# V. Réductibilité des endomorphismes orthogonaux

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et soit $f$ un endomorphisme orthogonal de $E$.

<u>Notation :</u> Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note $R(\theta) := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$.

## Théorème 8

Il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de $E$ dans laquelle

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \epsilon_r & & & \\ & & & R(\theta_1) & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & R(\theta_s) \end{pmatrix}$$

où $r, s \in \mathbb{N}$, $\forall i \in \{1, \ldots, r\}$, $\epsilon_i \in \{+1; -1\}$, $\forall j \in \{1, \ldots, s\}$, $\theta_j \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

**Lemme 9**

Soit $F$ un sev de $E$.

**Lemme 9**

Soit $F$ un sev de $E$. Si $f(F) \subset F$, alors $f\left(F^{\perp}\right) \subset F^{\perp}$.

**Lemme 9**

Soit $F$ un sev de $E$. Si $f(F) \subset F$, alors $f\left(F^{\perp}\right) \subset F^{\perp}$.

Preuve du théorème 8 :

**Lemme 9**

Soit $F$ un sev de $E$. Si $f(F) \subset F$, alors $f\left(F^{\perp}\right) \subset F^{\perp}$.

Preuve du théorème 8 : Par récurrence sur $n = \dim(E)$.

**Lemme 9**

Soit $F$ un sev de $E$. Si $f(F) \subset F$, alors $f\left(F^{\perp}\right) \subset F^{\perp}$.

Preuve du théorème 8 : Par récurrence sur $n = \dim(E)$.

- $n = 1$ :

**Lemme 9**

Soit $F$ un sev de $E$. Si $f(F) \subset F$, alors $f\left(F^{\perp}\right) \subset F^{\perp}$.

Preuve du théorème 8 : Par récurrence sur $n = \dim(E)$.

- $n = 1$ : OK

**Lemme 9**

Soit $F$ un sev de $E$. Si $f(F) \subset F$, alors $f\left(F^{\perp}\right) \subset F^{\perp}$.

Preuve du théorème 8 : Par récurrence sur $n = \dim(E)$.

- $n = 1$ : OK
- Supposons la propriété vérifiée pour tout entier naturel non nul $< n$.

**Lemme 9**

Soit $F$ un sev de $E$. Si $f(F) \subset F$, alors $f\left(F^{\perp}\right) \subset F^{\perp}$.

Preuve du théorème 8 : Par récurrence sur $n = \dim(E)$.

- $n = 1$ : OK
- Supposons la propriété vérifiée pour tout entier naturel non nul $< n$.
  1. si $f$ possède une valeur propre réelle $\lambda \in \mathbb{R}$ :

**Lemme 9**

Soit $F$ un sev de $E$. Si $f(F) \subset F$, alors $f\left(F^{\perp}\right) \subset F^{\perp}$.

Preuve du théorème 8 : Par récurrence sur $n = \dim(E)$.

- $n = 1$ : OK
- Supposons la propriété vérifiée pour tout entier naturel non nul $< n$.
  1. si $f$ possède une valeur propre réelle $\lambda \in \mathbb{R}$ :
     - $|\lambda| = 1$

**Lemme 9**

Soit $F$ un sev de $E$. Si $f(F) \subset F$, alors $f\left(F^{\perp}\right) \subset F^{\perp}$.

<u>Preuve du théorème 8 :</u> Par récurrence sur $n = \dim(E)$.

- $n = 1$ : OK
- Supposons la propriété vérifiée pour tout entier naturel non nul $< n$.
  1. si $f$ possède une valeur propre réelle $\lambda \in \mathbb{R}$ :
     - $|\lambda| = 1$
     - soit $v \in E_\lambda \setminus \{0_E\}$,

**Lemme 9**

Soit $F$ un sev de $E$. Si $f(F) \subset F$, alors $f\left(F^{\perp}\right) \subset F^{\perp}$.

Preuve du théorème 8 : Par récurrence sur $n = \dim(E)$.

