Soient F un sev de E et W un sev de E^*.

IV. Annulateur

Soient F un sev de E et W un sev de E^*.

Définition 9

Le sev $F^0 := \{\varphi \in E^* \mid \forall v \in F, \varphi(v) = 0\}$ de E^* est appelé annulateur de F.

IV. Annulateur

Soient F un sev de E et W un sev de E^*.

Définition 9

Le sev $F^0 := \{\varphi \in E^* \mid \forall v \in F, \varphi(v) = 0\}$ de E^* est appelé <u>annulateur de F</u>.
Le sev $W^0 := \{v \in E \mid \forall \varphi \in W, \varphi(v) = 0\}$ de E est appelé <u>annulateur de W</u>.

IV. Annulateur

Soient F un sev de E et W un sev de E^*.

Définition 9

Le sev $F^0 := \{\varphi \in E^* \mid \forall v \in F, \varphi(v) = 0\}$ de E^* est appelé <u>annulateur de F</u>.
Le sev $W^0 := \{v \in E \mid \forall \varphi \in W, \varphi(v) = 0\}$ de E est appelé <u>annulateur de W</u>.

Soient $\{v_1, \ldots, v_p\}$ une base de F et $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_q\}$ une base de W.

IV. Annulateur

Soient F un sev de E et W un sev de E^*.

Définition 9

Le sev $F^0 := \{\varphi \in E^* \mid \forall v \in F, \varphi(v) = 0\}$ de E^* est appelé annulateur de F.
Le sev $W^0 := \{v \in E \mid \forall \varphi \in W, \varphi(v) = 0\}$ de E est appelé annulateur de W.

Soient $\{v_1, \ldots, v_p\}$ une base de F et $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_q\}$ une base de W.

Proposition 10

$$F^0 = \{\varphi \in E^* \mid \varphi(v_1) = 0, \ldots, \varphi(v_p) = 0\}$$

$$W^0 = \{v \in E \mid \varphi_1(v) = 0, \ldots, \varphi_q(v) = 0\}$$

Remarque 11

Si $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de E, W^0 est le sev de E caractérisé par le système linéaire

$$\begin{cases} \varphi_1(e_1)x_1 + \cdots + \varphi_1(e_n)x_n = 0 \\ \vdots \\ \varphi_q(e_1)x_1 + \cdots + \varphi_q(e_n)x_n = 0 \end{cases}$$

en les coordonnées $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.

IV. Annulateur

Proposition 12

$$\dim\left(F^0\right) = \dim(E) - \dim(F)$$

$$\dim\left(W^0\right) = \dim\left(E^*\right) - \dim(W) = \dim\left(E\right) - \dim(W)$$

IV. Annulateur

Proposition 12

$$\dim\left(F^0\right) = \dim(E) - \dim(F)$$

$$\dim\left(W^0\right) = \dim\left(E^*\right) - \dim(W) = \dim\left(E\right) - \dim(W)$$

Corollaire 13

$$\left(F^0\right)^0 = F$$

$$\left(W^0\right)^0 = W$$

Soient F un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Soient F un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Définition 14

L'application linéaire

$$^{t}f : \begin{array}{ccc} F^* & \to & E^* \\ \varphi & \mapsto & \varphi \circ f \end{array}$$

est appelée transposée de f.

V. Application transposée

Soient F un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Définition 14

L'application linéaire

$$^t f : \begin{array}{ccc} F^* & \to & E^* \\ \varphi & \mapsto & \varphi \circ f \end{array}$$

est appelée transposée de f.

Proposition 15

Soient $g \in \mathcal{L}(E, F)$, $h \in \mathcal{L}(F, G)$ (où G est un $\mathbb{K}$-ev), $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

V. Application transposée

Soient F un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Définition 14

L'application linéaire

$$ {}^t f : \begin{array}{ccc} F^* & \to & E^* \\ \varphi & \mapsto & \varphi \circ f \end{array} $$

est appelée transposée de f.

Proposition 15

Soient $g \in \mathcal{L}(E, F)$, $h \in \mathcal{L}(F, G)$ (où G est un $\mathbb{K}$-ev), $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

- ${}^t(\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Id}_{E^*}$

V. Application transposée

Soient F un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Définition 14

L'application linéaire

$$ {}^t f : \begin{array}{ccc} F^* & \to & E^* \\ \varphi & \mapsto & \varphi \circ f \end{array} $$

est appelée transposée de f.

Proposition 15

Soient $g \in \mathcal{L}(E, F)$, $h \in \mathcal{L}(F, G)$ (où G est un $\mathbb{K}$-ev), $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

- ${}^t(\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Id}_{E^*}$
- ${}^t(\lambda f + \mu g) = \lambda\, {}^t f + \mu\, {}^t g$

V. Application transposée

Soient F un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Définition 14

L'application linéaire

$$^tf : \begin{array}{ccc} F^* & \to & E^* \\ \varphi & \mapsto & \varphi \circ f \end{array}$$

est appelée <u>transposée de f</u>.

