V. Bases orthogonales, bases orthonormales

Théorème 17

Il existe toujours une base orthonormale pour $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Preuve : A partir d'une base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de E, on peut construire une base orthonormale à l'aide du
procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Théorème 17

Il existe toujours une base orthonormale pour $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Preuve : A partir d'une base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de E, on peut construire une base orthonormale à l'aide du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Conséquence

Si $\dim(E) = n$, $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ peut être "identifié" à $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{can}})$.

VI. Représentation matricielle du produit scalaire

Soient $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base (quelconque) de E et $v, w \in E$.

VI. Représentation matricielle du produit scalaire

Soient $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base (quelconque) de E et $v, w \in E$. Notons $X := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ et $Y := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(w)$.

Soient $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base (quelconque) de E et $v, w \in E$. Notons $X := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ et $Y := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(w)$.

Définition 18

On appelle matrice représentative du p.s. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dans la base $\mathcal{B}$ la matrice

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{ps}}\left(\langle \cdot, \cdot \rangle\right) := \left(\langle e_i, e_j \rangle\right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

Soient $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base (quelconque) de E et $v, w \in E$. Notons $X := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ et $Y := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(w)$.

Définition 18

On appelle matrice représentative du p.s. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dans la base $\mathcal{B}$ la matrice

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{ps}}\left(\langle \cdot, \cdot \rangle\right) := \left(\langle e_i, e_j \rangle\right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

Si on note A cette matrice, on a alors $\langle v, w \rangle = {}^t X A Y$.

VI. Représentation matricielle du produit scalaire

Soient $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base (quelconque) de E et $v, w \in E$. Notons $X := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ et $Y := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(w)$.

Définition 18

On appelle matrice représentative du p.s. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dans la base $\mathcal{B}$ la matrice

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{ps}}\left(\langle \cdot, \cdot \rangle\right) := \left(\langle e_i, e_j \rangle\right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

Si on note A cette matrice, on a alors $\langle v, w \rangle = {}^tXAY$.

Remarque 19

- $\mathcal{B}$ est orthonormale par rapport à $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ssi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{ps}}\left(\langle \cdot, \cdot \rangle\right) = I_n$.

VI. Représentation matricielle du produit scalaire

Soient $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base (quelconque) de E et $v, w \in E$. Notons $X := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ et $Y := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(w)$.

Définition 18

On appelle matrice représentative du p.s. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dans la base $\mathcal{B}$ la matrice

$$\mathrm{Mat}^{\mathrm{ps}}_{\mathcal{B}}\left(\langle \cdot, \cdot \rangle\right) := \left(\langle e_i, e_j \rangle\right)_{1 \le i,j \le n}$$

Si on note A cette matrice, on a alors $\langle v, w \rangle = {}^tXAY$.

Remarque 19

- $\mathcal{B}$ est orthonormale par rapport à $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ssi $\mathrm{Mat}^{\mathrm{ps}}_{\mathcal{B}}\left(\langle \cdot, \cdot \rangle\right) = I_n$.
- La matrice $\mathrm{Mat}^{\mathrm{ps}}_{\mathcal{B}}\left(\langle \cdot, \cdot \rangle\right)$ est symétrique et inversible.

VI. Représentation matricielle du produit scalaire

Soient $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base (quelconque) de E et $v, w \in E$. Notons $X := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ et $Y := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(w)$.

Définition 18

On appelle matrice représentative du p.s. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dans la base $\mathcal{B}$ la matrice

$$\mathrm{Mat}^{\mathrm{ps}}_{\mathcal{B}}\left(\langle \cdot, \cdot \rangle\right) := \left(\langle e_i, e_j \rangle\right)_{1 \le i,j \le n}$$

Si on note A cette matrice, on a alors $\langle v, w \rangle = {}^tXAY$.

Remarque 19

- $\mathcal{B}$ est orthonormale par rapport à $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ssi $\mathrm{Mat}^{\mathrm{ps}}_{\mathcal{B}}\left(\langle \cdot, \cdot \rangle\right) = I_n$.
- La matrice $\mathrm{Mat}^{\mathrm{ps}}_{\mathcal{B}}\left(\langle \cdot, \cdot \rangle\right)$ est symétrique et inversible.
- Attention à ne pas confondre avec la matrice représentative d'une application linéaire !