- $n = 1$ : OK
- Supposons la propriété vérifiée pour tout entier naturel non nul $< n$.
  1. si $f$ possède une valeur propre réelle $\lambda \in \mathbb{R}$ :
     - $|\lambda| = 1$
     - soit $v \in E_\lambda \setminus \{0_E\}$, on pose $F := \mathrm{Vect}\{v\}$

**Lemme 9**

Soit $F$ un sev de $E$. Si $f(F) \subset F$, alors $f\left(F^{\perp}\right) \subset F^{\perp}$.

Preuve du théorème 8 : Par récurrence sur $n = \dim(E)$.

- $n = 1$ : OK
- Supposons la propriété vérifiée pour tout entier naturel non nul $< n$.
  1. si $f$ possède une valeur propre réelle $\lambda \in \mathbb{R}$ :
     - $|\lambda| = 1$
     - soit $v \in E_\lambda \setminus \{0_E\}$, on pose $F := \mathrm{Vect}\{v\}$ et $F^{\perp}$ est stable par $f$

**Lemme 9**

Soit $F$ un sev de $E$. Si $f(F) \subset F$, alors $f\left(F^{\perp}\right) \subset F^{\perp}$.

<u>Preuve du théorème 8 :</u> Par récurrence sur $n = \dim(E)$.

- $n = 1$ : OK
- Supposons la propriété vérifiée pour tout entier naturel non nul $< n$.
  1. si $f$ possède une valeur propre réelle $\lambda \in \mathbb{R}$ :
     - $|\lambda| = 1$
     - soit $v \in E_\lambda \setminus \{0_E\}$, on pose $F := \mathrm{Vect}\{v\}$ et $F^{\perp}$ est stable par $f$
     - $\dim\left(F^{\perp}\right) = n - 1$ : on applique HR.

# V. Réductibilité des endomorphismes orthogonaux

**Lemme 9**

Soit $F$ un sev de $E$. Si $f(F) \subset F$, alors $f\left(F^{\perp}\right) \subset F^{\perp}$.

Preuve du théorème 8 : Par récurrence sur $n = \dim(E)$.

- $n = 1$ : OK
- Supposons la propriété vérifiée pour tout entier naturel non nul $< n$.
  1. si $f$ possède une valeur propre réelle $\lambda \in \mathbb{R}$ :
     - $|\lambda| = 1$
     - soit $v \in E_\lambda \setminus \{0_E\}$, on pose $F := \mathrm{Vect}\{v\}$ et $F^{\perp}$ est stable par $f$
     - $\dim\left(F^{\perp}\right) = n - 1$ : on applique HR.
  2. si $f$ ne possède pas de valeur propre réelle :

**Lemme 9**

Soit $F$ un sev de $E$. Si $f(F) \subset F$, alors $f\left(F^{\perp}\right) \subset F^{\perp}$.

<u>Preuve du théorème 8 :</u> Par récurrence sur $n = \dim(E)$.

- $n = 1$ : OK
- Supposons la propriété vérifiée pour tout entier naturel non nul $< n$.
  1. si $f$ possède une valeur propre réelle $\lambda \in \mathbb{R}$ :
     - $|\lambda| = 1$
     - soit $v \in E_\lambda \setminus \{0_E\}$, on pose $F := \mathrm{Vect}\{v\}$ et $F^{\perp}$ est stable par $f$
     - $\dim\left(F^{\perp}\right) = n - 1$ : on applique HR.
  2. si $f$ ne possède pas de valeur propre réelle :
     - on pose $h := f + f^*$ :

**Lemme 9**

Soit $F$ un sev de $E$. Si $f(F) \subset F$, alors $f\left(F^{\perp}\right) \subset F^{\perp}$.

<u>Preuve du théorème 8 :</u> Par récurrence sur $n = \dim(E)$.

