II. Norme euclidienne

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien. On note $\|\cdot\|$ l'application $E \to [0, +\infty[\ ;\ v \mapsto \sqrt{\langle v, v\rangle}$.

II. Norme euclidienne

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. On note $\| \cdot \|$ l'application $E \to [0, +\infty[\ ;\ v \mapsto \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

Soient $v, w \in E$.

Lemme 3 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$ et $|\langle v, w \rangle| = \|v\| \|w\|$ ssi v et w sont liés.

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. On note $\| \cdot \|$ l'application $E \to [0, +\infty[\ ;\ v \mapsto \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

Soient $v, w \in E$.

Lemme 3 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$ et $|\langle v, w \rangle| = \|v\| \|w\|$ ssi v et w sont liés.

Corollaire 4 (Inégalité triangulaire)

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

II. Norme euclidienne

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. On note $\| \cdot \|$ l'application $E \to [0, +\infty[\ ;\ v \mapsto \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

Soient $v, w \in E$.

Lemme 3 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$ et $|\langle v, w \rangle| = \|v\| \|w\|$ ssi v et w sont liés.

Corollaire 4 (Inégalité triangulaire)

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

Conséquence

L'application $\| \cdot \|$ est une "norme" sur E, appelée norme euclidienne.

II. Norme euclidienne

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. On note $\| \cdot \|$ l'application $E \to [0, +\infty[\ ;\ v \mapsto \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

Soient $v, w \in E$.

Lemme 3 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$ et $|\langle v, w \rangle| = \|v\| \|w\|$ ssi v et w sont liés.

Corollaire 4 (Inégalité triangulaire)

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

Conséquence

L'application $\| \cdot \|$ est une “norme” sur E, appelée <u>norme euclidienne</u>.

Remarque

On a $\langle v, w \rangle = \frac{1}{2} \left(\|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2 \right)$.

III. Orthogonalité

Soient $v, w \in E$ et A un sous-ensemble de E.

III. Orthogonalité

Soient $v, w \in E$ et A un sous-ensemble de E.

Définition 5

On dit que v et w sont orthogonaux si $\langle v, w \rangle = 0$.

III. Orthogonalité

Soient $v, w \in E$ et A un sous-ensemble de E.

Définition 5

On dit que v et w sont <u>orthogonaux</u> si $\langle v, w \rangle = 0$.
On appelle le sev

$$A^{\perp} := \{v \in E \mid \forall w \in A, \langle v, w \rangle = 0\}$$

de E l'<u>orthogonal de A</u>.

III. Orthogonalité

Soient $v, w \in E$ et A un sous-ensemble de E.

Définition 5

On dit que v et w sont orthogonaux si $\langle v, w \rangle = 0$.
On appelle le sev

$$A^{\perp} := \{v \in E \mid \ \forall w \in A, \langle v, w \rangle = 0\}$$

de E l'orthogonal de A.

Remarque 6

- Une famille de vecteurs non nuls orthogonaux deux à deux, appelée famille orthogonale, est libre.

III. Orthogonalité

Soient $v, w \in E$ et A un sous-ensemble de E.

Définition 5

On dit que v et w sont orthogonaux si $\langle v, w\rangle = 0$.
On appelle le sev

$$A^{\perp} := \{v \in E \mid \; \forall w \in A, \langle v, w\rangle = 0\}$$

de E l'orthogonal de A.

Remarque 6

- Une famille de vecteurs non nuls orthogonaux deux à deux, appelée famille orthogonale, est libre.
- $\{0_E\}^{\perp} = E$ et $E^{\perp} = \{0_E\}$.

III. Orthogonalité

Soient $v, w \in E$ et A un sous-ensemble de E.

Définition 5

On dit que v et w sont orthogonaux si $\langle v, w \rangle = 0$.
On appelle le sev

$$A^{\perp} := \{v \in E \mid \ \forall w \in A, \langle v, w \rangle = 0\}$$

de E l'orthogonal de A.