Soit $\mathcal{B}'$ une autre base de E.

Soit $\mathcal{B}'$ une autre base de E.

Proposition 20 (changement de base pour le produit scalaire)

$$\mathrm{Mat}^{\mathrm{ps}}_{\mathcal{B}'}\left(\langle\cdot,\cdot\rangle\right) = {}^{t}P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}\,\mathrm{Mat}^{\mathrm{ps}}_{\mathcal{B}}\left(\langle\cdot,\cdot\rangle\right)P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$$

Soit $\mathcal{B}'$ une autre base de E.

Proposition 20 (changement de base pour le produit scalaire)

$$\mathrm{Mat}^{\mathrm{ps}}_{\mathcal{B}'}\left(\langle\cdot,\cdot\rangle\right) = {}^{t}P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}\,\mathrm{Mat}^{\mathrm{ps}}_{\mathcal{B}}\left(\langle\cdot,\cdot\rangle\right) P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$$

Remarque

Attention à ne pas confondre avec le changement de base pour une application linéaire !

VII. Endomorphisme adjoint

Soit f un endomorphisme de E.

VII. Endomorphisme adjoint

Soit f un endomorphisme de E.

Proposition 21

Il existe un unique endomorphisme f^* de E tel que

$$\forall v, w \in E, \langle f(v), w\rangle = \langle v, f^*(w)\rangle .$$

VII. Endomorphisme adjoint

Soit f un endomorphisme de E.

Proposition 21

Il existe un unique endomorphisme f^* de E tel que

$$\forall v, w \in E, \langle f(v), w \rangle = \langle v, f^*(w) \rangle \,.$$

f^* est appelé endomorphisme adjoint de f.

VII. Endomorphisme adjoint

Soit f un endomorphisme de E.

Proposition 21

Il existe un unique endomorphisme f^* de E tel que

$$\forall v, w \in E, \langle f(v), w \rangle = \langle v, f^*(w) \rangle .$$

f^* est appelé endomorphisme adjoint de f.

Proposition 22

Soient $g \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

VII. Endomorphisme adjoint

Soit f un endomorphisme de E.

Proposition 21

Il existe un unique endomorphisme f^* de E tel que

$$\forall v, w \in E, \langle f(v), w \rangle = \langle v, f^*(w) \rangle .$$

f^* est appelé endomorphisme adjoint de f.

Proposition 22

Soient $g \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- $(\mathrm{Id}_E)^* = \mathrm{Id}_E$

VII. Endomorphisme adjoint

Soit f un endomorphisme de E.

Proposition 21

Il existe un unique endomorphisme f^* de E tel que

$$\forall v, w \in E, \langle f(v), w \rangle = \langle v, f^*(w) \rangle .$$

f^* est appelé endomorphisme adjoint de f.

Proposition 22

Soient $g \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- $(\mathrm{Id}_E)^* = \mathrm{Id}_E$
- $(\lambda f + \mu g)^* = \lambda f^* + \mu g^*$

Soit f un endomorphisme de E.

Proposition 21

Il existe un unique endomorphisme f^* de E tel que

$$\forall v, w \in E, \langle f(v), w \rangle = \langle v, f^*(w) \rangle .$$

f^* est appelé endomorphisme adjoint de f.

Proposition 22

Soient $g \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- $(\mathrm{Id}_E)^* = \mathrm{Id}_E$
- $(\lambda f + \mu g)^* = \lambda f^* + \mu g^*$
- $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$

VII. Endomorphisme adjoint

Soit f un endomorphisme de E.

Proposition 21

Il existe un unique endomorphisme f^* de E tel que

$$\forall v, w \in E, \langle f(v), w \rangle = \langle v, f^*(w) \rangle .$$

f^* est appelé endomorphisme adjoint de f.