- $n = 1$ : OK
- Supposons la propriété vérifiée pour tout entier naturel non nul $< n$.
  1. si $f$ possède une valeur propre réelle $\lambda \in \mathbb{R}$ :
     - $|\lambda| = 1$
     - soit $v \in E_\lambda \setminus \{0_E\}$, on pose $F := \mathrm{Vect}\{v\}$ et $F^{\perp}$ est stable par $f$
     - $\dim\left(F^{\perp}\right) = n - 1$ : on applique HR.
  2. si $f$ ne possède pas de valeur propre réelle :
     - on pose $h := f + f^*$ : $h$ est symétrique

**Lemme 9**

Soit $F$ un sev de $E$. Si $f(F) \subset F$, alors $f\left(F^{\perp}\right) \subset F^{\perp}$.

<u>Preuve du théorème 8 :</u> Par récurrence sur $n = \dim(E)$.

- $n = 1$ : OK
- Supposons la propriété vérifiée pour tout entier naturel non nul $< n$.
  1. si $f$ possède une valeur propre réelle $\lambda \in \mathbb{R}$ :
     - $|\lambda| = 1$
     - soit $v \in E_\lambda \setminus \{0_E\}$, on pose $F := \mathrm{Vect}\{v\}$ et $F^{\perp}$ est stable par $f$
     - $\dim\left(F^{\perp}\right) = n - 1$ : on applique HR.
  2. si $f$ ne possède pas de valeur propre réelle :
     - on pose $h := f + f^*$ : $h$ est symétrique
     - soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(h)$,

**Lemme 9**

Soit $F$ un sev de $E$. Si $f(F) \subset F$, alors $f\left(F^{\perp}\right) \subset F^{\perp}$.

Preuve du théorème 8 : Par récurrence sur $n = \dim(E)$.

- $n = 1$ : OK
- Supposons la propriété vérifiée pour tout entier naturel non nul $< n$.
  1. si $f$ possède une valeur propre réelle $\lambda \in \mathbb{R}$ :
     - $|\lambda| = 1$
     - soit $v \in E_\lambda \setminus \{0_E\}$, on pose $F := \mathrm{Vect}\{v\}$ et $F^{\perp}$ est stable par $f$
     - $\dim\left(F^{\perp}\right) = n - 1$ : on applique HR.
  2. si $f$ ne possède pas de valeur propre réelle :
     - on pose $h := f + f^*$ : $h$ est symétrique
     - soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(h)$, soit $v \in E_\lambda \setminus \{0_E\}$

**Lemme 9**

Soit $F$ un sev de $E$. Si $f(F) \subset F$, alors $f\left(F^{\perp}\right) \subset F^{\perp}$.

<u>Preuve du théorème 8 :</u> Par récurrence sur $n = \dim(E)$.

- $n = 1$ : OK
- Supposons la propriété vérifiée pour tout entier naturel non nul $< n$.
  1. si $f$ possède une valeur propre réelle $\lambda \in \mathbb{R}$ :
     - $|\lambda| = 1$
     - soit $v \in E_\lambda \setminus \{0_E\}$, on pose $F := \mathrm{Vect}\{v\}$ et $F^\perp$ est stable par $f$
     - $\dim\left(F^{\perp}\right) = n - 1$ : on applique HR.
  2. si $f$ ne possède pas de valeur propre réelle :
     - on pose $h := f + f^*$ : $h$ est symétrique
     - soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(h)$, soit $v \in E_\lambda \setminus \{0_E\}$ : $F := \mathrm{Vect}\{v, f(v)\}$ est de dimension 2

**Lemme 9**

Soit $F$ un sev de $E$. Si $f(F) \subset F$, alors $f\left(F^\perp\right) \subset F^\perp$.

Preuve du théorème 8 : Par récurrence sur $n = \dim(E)$.

