Calcul Matriciel : Contrôle continu (22 octobre 2020)

Durée : 2h. Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Exercice 1

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que l'annulateur de F est un sous-espace vectoriel du dual E^* de E.
2. Donner la définition d'une base orthonormale dans un espace euclidien.
3. Enoncer le théorème de Cayley-Hamilton.

Solution : Voir cours.

Exercice 2

1. Montrer que la famille $\{(1,-2,-1),(-1,1,2),(1,0,0)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer sa base duale. En déduire une équation linéaire du plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $(1,-2,-1)$ et $(-1,1,2)$.

Solution : Notons $v_1 := (1,-2,-1)$, $v_2 := (-1,1,2)$ et $v_3 := (1,0,0)$. Si l'on considère la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs v_1, v_2 et v_3 dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a $\det(A) = -3 \neq 0$ donc la matrice A est inversible et la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Notons-la $\mathcal{B}$ et notons $\mathcal{B}_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Alors $A = P_{\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}}$ et la matrice de passage $P_{\mathcal{B}_0^* \to \mathcal{B}^*}$ de la base duale $\mathcal{B}_0^* = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ de la base canonique à la base duale $\mathcal{B}^* = \{v_1^*, v_2^*, v_3^*\}$ de la base $\mathcal{B}$ est égale à la matrice

$$ {}^tP_{\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}}{}^{-1} = {}^tA^{-1} = {}^t\begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}. $$

Ainsi, $\mathcal{B}^* = \{v_1^*, v_2^*, v_3^*\} = \left\{-\frac{2}{3}e_2^* + \frac{1}{3}e_3^*\ ,\ -\frac{1}{3}e_2^* + \frac{2}{3}e_3^*\ ,\ e_1^* + \frac{1}{3}e_2^* + \frac{1}{3}e_3^*\right\}$.

Enfin, si $F := \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}$, on a $F^0 = \mathrm{Vect}\{v_3^*\}$ et

$$ F = \left(F^0\right)^0 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid v_3^*(x,y,z) = 0\right\} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z = 0\right\}. $$

2. On considère les formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$

$$ \varphi_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & -y+z \end{array},\quad \varphi_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & 2x \end{array},\quad \varphi_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & -x+y+2z \end{array} $$

On note $\{f_1, f_2, f_3\}$ la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Ecrire les coordonnées de φ_1, φ_2 et φ_3 dans cette base et montrer que la famille $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ est une base de $\left(\mathbb{R}^3\right)^*$.

Solution : On a $\varphi_1 = -f_2 + f_3$, $\varphi_2 = 2f_1$ et $\varphi_3 = -f_1 + f_2 + 2f_3$. Si l'on note alors $M := \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des formes linéaires φ_1, φ_2 et φ_3 dans la base $\{f_1, f_2, f_3\}$ de $\left(\mathbb{R}^3\right)^*$, on a $\det(M) = 6 \neq 0$ donc M est inversible et la famille $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ est une base de $\left(\mathbb{R}^3\right)^*$

Exercice 3 Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et soient F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que $(F_1 + F_2)^\perp = F_1^\perp \cap F_2^\perp$.

   Solution : Soit $v \in (F_1 + F_2)^\perp$. Soit $w_1 \in F_1$, alors $\langle v, w_1\rangle = 0$ car $w_1 \in F_1 \subset F_1 + F_2$ et $v \in (F_1 + F_2)^\perp$. Ainsi $v \in F_1^\perp$. Soit maintenant $w_2 \in F_2$, alors $\langle v, w_2\rangle = 0$ car $w_2 \in F_2 \subset F_1 + F_2$ et $v \in (F_1 + F_2)^\perp$. Ainsi $v \in F_2^\perp$ et donc $v \in F_1^\perp \cap F_2^\perp$. On a donc $(F_1 + F_2)^\perp \subset F_1^\perp \cap F_2^\perp$.

