Chapitre 5 : Orthogonalité et réduction

I. Introduction

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

I. Introduction

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On aborde quatre points :

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On aborde quatre points :

- Diagonalisabilité des matrices $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tA = A$ (symétriques).

I. Introduction

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On aborde quatre points :

- Diagonalisabilité des matrices $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tA = A$ (symétriques).
- Matrices symétriques positives, existence d'une racine carrée.

I. Introduction

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On aborde quatre points :

- Diagonalisabilité des matrices $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tA = A$ (symétriques).
- Matrices symétriques positives, existence d'une racine carrée.
- Décomposition polaire $A = OS$ pour toute $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

I. Introduction

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On aborde quatre points :

- Diagonalisabilité des matrices $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tA = A$ (symétriques).
- Matrices symétriques positives, existence d'une racine carrée.
- Décomposition polaire $A = OS$ pour toute $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
- Réductibilité des matrices $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tAA = I_n$ (orthogonales).

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

II. Diagonalisabilité des endomorphismes symétriques

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Définition 1

On dit que f est auto-adjoint ou symétrique si $f^* = f$.

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Définition 1

On dit que f est auto-adjoint ou symétrique si $f^* = f$.

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E et soit $A := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Définition 1

On dit que f est auto-adjoint ou symétrique si $f^* = f$.

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E et soit $A := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Proposition 2

f est symétrique ssi ${}^tA = A$.

Théorème 3

Si f est symétrique, alors f est diagonalisable dans une base orthonormale.

Théorème 3

Si f est symétrique, alors f est diagonalisable dans une base orthonormale.

Conséquence :

Théorème 3

Si f est symétrique, alors f est diagonalisable dans une base orthonormale.

Conséquence : Si $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique i.e. ${}^tM = M$,

Théorème 3

Si f est symétrique, alors f est diagonalisable dans une base orthonormale.

Conséquence : Si $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique i.e. ${}^tM = M$, alors il existe $O \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ diagonales telles que

Théorème 3

Si f est symétrique, alors f est diagonalisable dans une base orthonormale.

Conséquence : Si $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique i.e. ${}^tM = M$, alors il existe $O \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ diagonales telles que

$$O^{-1}AO = {}^tOAO = D.$$

III. Matrices symétriques positives

III. Matrices symétriques positives

On note $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

III. Matrices symétriques positives

On note $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $S \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$.

On note $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $S \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$.

Définition 4

On dit que S est

- positive si $\forall X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXSX \geq 0$,

On note $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $S \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$.

Définition 4

On dit que S est

- positive si $\forall X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXSX \geq 0$,
- définie positive si $\forall X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ {}^tXSX > 0$.

III. Matrices symétriques positives

On note $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $S \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$.

Définition 4

On dit que S est

- <u>positive</u> si $\forall X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^t XSX \geq 0$,
- <u>définie positive</u> si $\forall X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, ${}^t XSX > 0$.

Proposition 5

S est positive, resp. définie positive,

III. Matrices symétriques positives

On note $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $S \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$.

Définition 4

On dit que S est

- positive si $\forall X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXSX \geq 0$,
- définie positive si $\forall X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, ${}^tXSX > 0$.

Proposition 5

S est positive, resp. définie positive, ssi $\mathrm{Sp}(A) \subset [0; +\infty[$, resp. $\mathrm{Sp}(A) \subset]0; +\infty[$.

Toute matrice symétrique positive possède une “racine carrée” :

Toute matrice symétrique positive possède une “racine carrée” :

Théorème 6

Supposons S positive.

Toute matrice symétrique positive possède une “racine carrée” :

Théorème 6

Supposons S positive. Il existe une unique matrice $R \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ positive telle que

Toute matrice symétrique positive possède une “racine carrée” :

Théorème 6

Supposons S positive. Il existe une unique matrice $R \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ positive telle que

$$S = R^2 = RR.$$

Toute matrice symétrique positive possède une “racine carrée” :

Théorème 6

Supposons S positive. Il existe une unique matrice $R \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ positive telle que

$$S = R^2 = RR.$$

Si de plus S est définie positive, R l'est également.