01/05/19.

2018 **“Quotient géométrique d’un ensemble algébrique réel par l’action d’un groupe fini”**.

- Journées de l’équipe Analyse, Géométrie, Topologie de l’I2M, *Carry-le-Rouet*, 15/06/18.

“Basics on toric varieties : one ring to rule them all”, *(avec Jean-Baptiste Campesato)*.

- Workshop “On Nash Blow-up and Semple Tower”, *Marseille*, 06/02/18.

2017 **“Sur la classification des germes de fonctions analytiques réelles”**.

- Rencontre “Arcs et Singularités”, *Marseille*, 14/06/17.

2015 **“Equivariant blow-Nash equivalence and equivariant zeta functions for invariant Nash germs”**.

- Conférence “Real Singularities and Applications” dans le cadre du mois thématique “Artin Approximation and Singularity Theory”, *Marseille*, 19/02/15.

2014 **“Equivariant blow-Nash equivalence and equivariant zeta functions for invariant Nash germs”**.

- 2ème Symposium Franco-Japonais-Vietnamien sur les Singularités du GDRI Singularités, *Sapporo, Japon*, 25/08/14.
- Rencontre organisée par Satoshi Koike autour du thème des singularités, *Kobe, Japon*, 07/03/14.

2013 **“Weight filtration for real algebraic varieties and group action”**.

- 1er Symposium Franco-Japonais-Vietnamien sur les Singularités du GDRI Singularités, *Nice*, 18/09/13.

2012 **“Splitting of Nash manifolds with involutions, and additive invariants for real algebraic varieties with involutions”**.

• Mini-workshop “Topology of Real Singularities and Motivic Aspects”, *MFO, Oberwolfach, Allemagne*, 02/10/12.

“Group actions on the Nash constructible filtration”.

• Workshop “Additive Invariants in Real Algebraic and Analytic Geometry”, *Nice*, 12/04/12.

2010 **Exposé lors de la rencontre organisée par Masahiro Shiota à l’Université de Nagoya, Japon**, *26/08/10*.

Séminaires

2019 **“Quotients et invariants des ensembles $\mathcal{AS}$ munis de l’action d’un groupe fini”**.

• Séminaire de géométrie et singularités de l’IRMAR, *Université de Rennes 1*, 23/05/19.

“Quotients et invariants des ensembles symétriques par arcs munis de l’action d’un groupe fini”.

• Séminaire systèmes dynamiques et géométrie, *Université d’Angers*, 15/01/19.

2018 **“Quotients et invariants des ensembles symétriques par arcs munis de l’action d’un groupe fini”**.

• Séminaire de Géométrie et Topologie du LMBA, *Université de Bretagne Occidentale, Brest*, 30/11/18.

“Produits de filtrations par le poids équivariantes réelles”.

• Séminaire de Géométrie du LAMA, *Université de Savoie, Chambéry*, 18/1/18.

2017 **“Filtrations par le poids pour les variétés algébriques complexes et réelles”**.

• Séminaire de Géométrie Complexe de l’I2M, *Aix-Marseille Université*, 28/2/17.

2016 **“Filtration par le poids cohomologique pour les variétés algébriques réelles et produits de filtrations par le poids réelles”**.

• Séminaire de Géométrie et Topologie du LMBA, *Université de Bretagne Occidentale, Brest*, 4/3/16.

2014 **“Equivalence de Nash après éclatements équivariante et fonctions zêta équivariantes”**.

• Séminaire de Géométrie et Topologie du LMBA, *Université de Bretagne Occidentale, Brest*, 19/12/14.

• Séminaire de Singularités de l’I2M, *Aix-Marseille Université*, 2/10/14.

2013 **“Equivariant zeta functions and equivariant blow-Nash equivalence”**.

• Séminaire de Géométrie du Département de Mathématiques, *Université de Saitama, Japon*, 31/10/13.

"Filtration par le poids pour les variétés algébriques réelles et action de groupe".