   Réciproquement, soit $v \in F_1^\perp \cap F_2^\perp$, et soit $w \in F_1 + F_2$: il existe $w_1 \in F_1$ et $w_2 \in F_2$ tels que $w = w_1 + w_2$ et donc

   $$\begin{aligned} \langle v, w\rangle &= \langle v, w_1 + w_2\rangle \\ &= \langle v, w_1\rangle + \langle v, w_2\rangle \text{ (le produit scalaire } \langle\cdot,\cdot\rangle \text{ est linéaire à droite)} \\ &= 0 + 0 \text{ (car } w_1 \in F_1 \text{ et } v \in F_1^\perp\text{, et } w_2 \in F_2 \text{ et } v \in F_2^\perp) \\ &= 0 \end{aligned}$$

   Ainsi $v \in (F_1 + F_2)^\perp$ et on a donc $(F_1 + F_2)^\perp \subset (F_1 + F_2)^\perp$.

   Au total, $(F_1 + F_2)^\perp = F_1^\perp \cap F_2^\perp$.

2. Montrer que $F_1^\perp + F_2^\perp \subset (F_1 \cap F_2)^\perp$.

   Solution : Soit $v \in F_1^\perp + F_2^\perp$: il existe $v_1 \in F_1^\perp$ et $v_2 \in F_2^\perp$ tels que $v = v_1 + v_2$. Soit maintenant $w \in F_1 \cap F_2$, alors

   $$\begin{aligned} \langle v, w\rangle &= \langle v_1 + v_2, w\rangle \\ &= \langle v_1, w\rangle + \langle v_2, w\rangle \text{ (le produit scalaire } \langle\cdot,\cdot\rangle \text{ est linéaire à gauche)} \\ &= 0 + 0 \text{ (car } w \in F_1 \text{ et } v_1 \in F_1^\perp\text{, et } w \in F_2 \text{ et } v_2 \in F_2^\perp) \\ &= 0 \end{aligned}$$

   Ainsi, $v \in (F_1 \cap F_2)^\perp$ et donc $F_1^\perp + F_2^\perp \subset (F_1 \cap F_2)^\perp$.

3. En utilisant un argument de dimension, montrer que $F_1^\perp + F_2^\perp = (F_1 \cap F_2)^\perp$.

Solution : On a

$$\begin{aligned}
\dim\left(F_1^{\perp}+F_2^{\perp}\right) &= \dim\left(F_1^{\perp}\right)+\dim\left(F_1^{\perp}\right)-\dim\left(F_1^{\perp}\cap F_2^{\perp}\right)\\
&= \dim\left(F_1^{\perp}\right)+\dim\left(F_1^{\perp}\right)-\dim\left((F_1+F_2)^{\perp}\right) \quad \text{(par la question 1.)}\\
&= (\dim(E)-\dim(F_1))+(\dim(E)-\dim(F_2))-(\dim(E)-\dim(F_1+F_2))\\
&= \dim(E)-(\dim(F_1)+\dim(F_2)-\dim(F_1+F_2))\\
&= \dim(E)-\dim(F_1\cap F_2)\\
&= \dim\left((F_1\cap F_2)^{\perp}\right)
\end{aligned}$$

Comme de plus, par la question 2., on a l'inclusion $F_1^{\perp}+F_2^{\perp} \subset (F_1\cap F_2)^{\perp}$, on a finalement l'égalité $F_1^{\perp}+F_2^{\perp} = (F_1\cap F_2)^{\perp}$.

Exercice 4 1. Déterminer une base orthonormale du sous-espace vectoriel $F := \mathrm{Vect}\left\{(1,0,1),(1,2,3)\right\}$ de $\mathbb{R}^3$, par rapport au produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$.

Solution : On note $v_1 := (1,0,1)$ et $v_2 := (1,2,3)$. Les deux vecteurs v_1 et v_2 forment une famille libre et génératrice de F donc une base de F, à laquelle on applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt pour obtenir une base orthonormale de F.

On pose

$$\begin{aligned}
\epsilon_1 &:= v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\\
\epsilon_2 &:= v_2-\frac{\langle v_2,\epsilon_1\rangle}{\|\epsilon_1\|^2}\epsilon_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}-\frac{4}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

et la famille $\{\epsilon_1,\epsilon_2\}$ est alors une base orthogonale de F.

Si l'on pose enfin

$$\begin{aligned}
e_1 &:= \frac{\epsilon_1}{\|\epsilon_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\\
e_2 &:= \frac{\epsilon_2}{\|\epsilon_2\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

la famille $\{e_1,e_2\}$ est une base orthonormale de F.