- $n = 1$ : OK
- Supposons la propriété vérifiée pour tout entier naturel non nul $< n$.
  1. si $f$ possède une valeur propre réelle $\lambda \in \mathbb{R}$ :
     - $|\lambda| = 1$
     - soit $v \in E_\lambda \setminus \{0_E\}$, on pose $F := \mathrm{Vect}\{v\}$ et $F^\perp$ est stable par $f$
     - $\dim\left(F^\perp\right) = n - 1$ : on applique HR.
  2. si $f$ ne possède pas de valeur propre réelle :
     - on pose $h := f + f^*$ : $h$ est symétrique
     - soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(h)$, soit $v \in E_\lambda \setminus \{0_E\}$ : $F := \mathrm{Vect}\{v, f(v)\}$ est de dimension 2 et est stable par $f$

# V. Réductibilité des endomorphismes orthogonaux

**Lemme 9**

Soit $F$ un sev de $E$. Si $f(F) \subset F$, alors $f\left(F^{\perp}\right) \subset F^{\perp}$.

Preuve du théorème 8 : Par récurrence sur $n = \dim(E)$.

- $n = 1$ : OK
- Supposons la propriété vérifiée pour tout entier naturel non nul $< n$.
  1. si $f$ possède une valeur propre réelle $\lambda \in \mathbb{R}$ :
     - $|\lambda| = 1$
     - soit $v \in E_\lambda \setminus \{0_E\}$, on pose $F := \mathrm{Vect}\{v\}$ et $F^{\perp}$ est stable par $f$
     - $\dim\left(F^{\perp}\right) = n - 1$ : on applique HR.
  2. si $f$ ne possède pas de valeur propre réelle :
     - on pose $h := f + f^*$ : $h$ est symétrique
     - soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(h)$, soit $v \in E_\lambda \setminus \{0_E\}$ : $F := \mathrm{Vect}\{v, f(v)\}$ est de dimension 2 et est stable par $f$
     - $F^{\perp}$ est stable par $f$

# V. Réductibilité des endomorphismes orthogonaux

**Lemme 9**

Soit $F$ un sev de $E$. Si $f(F) \subset F$, alors $f\left(F^{\perp}\right) \subset F^{\perp}$.

Preuve du théorème 8 : Par récurrence sur $n = \dim(E)$.

- $n = 1$ : OK
- Supposons la propriété vérifiée pour tout entier naturel non nul $< n$.
  1. si $f$ possède une valeur propre réelle $\lambda \in \mathbb{R}$ :
     - $|\lambda| = 1$
     - soit $v \in E_\lambda \setminus \{0_E\}$, on pose $F := \mathrm{Vect}\{v\}$ et $F^{\perp}$ est stable par $f$
     - $\dim\left(F^{\perp}\right) = n - 1$ : on applique HR.
  2. si $f$ ne possède pas de valeur propre réelle :
     - on pose $h := f + f^*$ : $h$ est symétrique
     - soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(h)$, soit $v \in E_\lambda \setminus \{0_E\}$ : $F := \mathrm{Vect}\{v, f(v)\}$ est de dimension 2 et est stable par $f$
     - $F^{\perp}$ est stable par $f$ et $\dim\left(F^{\perp}\right) = n - 2$ :

# V. Réductibilité des endomorphismes orthogonaux

**Lemme 9**

Soit $F$ un sev de $E$. Si $f(F) \subset F$, alors $f\left(F^{\perp}\right) \subset F^{\perp}$.

Preuve du théorème 8 : Par récurrence sur $n = \dim(E)$.

- $n = 1$ : OK
- Supposons la propriété vérifiée pour tout entier naturel non nul $< n$.
  1. si $f$ possède une valeur propre réelle $\lambda \in \mathbb{R}$ :
     - $|\lambda| = 1$
     - soit $v \in E_\lambda \setminus \{0_E\}$, on pose $F := \mathrm{Vect}\{v\}$ et $F^{\perp}$ est stable par $f$
     - $\dim\left(F^{\perp}\right) = n - 1$ : on applique HR.
  2. si $f$ ne possède pas de valeur propre réelle :
     - on pose $h := f + f^*$ : $h$ est symétrique
     - soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(h)$, soit $v \in E_\lambda \setminus \{0_E\}$ : $F := \mathrm{Vect}\{v, f(v)\}$ est de dimension 2 et est stable par $f$
     - $F^{\perp}$ est stable par $f$ et $\dim\left(F^{\perp}\right) = n - 2$ : on applique HR.