• Séminaire de Géométrie du LAMA, *Université de Savoie, Chambéry*, 15/03/13.

2012 **"Filtration par le poids pour les variétés algébriques réelles et action de groupe"**.

• Séminaire de Géométrie Algébrique du LAREMA, *Université d'Angers*, 19/10/12.

• Séminaire de Singularités du LATP, *Université d'Aix-Marseille, Marseille*, 11/10/12.

• Séminaire de Géométrie et Topologie du LMBA, *Université de Bretagne Occidentale, Brest*, 28/09/12.

"Suites spectrales et homologie équivariante".

• Séminaire Pampers des jeunes chercheurs en géométrie, *Université de Rennes 1*, 17/01/12.

2011 **"Filtration par le poids équivariante pour les variétés algébriques avec action de groupe"**.

• Séminaire interne de géométrie du laboratoire IRMAR, *Université de Rennes 1*, 06/04/11.

"Filtration par le poids pour les variétés algébriques réelles".

• Séminaire Pampers des jeunes chercheurs en géométrie, *Université de Rennes 1*, 13/01/11.

2010 **Exposés au séminaire organisé par Toshizumi Fukui**, *Université de Saitama, Japon*, 06/2010 - 08/2010.

2009 **"Le groupe de Grothendieck des variétés algébriques"**.

• Séminaire Pampers des jeunes chercheurs en géométrie, *Université de Rennes 1*, 07/10/09.

Travaux de recherche

Mots-clés : Géométrie algébrique réelle, singularités, actions de groupes algébriques, invariants, topologie algébrique, filtrations par le poids, classification des germes de fonctions analytiques réelles, fonctions zêta, optimisation polynomiale, applications à la mécanique des matériaux.

Contexte

Mes travaux portent sur l'étude des points réels des variétés algébriques réelles i.e. définies à l'aide d'équations polynomiales à coefficients réels. Une partie des résultats classiques et cruciaux de la géométrie algébrique sur corps algébriquement clos, à l'image du Nullstellensatz de Hilbert ou du théorème de Chevalley, ne sont pas vrais en géométrie algébrique réelle. La géométrie algébrique réelle requiert ainsi des méthodes et des résultats qui lui sont propres. Mais l'existence d'une relation d'ordre totale sur le corps des réels enrichit également la géométrie des variétés algébriques réelles : la géométrie algébrique réelle inclut notamment l'étude des ensembles semi-algébriques i.e. définis à l'aide d'inégalités polynomiales.

Je m'intéresse plus particulièrement aux variétés algébriques réelles singulières, objets pour lesquels la géométrie différentielle ne peut être appliquée. L'étude des singularités nécessite donc des techniques spécifiques. Mentionnons par exemple le théorème dit de résolution des singularités de H. Hironaka ([11]), valable pour les variétés algébriques complexes comme pour les variétés algébriques réelles.

Un outil classique de l'étude des variétés algébriques complexes singulières est également la structure de Hodge mixte introduite par P. Deligne en 1974 ([5]). En particulier, cette structure induit une filtration, dite par le poids, sur la cohomologie des variétés algébriques complexes : les propriétés de cette filtration (notamment son additivité) permettent de comprendre la géométrie d'une variété algébrique complexe singulière donnée à partir de la topologie de variétés lisses compactes (en utilisant compactifications et résolutions des singularités).

Une partie de mes travaux s'inscrit dans le cadre de l'étude d'un analogue réel de cette filtration par le poids, introduit sur les variétés algébriques réelles par B. Totaro en 2002 dans [26] (en empruntant une autre voie que celle suivie par Deligne : il n'y a en effet pas de structure similaire à la structure de Hodge mixte dans le monde réel) et développé en profondeur par C. McCrory et A. Parusiński, qui ont mis en évidence, dans leur article [18] publié en 2011, la nature géométrique de la filtration par le poids pour les variétés algébriques réelles en termes de chaînes semi-algébriques. Le but est ici de mettre en place et de comprendre des invariants additifs pour les variétés algébriques réelles singulières, invariants dont le champ d'applications est vaste.

