Proposition 29

f est orthogonal

Proposition 29

f est orthogonal ssi f associe à toute base orthonormale de E une base orthonormale de E.

Proposition 29

f est orthogonal ssi f associe à toute base orthonormale de E une base orthonormale de E.

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E.

Proposition 29

f est orthogonal ssi f associe à toute base orthonormale de E une base orthonormale de E.

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. On note $A := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

VIII. Matrices et endomorphismes orthogonaux

Proposition 29

f est orthogonal ssi f associe à toute base orthonormale de E une base orthonormale de E.

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. On note $A := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Proposition 30

f est orthogonal ssi ${}^tAA = I_n$

VIII. Matrices et endomorphismes orthogonaux

Proposition 29

f est orthogonal ssi f associe à toute base orthonormale de E une base orthonormale de E.

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. On note $A := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Proposition 30

f est orthogonal ssi ${}^tAA = I_n$ ssi la matrice A est orthogonale.

VIII. Matrices et endomorphismes orthogonaux

Proposition 29

f est orthogonal ssi f associe à toute base orthonormale de E une base orthonormale de E.

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. On note $A := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Proposition 30

f est orthogonal ssi ${}^tAA = I_n$ ssi la matrice A est orthogonale.

Corollaire 31

Si f est orthogonal alors $\det(f) = 1$ (f est dit direct) ou $\det(f) = -1$ (f est dit indirect).

VIII. Matrices et endomorphismes orthogonaux

Proposition 29

f est orthogonal ssi f associe à toute base orthonormale de E une base orthonormale de E.

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. On note $A := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Proposition 30

f est orthogonal ssi ${}^tAA = I_n$ ssi la matrice A est orthogonale.

Corollaire 31

Si f est orthogonal alors $\det(f) = 1$ (f est dit direct) ou $\det(f) = -1$ (f est dit indirect).

Proposition 32

L'ensemble $\mathcal{O}(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ des endomorphismes orthogonaux de E est un sous-groupe de $(\mathcal{GL}(E), \circ)$.

IX. Décomposition QR

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On note $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$: il s'agit d'un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \cdot)$.

Théorème 33

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Il existe $Q \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure telles que $A = QR$.

Chapitre 3 : Rappels et compléments sur la réduction des endomorphismes

I. Introduction

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif quelconque et soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

I. Introduction

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif quelconque et soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

I. Introduction

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif quelconque et soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
But : Déterminer la représentation matricielle la plus "simple" possible de f.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

Définition 1

- On dit que λ est une <u>valeur propre de f</u> s'il existe $v \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $f(v) = \lambda v$

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

Définition 1

- On dit que λ est une valeur propre de f s'il existe $v \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $f(v) = \lambda v \Leftrightarrow (f - \lambda \mathrm{Id}_E)(v) = 0_E$.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

Définition 1

- On dit que λ est une valeur propre de f s'il existe $v \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $f(v) = \lambda v \Leftrightarrow (f - \lambda \mathrm{Id}_E)(v) = 0_E$.
- Dans ce cas, on note $E_\lambda := \mathrm{Ker}\ (f - \lambda \mathrm{Id}_E)$ le sous-espace propre de f associé à λ.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

Définition 1

- On dit que λ est une valeur propre de f s'il existe $v \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $f(v) = \lambda v \Leftrightarrow (f - \lambda \mathrm{Id}_E)(v) = 0_E$.
- Dans ce cas, on note $E_\lambda := \mathrm{Ker}\ (f - \lambda \mathrm{Id}_E)$ le sous-espace propre de f associé à λ. Un vecteur non nul de E_λ est appelé vecteur propre.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

Définition 1

- On dit que λ est une valeur propre de f s'il existe $v \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $f(v) = \lambda v \Leftrightarrow (f - \lambda \mathrm{Id}_E)(v) = 0_E$.
- Dans ce cas, on note $E_\lambda := \mathrm{Ker}\ (f - \lambda \mathrm{Id}_E)$ le sous-espace propre de f associé à λ. Un vecteur non nul de E_λ est appelé vecteur propre.
- On note $\mathrm{Sp}(f)$ l'ensemble des valeurs propres de f.