**Lemme 9**

Soit $F$ un sev de $E$. Si $f(F) \subset F$, alors $f\left(F^\perp\right) \subset F^\perp$.

<u>Preuve du théorème 8 :</u> Par récurrence sur $n = \dim(E)$.

- $n = 1$ : OK
- Supposons la propriété vérifiée pour tout entier naturel non nul $< n$.
  1. si $f$ possède une valeur propre réelle $\lambda \in \mathbb{R}$ :
     - $|\lambda| = 1$
     - soit $v \in E_\lambda \setminus \{0_E\}$, on pose $F := \mathrm{Vect}\{v\}$ et $F^\perp$ est stable par $f$
     - $\dim\left(F^\perp\right) = n - 1$ : on applique HR.
  2. si $f$ ne possède pas de valeur propre réelle :
     - on pose $h := f + f^*$ : $h$ est symétrique
     - soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(h)$, soit $v \in E_\lambda \setminus \{0_E\}$ : $F := \mathrm{Vect}\{v, f(v)\}$ est de dimension 2 et est stable par $f$
     - $F^\perp$ est stable par $f$ et $\dim\left(F^\perp\right) = n - 2$ : on applique HR.

**Remarque 10**

Les seules valeurs propres réelles possibles pour un endomorphisme orthogonal sont 1 et $-1$.

# Chapitre 6 : Normes matricielles subordonnées, rayon spectral, conditionnement

# I. Introduction

Soit $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$,

# I. Introduction

Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

# I. Introduction

Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Dans ce chapitre, on étudiera

# I. Introduction

Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Dans ce chapitre, on étudiera

- des normes matricielles particulières : les normes subordonnées,

# I. Introduction

Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Dans ce chapitre, on étudiera

- des normes matricielles particulières : les normes subordonnées,
- le rayon spectral : la plus grande valeur propre en module,

# I. Introduction

Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Dans ce chapitre, on étudiera

- des normes matricielles particulières : les normes subordonnées,
- le rayon spectral : la plus grande valeur propre en module,
- des liens entre les deux notions,

# I. Introduction

Soit $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$, soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Dans ce chapitre, on étudiera

- des normes matricielles particulières : les normes subordonnées,
- le rayon spectral : la plus grande valeur propre en module,
- des liens entre les deux notions,
- le conditionnement des systèmes linéaires inversibles.

# II. Normes matricielles subordonnées

# II. Normes matricielles subordonnées

**Définition 1**

Soit $\| \cdot \|$ une norme sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

# II. Normes matricielles subordonnées

**Définition 1**

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que $\|\cdot\|$ est une norme matricielle

**Définition 1**

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que $\|\cdot\|$ est une <u>norme matricielle</u> si $\forall A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$.

# II. Normes matricielles subordonnées

## Définition 1

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que $\|\cdot\|$ est une <u>norme matricielle</u> si $\forall A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$.

## Exemples 2

- La norme $\|\cdot\|_2 : A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \sqrt{\mathrm{Tr}\left({}^t\overline{A}\,A\right)} > 0$

**Définition 1**

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que $\|\cdot\|$ est une norme matricielle si $\forall A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$.

**Exemples 2**

- La norme $\|\cdot\|_2 : A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \sqrt{\mathrm{Tr}\left({}^t\overline{A}\,A\right)} > 0$ est une norme matricielle.

# II. Normes matricielles subordonnées

## Définition 1

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que $\|\cdot\|$ est une norme matricielle si $\forall A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$.

## Exemples 2

- La norme $\|\cdot\|_2 : A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \sqrt{\mathrm{Tr}\left({}^t\overline{A}\,A\right)} > 0$ est une norme matricielle.
- La norme $\|\cdot\|_1 : A = (a_{i\,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i\,j}|$

**Définition 1**

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que $\|\cdot\|$ est une norme matricielle si $\forall A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$.