Mes travaux visent en particulier la construction d'invariants additifs pour les variétés algébriques réelles munies de l'action d'un groupe algébrique réel.

Travaux

1. *Complexe de poids des variétés algébriques réelles avec action*, publié dans Mathematische Zeitschrift ([20])

McCrory et Parusiński ont montré dans [18] que la filtration par le poids $\mathcal{W}H_*$ sur l'homologie de Borel-Moore à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ des variétés algébriques réelles était induite par un complexe de chaînes $\mathcal{N}C_*$ engendré par les sous-ensembles semi-algébriques fermés et filtré suivant un certain degré de régularité. Ce complexe filtré, dit également de poids, est additif par rapport aux inclusions fermées de variétés algébriques réelles et fonctoriel par rapport aux morphismes réguliers propres.

Si G est un groupe fini et si l'on considère maintenant la catégorie des variétés algébriques réelles munies d'une action régulière du groupe G, la fonctorialité du complexe de poids permet de le munir d'une action linéaire induite. On montre ensuite que ce complexe de poids avec action est unique en un certain sens.

On utilise ensuite ce complexe de poids avec action pour implémenter une régularité dans la suite exacte courte de Smith pour une involution. Précisément, si X est une variété algébrique réelle affine munie d'une involution régulière σ, la suite courte

$$0 \to C_*(X^G) \oplus (1+\sigma)C_*(X) \to C_*(X) \xrightarrow{1+\sigma} (1+\sigma)C_*(X) \to 0,$$

dite de Smith, est exacte, autrement dit, on peut "découper" toute chaîne semi-algébrique globalement invariante sous l'action de σ en deux chaînes échangées par l'action (modulo la restriction aux points fixes). Cependant, la suite exacte courte de Smith n'impose aucune contrainte sur la régularité du découpage : on montre dans [20] que, pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}$, si c est une chaîne d'indice de filtration α (par rapport à la filtration $\mathcal{N}$), globalement invariante par σ, alors on peut découper c en deux chaînes échangées sous l'action, dont l'indice dans la filtration est au maximum $\alpha + 1$. Autrement dit, il existe toujours une façon de découper la chaîne c de sorte que la perte de régularité soit contrôlée.

2. *Equivariant weight filtration for real algebraic varieties with action*, article publié dans le Journal of the Mathematical Society of Japan ([21])

Si l'on applique le foncteur d'homologie du groupe G au complexe de poids avec action, on obtient un nouveau complexe de chaînes filtré qui induit une filtration sur l'homologie équivariante des variétés algébriques réelles avec action de G : on l'appelle filtration par le poids équivariante.

Dans le cadre sans action, on retrouve sur la suite spectrale associée à la filtration par le poids $\mathcal{W}H_*$, induite par le complexe filtré de poids $\mathcal{N}C_*$, des invariants numériques additifs : les nombres de Betti virtuels de McCrory et Parusiński ([17]). Pour tout entier naturel q, le q-ième nombre de Betti virtuel β_q est l'unique invariant numérique additif (par rapport aux inclusions fermées) sur les variétés algébriques réelles qui coïncide avec le nombre de Betti d'indice q sur les variétés lisses compactes. Si l'ordre du groupe G est pair, le fait que la suite spectrale associée à la filtration par le poids équivariante ne soit pas bornée nous empêche de retrouver des invariants numériques additifs pour les variétés algébriques réelles avec action.

La seconde partie de l'article s'attelle ainsi à rechercher des invariants additifs numériques à partir de nouvelles suites spectrales. Pour le cas $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on retrouve dans certains cas les nombres de Betti virtuels équivariants de G. Fichou ([9]). Pour tout entier relatif q, le q-ième nombre de Betti virtuel équivariant β_q^G est l'unique invariant additif sur les variétés algébriques réelles avec action de G égal à la dimension de l'espace d'homologie équivariante d'indice q sur les variétés lisses compactes (l'homologie équivariante considérée ici est celle définie par J. van Hamel dans [27]). Toujours dans le cas du groupe à deux éléments, on retrouve par ailleurs tous les nombres de Betti virtuels équivariants en utilisant un certain critère d'extension de foncteurs définis sur les variétés algébriques réelles lisses compactes munies d'une involution.