Proposition 22

Soient $g \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- $(\mathrm{Id}_E)^* = \mathrm{Id}_E$
- $(\lambda f + \mu g)^* = \lambda f^* + \mu g^*$
- $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$
- f bijective $\Rightarrow$ f^* bijective et $(f^*)^{-1} = \left(f^{-1}\right)^*$

VII. Endomorphisme adjoint

Soit f un endomorphisme de E.

Proposition 21

Il existe un unique endomorphisme f^* de E tel que

$$\forall v, w \in E, \langle f(v), w \rangle = \langle v, f^*(w) \rangle .$$

f^* est appelé endomorphisme adjoint de f.

Proposition 22

Soient $g \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- $(\mathrm{Id}_E)^* = \mathrm{Id}_E$
- $(\lambda f + \mu g)^* = \lambda f^* + \mu g^*$
- $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$
- f bijective $\Rightarrow$ f^* bijective et $(f^*)^{-1} = \left(f^{-1}\right)^*$
- $(f^*)^* = f$

Proposition 23

Soit $\mathcal{B}$ une base <u>orthonormale</u> de E. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(f^*\right) = {}^t\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f).$$

Proposition 23

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(f^*\right) = {}^t\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f).$$

Corollaire 24

$$\mathrm{rg}\left(f^*\right) = \mathrm{rg}\left(f\right) \quad \text{et} \quad \det\left(f^*\right) = \det\left(f\right).$$

Soit f un endomorphisme de E.

Soit f un endomorphisme de E.

Définition 25

On dit que f est un endomorphisme orthogonal si $f^* \circ f = \mathrm{Id}_E$.

VIII. Matrices et endomorphismes orthogonaux

Soit f un endomorphisme de E.

Définition 25

On dit que f est un endomorphisme orthogonal si $f^* \circ f = \mathrm{Id}_E$.

Exemple 26

Id_E est un endomorphisme orthogonal.

Soit f un endomorphisme de E.

Définition 25

On dit que f est un <u>endomorphisme orthogonal</u> si $f^* \circ f = \mathrm{Id}_E$.

Exemple 26

Id_E est un endomorphisme orthogonal.

Remarque 27

Si f est orthogonal alors f est inversible et $f^{-1} = f^*$.

VIII. Matrices et endomorphismes orthogonaux

Soit f un endomorphisme de E.

Définition 25

On dit que f est un endomorphisme orthogonal si $f^* \circ f = \mathrm{Id}_E$.

Exemple 26

Id_E est un endomorphisme orthogonal.

Remarque 27

Si f est orthogonal alors f est inversible et $f^{-1} = f^*$.

Proposition 28

f est orthogonal

Soit f un endomorphisme de E.

Définition 25

On dit que f est un endomorphisme orthogonal si $f^* \circ f = \mathrm{Id}_E$.

Exemple 26

Id_E est un endomorphisme orthogonal.

Remarque 27

Si f est orthogonal alors f est inversible et $f^{-1} = f^*$.

Proposition 28

f est orthogonal ssi $\forall v, w \in E$, $\langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle$

VIII. Matrices et endomorphismes orthogonaux

Soit f un endomorphisme de E.

Définition 25

On dit que f est un endomorphisme orthogonal si $f^* \circ f = \mathrm{Id}_E$.

Exemple 26

Id_E est un endomorphisme orthogonal.

Remarque 27

Si f est orthogonal alors f est inversible et $f^{-1} = f^*$.

Proposition 28

f est orthogonal ssi $\forall v, w \in E$, $\langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle$ ssi $\forall v \in E$, $\|f(v)\| = \|v\|$

VIII. Matrices et endomorphismes orthogonaux

Soit f un endomorphisme de E.

Définition 25

On dit que f est un endomorphisme orthogonal si $f^* \circ f = \mathrm{Id}_E$.

Exemple 26

Id_E est un endomorphisme orthogonal.

Remarque 27

Si f est orthogonal alors f est inversible et $f^{-1} = f^*$.

Proposition 28

f est orthogonal ssi $\forall v, w \in E$, $\langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle$ ssi $\forall v \in E$, $\|f(v)\| = \|v\|$ ssi f est une isométrie.