Proposition 15

Soient $g \in \mathcal{L}(E, F)$, $h \in \mathcal{L}(F, G)$ (où G est un $\mathbb{K}$-ev), $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

- $^t(\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Id}_{E^*}$
- $^t(\lambda f + \mu g) = \lambda\, ^tf + \mu\, ^tg$
- $^t(h \circ f) = {}^tf \circ {}^th$

V. Application transposée

Soient F un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Définition 14

L'application linéaire

$$^t f : \begin{array}{ccc} F^* & \to & E^* \\ \varphi & \mapsto & \varphi \circ f \end{array}$$

est appelée transposée de f.

Proposition 15

Soient $g \in \mathcal{L}(E, F)$, $h \in \mathcal{L}(F, G)$ (où G est un $\mathbb{K}$-ev), $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

- $^t(\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Id}_{E^*}$
- $^t(\lambda f + \mu g) = \lambda\, {}^t f + \mu\, {}^t g$
- $^t(h \circ f) = {}^t f \circ {}^t h$
- f bijective $\Rightarrow$ $^t f$ bijective et $({}^t f)^{-1} = {}^t\left(f^{-1}\right)$

Soient $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{C}$ une base de F.

Soient $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{C}$ une base de F.

Proposition 16

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}^*,\mathcal{B}^*}\left({}^t f\right) = {}^t\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$$

Chapitre 2 : Espaces euclidiens

I. Introduction

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ une application $E \times E \to \mathbb{R}$.

I. Introduction

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ une application $E \times E \to \mathbb{R}$.

Définition 1

On dit que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est

1. bilinéaire, i.e. $\forall v_1, v_2, w_1, w_2 \in E$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
   $\langle \lambda v_1 + \mu v_2, w \rangle = \lambda \langle v_1, w \rangle + \mu \langle v_2, w \rangle$ et
   $\langle v, \lambda w_1 + \mu w_2 \rangle = \lambda \langle v, w_1 \rangle + \mu \langle v, w_2 \rangle$,

I. Introduction

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ une application $E \times E \to \mathbb{R}$.

Définition 1

On dit que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est

1. bilinéaire, i.e. $\forall v_1, v_2, w_1, w_2 \in E$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
   $\langle \lambda v_1 + \mu v_2, w \rangle = \lambda \langle v_1, w \rangle + \mu \langle v_2, w \rangle$ et
   $\langle v, \lambda w_1 + \mu w_2 \rangle = \lambda \langle v, w_1 \rangle + \mu \langle v, w_2 \rangle$,
2. symétrique, i.e. $\forall v, w \in E$, $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$,

I. Introduction

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ une application $E \times E \to \mathbb{R}$.

Définition 1

On dit que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est

1. bilinéaire, i.e. $\forall v_1, v_2, w_1, w_2 \in E$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\langle \lambda v_1 + \mu v_2, w \rangle = \lambda \langle v_1, w \rangle + \mu \langle v_2, w \rangle$ et $\langle v, \lambda w_1 + \mu w_2 \rangle = \lambda \langle v, w_1 \rangle + \mu \langle v, w_2 \rangle$,
2. symétrique, i.e. $\forall v, w \in E$, $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$,
3. définie positive, i.e. $\forall v \in E$, $\langle v, v \rangle \geq 0$ et ($\langle v, v \rangle = 0$ ssi $v = 0_E$).

I. Introduction

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et soit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ une application $E \times E \to \mathbb{R}$.

Définition 1

On dit que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E si $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est

1. bilinéaire, i.e. $\forall v_1, v_2, w_1, w_2 \in E$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
   $\langle \lambda v_1 + \mu v_2, w\rangle = \lambda\langle v_1, w\rangle + \mu\langle v_2, w\rangle$ et
   $\langle v, \lambda w_1 + \mu w_2\rangle = \lambda\langle v, w_1\rangle + \mu\langle v, w_2\rangle$,
2. symétrique, i.e. $\forall v, w \in E$, $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$,
3. définie positive, i.e. $\forall v \in E$, $\langle v, v\rangle \geq 0$ et $(\langle v, v\rangle = 0$ ssi $v = 0_E)$.

Exemple 2

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. L'application
$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\text{can}} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\ ;\ ((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) \mapsto x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$
est un p.s. sur $\mathbb{R}^n$, appelé produit scalaire canonique.

I. Introduction

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ une application $E \times E \to \mathbb{R}$.

Définition 1

On dit que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est

1. bilinéaire, i.e. $\forall v_1, v_2, w_1, w_2 \in E$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
$\langle \lambda v_1 + \mu v_2, w \rangle = \lambda \langle v_1, w \rangle + \mu \langle v_2, w \rangle$ et
$\langle v, \lambda w_1 + \mu w_2 \rangle = \lambda \langle v, w_1 \rangle + \mu \langle v, w_2 \rangle$,
2. symétrique, i.e. $\forall v, w \in E$, $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$,
3. définie positive, i.e. $\forall v \in E$, $\langle v, v \rangle \geq 0$ et $(\langle v, v \rangle = 0$ ssi $v = 0_E)$.

Exemple 2

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. L'application
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{can}} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; $((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) \mapsto x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$
est un p.s. sur $\mathbb{R}^n$, appelé produit scalaire canonique.

On étudie les $\mathbb{R}$-ev de dimension finie munis d'un p.s., appelés espaces euclidiens.