3. *Cohomology and products of real weight filtrations*, avec Thierry Limoges, publié aux Annales de l'Institut Fourier ([16])

Pour X une variété algébrique réelle, le complexe de cochaînes obtenu en dualisant le complexe $C_*(X)$ des chaînes semi-algébriques de X calcule la cohomologie à supports compacts à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de l'ensemble des points réels de X. Dans la première partie de cet article rédigé en collaboration avec Thierry Limoges, on dualise la filtration $\mathcal{N}C_*$ et on montre que le complexe de cochaînes filtré fonctoriel ainsi obtenu induit la filtration par le poids cohomologique réelle originelle de Totaro ainsi que la suite spectrale associée.

La seconde partie de l'article s'intéresse à la compatibilité des filtrations par le poids réelles avec le produit cartésien. Précisément, si X et Y sont deux variétés algébriques réelles, on définit un morphisme filtré u entre le produit tensoriel des complexes filtrés $\mathcal{N}C_*(X)$ et $\mathcal{N}C_*(Y)$ et le complexe filtré $\mathcal{N}C_*(X \times Y)$: ce morphisme u induit un isomorphisme au niveau des suites spectrales associées. En particulier, cela nous permet de montrer la multiplicativité du polynôme de Poincaré virtuel $\sum_{q \geq 0} \beta_q(\cdot) u^q \in \mathbb{Z}[u]$ ([17]) sans avoir recours au théorème de factorisation faible. Cela montre également le caractère filtré, par rapport à la filtration par le poids $\mathcal{W}H_*$, de l'isomorphisme de Künneth.

On obtient les analogues cohomologiques de ces résultats en dualisant le morphisme u. On utilise enfin le morphisme u pour définir des produits cup et cap au niveau des chaînes et cochaînes filtrées, qui induisent les produits cup et cap en cohomologie et homologie. En particulier, ces derniers sont filtrés par rapport aux filtrations par le poids cohomologique et homologique. Dans la dernière partie de l'article, on exhibe également des obstructions au fait qu'une variété algébrique réelle compacte singulière vérifie la dualité de Poincaré.

4. *Equivariant zeta functions for invariant Nash germs*, article publié dans le Nagoya Mathematical Journal ([22])

Ce travail s'intéresse à une application des invariants additifs numérique des variétés algébriques réelles : la classification des germes de fonctions analytiques réelles. Dans ce contexte, la question du choix de la relation d'équivalence considérée est cruciale. Dans le cadre réel, des exemples indiquent que l'équivalence topologique n'est pas assez fine et que l'équivalence C^1 donne déjà lieu à trop de classes d'équivalence. En 1985, T.-C. Kuo a proposé dans [13] une relation d'équivalence pour laquelle toute famille analytique à singularités isolées possède une classification localement finie : l'équivalence analytique après éclatements. De plus, des invariants existent pour l'équivalence analytique après éclatements, comme les fonctions zêta de S. Koike et A. Parusiński ([12]) qui, inspirées des fonctions zêta motiviques de J. Denef et F. Loeser ([6]), utilisent la caractéristique d'Euler à supports compacts sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ comme mesure motivique.