**Exemples 2**

- La norme $\|\cdot\|_2 : A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \sqrt{\mathrm{Tr}\left({}^t\overline{A}\,A\right)} > 0$ est une norme matricielle.
- La norme $\|\cdot\|_1 : A = (a_{i\,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i\,j}|$ est une norme matricielle.

# II. Normes matricielles subordonnées

## Définition 1

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que $\|\cdot\|$ est une norme matricielle si $\forall A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$.

## Exemples 2

- La norme $\|\cdot\|_2 : A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \sqrt{\mathrm{Tr}\left({}^t\overline{A}\,A\right)} > 0$ est une norme matricielle.
- La norme $\|\cdot\|_1 : A = (a_{i\,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i\,j}|$ est une norme matricielle.
- La norme $\|\cdot\|_\infty : A = (a_{i\,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i\,j}|$

# II. Normes matricielles subordonnées

## Définition 1

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que $\|\cdot\|$ est une norme matricielle si $\forall A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$.

## Exemples 2

- La norme $\|\cdot\|_2 : A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \sqrt{\mathrm{Tr}\left({}^t\overline{A}\,A\right)} > 0$ est une norme matricielle.
- La norme $\|\cdot\|_1 : A = (a_{i\,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i\,j}|$ est une norme matricielle.
- La norme $\|\cdot\|_\infty : A = (a_{i\,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i\,j}|$ n'est pas une norme matricielle.

# II. Normes matricielles subordonnées

## Définition 1

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que $\|\cdot\|$ est une norme matricielle si $\forall A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$.

## Exemples 2

- La norme $\|\cdot\|_2 : A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \sqrt{\mathrm{Tr}\left({}^t\overline{A}\,A\right)} > 0$ est une norme matricielle.
- La norme $\|\cdot\|_1 : A = (a_{i\,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i\,j}|$ est une norme matricielle.
- La norme $\|\cdot\|_\infty : A = (a_{i\,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i\,j}|$ n'est pas une norme matricielle.

## Remarque 3

$\|I_n\|_2 = \sqrt{n}$ et $\|I_n\|_1 = n$.

# II. Normes matricielles subordonnées

# II. Normes matricielles subordonnées

Soit $\| \cdot \|$ une norme sur $\mathbb{K}^n$.

# II. Normes matricielles subordonnées

Soit $\|\cdot\|$ une norme <u>sur $\mathbb{K}^n$</u>. On construit à partir de $\|\cdot\|$ une norme matricielle $|||\cdot|||$ sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ qui vérifie $|||I_n||| = 1$.

# II. Normes matricielles subordonnées

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{K}^n$. On construit à partir de $\|\cdot\|$ une norme matricielle $|||\cdot|||$ sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ qui vérifie $|||I_n||| = 1$. On se base sur le résultat suivant :

Soit $\|\cdot\|$ une norme <u>sur $\mathbb{K}^n$</u>. On construit à partir de $\|\cdot\|$ une norme matricielle $|||\cdot|||$ sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ qui vérifie $|||I_n||| = 1$. On se base sur le résultat suivant :

**Lemme 4**

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

# II. Normes matricielles subordonnées

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{K}^n$. On construit à partir de $\|\cdot\|$ une norme matricielle $|||\cdot|||$ sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ qui vérifie $|||I_n||| = 1$. On se base sur le résultat suivant :

**Lemme 4**

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. L'application $\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n \backslash \{0\} & \rightarrow & [0,+\infty[ \\ v & \mapsto & \frac{\|Av\|}{\|v\|} \end{array}$ admet un maximum,

# II. Normes matricielles subordonnées

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{K}^n$. On construit à partir de $\|\cdot\|$ une norme matricielle $|||\cdot|||$ sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ qui vérifie $|||I_n||| = 1$. On se base sur le résultat suivant :

**Lemme 4**

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. L'application $\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n\backslash\{0\} & \to & [0,+\infty[ \\ v & \mapsto & \frac{\|Av\|}{\|v\|} \end{array}$ admet un maximum, que l'on note $|||A|||$.