Chapitre 1 : Dualité linéaire

I. Introduction

Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif et E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

I. Introduction

Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif et E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

On étudie les applications linéaires $\varphi : E \to \mathbb{K}$, appelées
formes linéaires sur E.

I. Introduction

Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif et E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

On étudie les applications linéaires $\varphi : E \to \mathbb{K}$, appelées formes linéaires sur E.

Définition 1

$E^* := \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est appelé espace dual de E : il s'agit d'un $\mathbb{K}$-ev.

I. Introduction

Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif et E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

On étudie les applications linéaires $\varphi : E \to \mathbb{K}$, appelées
formes linéaires sur E.

Définition 1

$E^* := \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est appelé espace dual de E : il s'agit d'un $\mathbb{K}$-ev.

Remarque 2

Toute forme linéaire φ sur E non nulle détermine un hyperplan $\mathrm{Ker}\ \varphi$ de E. Réciproquement, tout hyperplan de E est le noyau d'une forme linéaire sur E non nulle.

II. Base duale

Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E. On lui associe une base de E^* :

II. Base duale

Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E. On lui associe une base de E^* :

Théorème 3

Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note e_i^* la forme linéaire sur E telle que, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, $e_i^*(e_j) = \delta_{i\,j}$.

II. Base duale

Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E. On lui associe une base de E^* :

Théorème 3

Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, on note e_i^* la forme linéaire sur E telle que, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $e_i^*(e_j) = \delta_{i\,j}$.

La famille $\mathcal{B}^* := \{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ est une base de E^*, appelée <u>base duale de $\mathcal{B}$</u>.

II. Base duale

Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E. On lui associe une base de E^* :

Théorème 3

Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note e_i^* la forme linéaire sur E telle que, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, $e_i^*(e_j) = \delta_{i\,j}$.

La famille $\mathcal{B}^* := \{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ est une base de E^*, appelée <u>base duale de $\mathcal{B}$</u>.

Remarque 4

Si $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $e_i^*(v) = x_i$.

II. Base duale

Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E. On lui associe une base de E^* :

Théorème 3

Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note e_i^* la forme linéaire sur E telle que, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, $e_i^*(e_j) = \delta_{i\,j}$.

La famille $\mathcal{B}^* := \{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ est une base de E^*, appelée <u>base duale de $\mathcal{B}$</u>.

Remarque 4

Si $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $e_i^*(v) = x_i$.

Conséquence

$\dim(E^*) = \dim(E)$ donc E et E^* sont isomorphes, mais pas de façon "canonique".

Proposition 5

Soient $\varphi \in E^*$ et $v \in E$.

II. Base duale

Proposition 5

Soient $\varphi \in E^*$ et $v \in E$.

On a $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i)e_i^*$ et $v = \sum_{j=1}^{n} e_j^*(v)e_j$.

Proposition 5

Soient $\varphi \in E^*$ et $v \in E$.

On a $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i)e_i^*$ et $v = \sum_{j=1}^{n} e_j^*(v)e_j$.

Remarque 6

Si $\varphi \in E^*$ et $v \in E$,

Proposition 5

Soient $\varphi \in E^*$ et $v \in E$.

On a $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i)e_i^*$ et $v = \sum_{j=1}^{n} e_j^*(v)e_j$.

Remarque 6

Si $\varphi \in E^*$ et $v \in E$,

$$\varphi(v) = {}^t\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}^*}(\varphi)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v).$$

Proposition 7

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.

III. Matrice de passage

Proposition 7

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.

$$P_{\mathcal{B}^* \to \mathcal{B}'^*} = {}^tP_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}{}^{-1} = {}^tP_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}}$$

III. Matrice de passage

Proposition 7

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.

$$P_{\mathcal{B}^* \to \mathcal{B}'^*} = {}^tP_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}{}^{-1} = {}^tP_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}}$$

Corollaire 8

Pour toute base $\mathcal{C}$ de E^*, il existe une et une seule base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{C} = \mathcal{B}^*$: $\mathcal{B}$ est appelée <u>base antéduale de $\mathcal{C}$</u>.