Si l'on se restreint maintenant à l'étude des germes de fonctions analytiques réelles possédant un graphe semi-algébrique, appelées fonctions de Nash, on peut considérer une relation d'équivalence adaptée : l'équivalence de Nash après éclatements de G. Fichou ([8]), pour laquelle toute famille de Nash à singularités isolées possède un nombre fini de classes d'équivalence. De plus, les fonctions zêta définies en utilisant le polynôme de Poincaré virtuel comme mesure motivique sont des invariants pour l'équivalence de Nash après éclatements (on peut étendre les nombres de Betti virtuels aux ensembles algébriquement constructibles et montrer qu'ils sont invariants sous isomorphisme de Nash : cf [7]). Il est à noter que l'équivalence de Nash après éclatements a été réinterprétée par J.-B. Campesato qui a défini une fonction zêta plus générale et montré d'importants résultats de classification : cf [2], [3], [4].

Dans l'article *Equivariant zeta functions for invariant Nash germs*, on s'intéresse aux germes de fonctions de Nash invariantes par composition à droite avec l'action linéaire d'un groupe fini. On définit une équivalence de Nash après éclatements adaptée à ces germes invariants : l'équivalence de Nash après éclatements équivariante. L'équivalence de Nash après éclatements équivariante généralise l'équivalence de Nash après éclatements de [8] et permet un raffinement des classes d'équivalence des germes de Nash invariants.

En utilisant la série de Poincaré virtuelle équivariante $\sum_{q \in \mathbb{Z}} \beta_q^G(\cdot) u^q \in \mathbb{Z}[u][[u^{-1}]]$ ([9]) comme mesure motivique, on peut définir de nouvelles fonctions zêta – les fonctions zêta équivariantes – qui sont des invariants pour l'équivalence de Nash après éclatements équivariante des germes de Nash invariants : on peut étendre les nombres de Betti virtuels équivariants aux ensembles algébriquement constructibles munis d'une action provenant de leur adhérence de Zariski et montrer qu'ils sont invariants sous isomorphisme de Nash équivariant (cf [9]).

5. *On the equivariant blow-Nash classification of simple invariant Nash germs*, article publié dans le Bulletin de la Société Mathématique de France ([23])

Il existe une classification des germes analytiques réels $(\mathbb{R}^d, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ simples invariants par composition à droite avec l'action de $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ qui change le signe de la première coordonnée de $\mathbb{R}^d$, par rapport à l'équivalence analytique équivariante (cf [1], [10]). Dans l'article *On the equivariant blow-Nash classification of simple invariant Nash germs*, on étudie la classification des germes de Nash $(\mathbb{R}^d, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ simples invariants sous cette même action de G sur $\mathbb{R}^d$, par rapport à l'équivalence Nash après éclatements équivariante, à l'aide entre autres des fonctions zêta équivariantes. Il s'agit de déterminer si cette classification coïncide avec la classification $ABCDEF$ de V.I. Arnold.

Pour cela, on montre tout d'abord qu'un germe de Nash simple invariant par composition avec l'involution changeant le signe de la première coordonnée est G-Nash équivalent à l'un des germes A_k, B_k, C_k, D_k, E_6, E_7, E_8, F_4. La plus grande partie de l'étude consiste ensuite à essayer de distinguer les germes $ABCDEF$ via-à-vis de l'équivalence de Nash après éclatements équivariante, en calculant notamment les fonctions zêta équivariantes de ces germes.

Dans certains cas, on parvient à distinguer les germes par rapport à l'équivalence de Nash après éclatements équivariante. Dans d'autres cas, on constate des égalités des fonctions zêta équivariantes, ce qui ne permet pas de distinguer les germes correspondants. Cette situation est due au fait que la série de Poincaré virtuelle équivariante ne distingue pas deux involutions sur une même sphère, dès lors qu'elles possédent un point fixe.

6. *Products of real equivariant weight filtrations*, article publié dans manuscripta mathematica ([24])

Ce travail est consacré au pendant cohomologique de la filtration par le poids équivariante de [21]. On se base ici sur les résultats fonctoriels obtenus avec T. Limoges sur la filtration par le poids cohomologique des variétés algébriques réelles auxquels on applique de la cohomologie de groupe pour induire une filtration par le poids sur la cohomologie équivariante des variétés algébriques réelles munies d'une action d'un groupe fini G. Il est à noter que, contrairement au cadre non-équivariant, les filtrations par le poids équivariantes homologiques et cohomologiques ne sont pas duales l'une de l'autre.