Proposition 2

λ est une valeur propre de f

Proposition 2

λ est une valeur propre de f ssi $\det\left(f - \lambda \mathrm{Id}_E\right) = 0$

Proposition 2

λ est une valeur propre de f ssi $\det(f - \lambda \mathrm{Id}_E) = 0$ ssi λ est une racine du polynôme $\chi_f := \det(f - X\mathrm{Id}_E) \in \mathbb{K}[X]$,

III. Polynôme caractéristique

Proposition 2

λ est une valeur propre de f ssi $\det(f - \lambda \mathrm{Id}_E) = 0$ ssi λ est une racine du polynôme $\chi_f := \det(f - X\mathrm{Id}_E) \in \mathbb{K}[X]$, appelé polynôme caractéristique de f.

Proposition 2

λ est une valeur propre de f ssi $\det(f - \lambda \mathrm{Id}_E) = 0$ ssi λ est une racine du polynôme $\chi_f := \det(f - X\mathrm{Id}_E) \in \mathbb{K}[X]$, appelé polynôme caractéristique de f.

On note $n := \dim(E)$.

Proposition 2

λ est une valeur propre de f ssi $\det(f - \lambda \mathrm{Id}_E) = 0$ ssi λ est une racine du polynôme $\chi_f := \det(f - X\mathrm{Id}_E) \in \mathbb{K}[X]$, appelé polynôme caractéristique de f.

On note $n := \dim(E)$.

Proposition 3

$\deg \chi_f = n$

III. Polynôme caractéristique

Proposition 2

λ est une valeur propre de f ssi $\det(f - \lambda \mathrm{Id}_E) = 0$ ssi λ est une racine du polynôme $\chi_f := \det(f - X\mathrm{Id}_E) \in \mathbb{K}[X]$, appelé polynôme caractéristique de f.

On note $n := \dim(E)$.

Proposition 3

$\deg \chi_f = n$ et donc $\mathrm{Card}\ \mathrm{Sp}(f) \leq n$.

Proposition 2

λ est une valeur propre de f ssi $\det(f - \lambda \mathrm{Id}_E) = 0$ ssi λ est une racine du polynôme $\chi_f := \det(f - X\mathrm{Id}_E) \in \mathbb{K}[X]$, appelé <u>polynôme caractéristique de f</u>.

On note $n := \dim(E)$.

Proposition 3

$\deg \chi_f = n$ et donc $\mathrm{Card}\,\mathrm{Sp}(f) \leq n$.

Remarque 3

Attention au corps de base ! Si $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \subset \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{-i, i\}$.

Définition 4

On dit que f est diagonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale.

IV. Diagonalisabilité et diagonalisation

Définition 4

On dit que f est <u>diagonalisable</u> s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale.

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ les valeurs propres deux à deux distinctes de f.

IV. Diagonalisabilité et diagonalisation

Définition 4

On dit que f est <u>diagonalisable</u> s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale.

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ les valeurs propres deux à deux distinctes de f.

Théorème 5

- Les espaces propres de f sont en somme directe.

IV. Diagonalisabilité et diagonalisation

Définition 4

On dit que f est diagonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ les valeurs propres deux à deux distinctes de f.

Théorème 5

- Les espaces propres de f sont en somme directe.
- f est diagonalisable ssi $E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_n} = E$

Définition 4

On dit que f est <u>diagonalisable</u> s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale.

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ les valeurs propres deux à deux distinctes de f.

Théorème 5

- Les espaces propres de f sont en somme directe.
- f est diagonalisable ssi $E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_n} = E$ ssi $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \dim\left(E_{\lambda_i}\right) = \dim(E)$.