Remarque 6

- Une famille de vecteurs non nuls orthogonaux deux à deux, appelée famille orthogonale, est libre.
- $\{0_E\}^{\perp} = E$ et $E^{\perp} = \{0_E\}$.

Lemme 7 (Théorème de Pythagore)

v et w sont orthogonaux ssi $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$.

III. Orthogonalité

Soit F un sev de E.

Proposition 8

1. $\dim(E) = \dim(F) + \dim\left(F^{\perp}\right)$

III. Orthogonalité

Soit F un sev de E.

Proposition 8

1. $\dim(E) = \dim(F) + \dim\left(F^{\perp}\right)$
2. $E = F \oplus F^{\perp}$

III. Orthogonalité

Soit F un sev de E.

Proposition 8

1. $\dim(E) = \dim(F) + \dim\left(F^\perp\right)$
2. $E = F \oplus F^\perp$
3. $\left(F^\perp\right)^\perp = F$

III. Orthogonalité

Soit F un sev de E.

Proposition 8

1. $\dim(E) = \dim(F) + \dim\left(F^\perp\right)$
2. $E = F \oplus F^\perp$
3. $\left(F^\perp\right)^\perp = F$

Définition 9

On appelle <u>projection orthogonale sur F</u> la projection de E sur F parallèlement à $F^\perp$, notée p_F.

III. Orthogonalité

Soit F un sev de E.

Proposition 8

1. $\dim(E) = \dim(F) + \dim\left(F^{\perp}\right)$
2. $E = F \oplus F^{\perp}$
3. $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F$

Définition 9

On appelle projection orthogonale sur F la projection de E sur F parallèlement à $F^{\perp}$, notée p_F.

On appelle symétrie orthogonale par rapport à F la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^{\perp}$, notée s_F.

III. Orthogonalité

Soit F un sev de E.

Proposition 8

1. $\dim(E) = \dim(F) + \dim\left(F^{\perp}\right)$
2. $E = F \oplus F^{\perp}$
3. $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F$

Définition 9

On appelle projection orthogonale sur F la projection de E sur F parallèlement à $F^{\perp}$, notée p_F.

On appelle symétrie orthogonale par rapport à F la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^{\perp}$, notée s_F.

Soit $v \in E$.

Proposition 10

$$d(v, F) := \inf_{w \in F} \|v - w\| = \|v - p_F(v)\|$$

Pour $v \in E$, on note $\Lambda_v : E \to \mathbb{R}$; $w \mapsto \langle v, w \rangle$.

IV. Orthogonalité et dualité

Pour $v \in E$, on note $\Lambda_v : E \to \mathbb{R}\ ;\ w \mapsto \langle v, w \rangle$.

Théorème 11

L'application $\Lambda : E \to E^*\ ;\ v \mapsto \Lambda_v$ est un isomorphisme linéaire "canonique".

IV. Orthogonalité et dualité

Pour $v \in E$, on note $\Lambda_v : E \to \mathbb{R}$; $w \mapsto \langle v, w \rangle$.

Théorème 11

L'application $\Lambda : E \to E^*$; $v \mapsto \Lambda_v$ est un isomorphisme linéaire "canonique".

Conséquence

$\forall \varphi \in E^*$, $\exists v \in E$ t.q. $\forall w \in E$, $\varphi(w) = \langle v, w \rangle$, et $v = \Lambda^{-1}(\varphi)$.

IV. Orthogonalité et dualité

Pour $v \in E$, on note $\Lambda_v : E \to \mathbb{R}$; $w \mapsto \langle v, w\rangle$.

Théorème 11

L'application $\Lambda : E \to E^*$; $v \mapsto \Lambda_v$ est un isomorphisme linéaire "canonique".