On étudie ensuite la compatibilité de la filtration par le poids équivariante vis-à-vis du produit cartésien de variétés algébriques réelles munies d'actions de groupes finis. Pour cela, on utilise les relations entre produit d'homologies de groupes et homologie du groupe produit et on les applique aux résultats obtenus avec T. Limoges dans [16] sur les produits de filtrations par le poids réelles. On obtient ainsi les résultats analogues sur les produits de filtrations par le poids équivariantes : on induit dès le niveau des chaînes filtrées un isomorphisme entre le produit des filtrations par le poids équivariantes d'une G-variété algébrique réelle X et d'une G'-variété algébrique réelle Y et la filtration par le poids équivariante de la $G \times G'$-variété produit $X \times Y$.

On induit enfin des produits cup et cap sur les suites spectrales de poids équivariantes, qui induisent des produits cup et cap filtrés sur les homologie et cohomologie équivariantes des variétés algébriques réelles avec action de G.

7. *Quotients and invariants of $\mathcal{AS}$-sets equipped with a finite group action*, article publié dans Mathematische Annalen ([25])

Dans ce travail, on construit une nouvelle filtration par le poids équivariante sur la cohomologie équivariante des variétés algébriques réelles affines munies de l'action d'un groupe fini G. Pour cela, on utilise la définition topologique de la cohomologie équivariante d'un G-espace topologique X. Précisément, si E_G désigne l'espace total associé à l'espace classifiant du groupe G, E_G est muni d'une action libre de G et on peut alors munir le produit cartésien $X \times E_G$ de l'action diagonale libre induite. La cohomologie équivariante de X est alors la cohomologie du quotient de $X \times E_G$ par l'action de G.

Considérant la géométrie algébrique réelle, on se donne pour représentant de l'espace total E_G une limite inductive de variétés algébriques réelles particulières E_G^n (précisément des variétés de Stiefel). On utilise ensuite le fait que si V est une G-variété algébrique réelle affine telle que l'action de G soit libre sur une compactification de V, alors le quotient de V par G est un ensemble $\mathcal{AS}$. Un ensemble $\mathcal{AS}$ est une combinaison booléenne d'ensembles symétriques par arcs compacts : un ensemble semi-algébrique est dit symétrique par arcs (cf [14], [15]) si tout arc analytique réel soit rencontre l'ensemble en des points isolés, soit y est entièrement contenu. En particulier, les ensembles algébriques réels sont symétriques par arcs et les variétés algébriques réelles affines sont des ensembles $\mathcal{AS}$.

On définit finalement le complexe filtré de poids équivariant $\mathcal{N}C_*(X;G)$ d'une G-variété algébrique réelle affine X comme la structure limite des complexes filtrés de poids $\mathcal{N}C_*(X \times E_G^n/G)$: la filtration fonctorielle $\mathcal{N}C_*$ de McCrory et Parusiński peut en effet être étendue à la catégorie des ensembles $\mathcal{AS}$ et des applications continues propres avec graphe $\mathcal{AS}$. Le complexe de poids $\mathcal{N}C_*$, la suite spectrale de poids et la filtration par le poids induites ainsi que les nombres de Betti virtuels sont donc invariants sous homéomorphisme de graphe $\mathcal{AS}$ (e.g. sous homéomorphisme de graphe algébrique). Le complexe filtré de poids équivariant $\mathcal{N}C_*(X;G)$ induit une filtration par le poids sur la (co)homologie équivariante de X, différente de celle construite dans [21] et [24].

Une grande partie du travail réalisé dans l'article *Quotients and invariants of $\mathcal{AS}$-sets equipped with a finite group action* consiste à étudier les quotients d'ensembles algébriques réels munis d'une action de G ainsi que les quotients d'ensembles symétriques par arcs compacts munis d'une action libre de G. On établit notamment des résultats de fonctorialité par rapport aux applications équivariantes continues propres avec graphe $\mathcal{AS}$, ce qui nous permet de montrer que le complexe filtré de poids équivariant est fonctoriel par rapport à cette classe de morphismes.

Enfin, on retrouve des invariants additifs numériques (différents des nombres de Betti virtuels équivariants de [9]) sur les lignes de la suite spectrale induite par le complexe filtré de poids équivariant, qui sont donc invariants sous homéomorphisme équivariant de graphe $\mathcal{AS}$.

Travaux en cours

1. Groupes algébriques réels et actions de groupes algébriques réels sur des ensembles algébriques réels

Je suis actuellement en train de rédiger un document sur les groupes algébriques réels et leurs actions sur les ensembles algébriques réels. La théorie analogue sur les groupes algébriques complexes et leurs actions est aujourd'hui classique (Geometric Invariant Theory,...). A contrario, il n'existe pas à ma connaissance de document de référence sur les actions de groupes algébriques en géométrie algébrique réelle.

Je souhaiterais ainsi établir une liste des résultats de la théorie géométrique des invariants qui restent vraies en géométrie algébrique réelle et de ceux qui ne le sont plus (par exemple, l'image d'un groupe algébrique réel par un morphisme de groupes algébriques réels n'est pas nécessairement un groupe algébrique réel : il s'agit d'un groupe semi-algébrique réel).

2. Extension de la filtration par le poids équivariante de [25] au cas des groupes compacts et produits

L'une des motivations du travail précédent est de géneraliser l'étude de l'article *Quotients and invariants of $\mathcal{AS}$-sets equipped with a finite group action* au cas des variétés algébriques réelles affines munies de l'action d'un groupe algébrique réel compact. Précisément, si G est un groupe algébrique réel compact, il s'agit de construire un complexe filtré de poids équivariant pour les variétés algébriques réelles affines munies d'une action algébrique de G, ainsi que des invariants numériques additifs.

Un autre travail consistera à montrer que les différents invariants "équivariants" ainsi construits sont compatibles avec le produit cartésien. Précisément, il s'agit de montrer que le complexe filtré de poids équivariant d'un produit cartésien (muni de l'action du groupe produit) est le produit des complexes de poids équivariants.

3. Géométrie algébrique réelle et mécanique des matériaux

Je suis membre d'un projet 80 Prime, financé par le CNRS, ayant trait à l'utilisation des géométries algébriques réelle et complexe en mécanique des matériaux. Les autres membres du projet sont Rodrigue Desmorat (porteur du projet), Perla Azzi, Julien Grivaux, Boris Kolev et Marc Olive.

Le projet consiste à utiliser les objets et techniques des géométries algébriques pour traiter des questions relatives à l'élasticité des matériaux : l'élasticité d'un matériau est représentée mathématiquement par un produit tensoriel sur $\mathbb{R}$ appelé tenseur d'élasticité, et sur l'espace vectoriel des tenseurs d'élasticité agit le groupe des rotations de l'espace $\mathbb{R}^3$.

A titre d'exemples, les différents problèmes de géométrie algébrique réelle abordés dans ce projet ont trait notamment à la théorie géométrique des invariants et à l'optimisation polynomiale et semi-algébrique.

Références

[1] V. I. Arnold, *Critical points of function on a manifold with boundary, the simple Lie groups B_k, C_k, F_4, and singularities of evolutes*, Uspekhi Mat. Nauk **33** (1978), no. 5, 91-105 ; English transl. Russian Math. Surveys **33** (1978), no. 5, 99-116.

[2] J.-B. Campesato, *On a motivic invariant of the arc-analytic equivalence*, Ann. de l'Inst. Fourier, **67** no. 1 (2017), pp 143-196.

[3] J.-B. Campesato, *On the arc-analytic type of some weighted homogeneous polynomials*, Journal of the London Mathematical Society, **97** no. 3 (2018), pp 377-397.