Conséquence

$\forall \varphi \in E^*$, $\exists v \in E$ t.q. $\forall w \in E$, $\varphi(w) = \langle v, w\rangle$, et $v = \Lambda^{-1}(\varphi)$.

Corollaire 12

$$\Lambda\left(F^{\perp}\right) = F^0$$

IV. Orthogonalité et dualité

Pour $v \in E$, on note $\Lambda_v : E \to \mathbb{R}\ ;\ w \mapsto \langle v, w \rangle$.

Théorème 11

L'application $\Lambda : E \to E^*\ ;\ v \mapsto \Lambda_v$ est un isomorphisme linéaire "canonique".

Conséquence

$\forall \varphi \in E^*$, $\exists v \in E$ t.q. $\forall w \in E$, $\varphi(w) = \langle v, w \rangle$, et $v = \Lambda^{-1}(\varphi)$.

Corollaire 12

$$\Lambda\left(F^{\perp}\right) = F^0$$

Corollaire 13

$$\dim(E) = \dim(F) + \dim\left(F^{\perp}\right)$$

Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E.

V. Bases orthogonales, bases orthonormales

Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E.

Définition 14

- On dit que $\mathcal{B}$ est une base orthogonale si $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j \Rightarrow \langle e_i, e_j \rangle = 0$.

V. Bases orthogonales, bases orthonormales

Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E.

Définition 14

- On dit que $\mathcal{B}$ est une base orthogonale si $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j \Rightarrow \langle e_i, e_j \rangle = 0$.
- On dit que $\mathcal{B}$ est une base orthonormale si $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i\,j}$.

V. Bases orthogonales, bases orthonormales

Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E.

Définition 14

- On dit que $\mathcal{B}$ est une base orthogonale si $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j \Rightarrow \langle e_i, e_j \rangle = 0.$
- On dit que $\mathcal{B}$ est une base orthonormale si $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i\,j}.$

Exemple 15

La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une base orthonormale pour $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{can}}$.

V. Bases orthogonales, bases orthonormales

Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E.

Définition 14

- On dit que $\mathcal{B}$ est une base orthogonale si $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j \Rightarrow \langle e_i, e_j \rangle = 0$.
- On dit que $\mathcal{B}$ est une base orthonormale si $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$.

Exemple 15

La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une base orthonormale pour $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{can}}$.

Remarque 16

1. Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormale alors, pour tous $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i, w = \sum_{i=1}^n y_i e_i \in E$, $\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

V. Bases orthogonales, bases orthonormales

Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E.

Définition 14

- On dit que $\mathcal{B}$ est une base orthogonale si $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j \Rightarrow \langle e_i, e_j \rangle = 0$.
- On dit que $\mathcal{B}$ est une base orthonormale si $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i\,j}$.

Exemple 15

La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une base orthonormale pour $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{can}}$.

Remarque 16

1. Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormale alors, pour tous $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i, w = \sum_{i=1}^n y_i e_i \in E$, $\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.
2. Pour tous $v \in E$, $v = \sum_{i=1}^n \langle v, e_i \rangle e_i$.

V. Bases orthogonales, bases orthonormales

Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E.

Définition 14

- On dit que $\mathcal{B}$ est une base orthogonale si $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j \Rightarrow \langle e_i, e_j \rangle = 0$.
- On dit que $\mathcal{B}$ est une base orthonormale si $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i\,j}$.

Exemple 15

La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une base orthonormale pour $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{can}}$.

Remarque 16

1. Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormale alors, pour tous $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i, w = \sum_{i=1}^n y_i e_i \in E$, $\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.
2. Pour tous $v \in E$, $v = \sum_{i=1}^n \langle v, e_i \rangle e_i$.
3. On peut "normaliser" une base orthogonale en une base orthonormale.

Théorème 17

Il existe toujours une base orthonormale pour $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Théorème 17

Il existe toujours une base orthonormale pour $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Preuve : A partir d'une base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de E, on peut construire une base orthonormale à l'aide du
procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.