[4] J.-B. Campesato, *Complete classification of Brieskorn polynomials up to the arc-analytic equivalence*, Mathematische Zeitschrift, **290**, no. 3-4 (2018), pp 1145-1163.

[5] P. Deligne, *Poids dans la cohomologie des variétés algébriques*, Proc. Int. Cong. Math. Vancouver (1974), pp 79-85.

[6] J. Denef, F. Loeser, *Germs of arcs on singular algebraic varieties and motivic integration*, Invent. math. **135** (1999), pp 201-232.

[7] G. Fichou, *Motivic invariants of Arc-Symmetric sets and Blow-Nash Equivalence*, Compositio Math. **141** (2005), pp 655-688.

[8] G. Fichou, *Zeta functions and Blow-Nash equivalence*, Annales Polonici Math. **87** (2005), pp 111-125.

[9] G. Fichou, *Equivariant virtual Betti numbers*, Ann. de l'Inst. Fourier, **58**, no. 1 (2008), pp 1-27.

[10] V. V. Goryunov, *Bifurcations with symmetries*, in *Singularity Theory and Some Problems of Functional Analysis*, S.G. Gindikin ed., AMS Translations, ser. 2, vol. 153, 1992, pp 93-108.

[11] H. Hironaka, *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero*, Ann. Math. **79** (1964), no. 2, pp 109-326.

[12] S. Koike, A. Parusiński, *Motivic-type invariants of blow-analytic equivalence*, Ann. Inst. Fourier **53** (2003), pp 2061-2104.

[13] T.-C. Kuo, *On classification of real singularities*, Invent. Math. **82** (1985), pp 257-262.

[14] K. Kurdyka, *Ensembles semi-algébriques symétriques par arcs*, Math. Ann. **281** (1988), pp 445-462.

[15] K. Kurdyka, A. Parusiński, *Arc-symmetric sets and arc-analytic mappings*, Panoramas et Synthèses **24**, Soc. Math. France (2007), pp 33-67.

[16] T. Limoges, F. Priziac, *Cohomology and products of real weight filtrations*, Ann. de l'Inst. Fourier, 2015, **65**, no 5, pp 2235-2271.

[17] C. McCrory, A. Parusiński, *Virtual Betti numbers of real algebraic varieties*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **336** (2003), no. 9, pp 763-768.

[18] C. McCrory, A. Parusiński, *The weight filtration for real algebraic varieties*, Topology of stratified spaces, 121-160, Math. Sci. Res. Inst. Publ. **58**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2011.

[19] F. Priziac, *Filtration par le poids équivariante pour les variétés algébriques réelles avec action*, Thèse de Doctorat, Université de Rennes 1, 2012.

[20] F. Priziac, *Complexe de poids des variétés algébriques réelles avec action*, Mathematische Zeitschrift **277** no. 1 (2014), pp 63-80.

[21] F. Priziac, *Equivariant weight filtration for real algebraic varieties with action*, Journal of the Mathematical Society of Japan **68** no. 4 (2016), pp 1789-1818.

[22] F. Priziac, *Equivariant zeta functions for invariant Nash germs*, Nagoya Mathematical Journal **222** (2016), pp 100-136.

[23] F. Priziac, *On the equivariant blow-Nash classification of simple invariant Nash germs*, Bulletin de la Société Mathématique de France **148** no. 2 (2020), pp 329-382.

[24] F. Priziac, *Products of real equivariant weight filtrations*, manuscripta mathematica **164** (2021), pp 151-192.

[25] F. Priziac, *Quotients and invariants of $\mathcal{AS}$-sets equipped with a finite group action*, Math. Ann. **377** (2020), pp 1015-1055.

[26] B. Totaro, *Topology of singular algebraic varieties*, Proc. Int. Cong. Math. Beijing (2002), 533-541.

[27] J. van Hamel, *Algebraic cycles and topology of real algebraic varieties*, CWI Tract, **129**, Stichting Mathematisch Centrum, Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam, 2000.