2. Montrer que la matrice

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&-1&2\\-1&2&1\end{pmatrix}$$

de $M_3(\mathbb{R})$ est inversible et déterminer la décomposition QR de A.

Solution : On a $\det(A) = -4 \neq 0$ donc la matrice A est inversible.

Pour obtenir la décomposition QR de A, commençons par appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt aux vecteurs colonnes $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $v_3 := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ de A considérés comme des vecteurs de $\mathbb{R}^3$: comme A est inversible, la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ (et la matrice A est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $\{v_1, v_2, v_3\}$).

On pose donc

$$\begin{aligned}
\epsilon_1 &:= v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\
\epsilon_2 &:= v_2 - \frac{\langle v_2, \epsilon_1 \rangle}{\|\epsilon_1\|^2}\epsilon_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{-2}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\epsilon_3 &:= v_3 - \frac{\langle v_3, \epsilon_1 \rangle}{\|\epsilon_1\|^2}\epsilon_1 - \frac{\langle v_3, \epsilon_2 \rangle}{\|\epsilon_2\|^2}\epsilon_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-2}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{-2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\epsilon_3' &:= \frac{3}{2}\epsilon_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
e_1 &:= \frac{\epsilon_1}{\|\epsilon_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\
e_2 &:= \frac{\epsilon_2}{\|\epsilon_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
e_3 &:= \frac{\epsilon_3'}{\|\epsilon_3'\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

et la famille $\{e_1, e_2, e_3\}$ est alors une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$. On pose

$$Q := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

la matrice orthogonale de $O_3(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs e_1, e_2 et e_3 dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ (il s'agit de la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $\{e_1, e_2, e_3\}$).

On calcule enfin la matrice de passage de la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ à la base $\{v_1, v_2, v_3\}$. On a

$$\begin{array}{rcl} v_1 &=& \epsilon_1 = \sqrt{2}e_1 \\ v_2 &=& -\epsilon_1 + \epsilon_2 = -\sqrt{2}e_1 + \sqrt{3}e_2 \\ v_3 &=& -\epsilon_1 - \dfrac{2}{3}\epsilon_2 + \epsilon_3 = -\epsilon_1 - \dfrac{2}{3}\epsilon_2 + \dfrac{2}{3}\epsilon_3' = -\sqrt{2}\ e_1 - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}e_2 + \dfrac{2\sqrt{6}}{3}e_3 \end{array}$$

et on pose alors

$$R := \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3} & -\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$$

la matrice de passage de la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ à la base $\{v_1, v_2, v_3\}$.

La décomposition QR de la matrice A est ainsi

$$A = QR = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3} & -\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$$

(on pouvait également obtenir la matrice R en calculant le produit ${}^tQA$: comme Q est orthogonale, $A = QR \Leftrightarrow R = {}^tQA$).

Exercice 5 On considère la matrice

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

de $M_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\chi_D = (-1 - X)^3$.

Solution : On a

$$\begin{array}{rcl} \chi_D = \det(D - XI_3) &=& \begin{vmatrix} 3 - X & 0 & 8 \\ 3 & -1 - X & 6 \\ -2 & 0 & -5 - X \end{vmatrix} \\ &=& (-1 - X)\begin{vmatrix} 3 - X & 8 \\ -2 & -5 - X \end{vmatrix} \\ &=& (-1 - X)[(3 - X)(-5 - X) + 16] \\ &=& (-1 - X)(X^2 + 2X + 1) \\ &=& (-1 - X)(X + 1)^2 \\ &=& (-1 - X)^3 \end{array}$$

2. Déterminer le polynôme minimal de D.

   Solution : Comme $\chi_D = -(X+1)^3$, le polynôme minimal de μ_D est $X+1$, $(X+1)^2$ ou $(X+1)^3$. Or $X+1$ n'est pas un polynôme annulateur de D (car $D \neq -I_3$) et

$$(D+I_3)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}^2 = 0_3$$

   donc $\mu_D = (X+1)^2$.

3. La matrice D est-elle diagonalisable ? Triangularisable ?

   Solution : Comme le polynôme minimal de D n'est pas scindé à racines simples, D n'est pas diagonalisable. Mais χ_D est scindé (sur $\mathbb{R}$) donc D est triangularisable.

4. Déterminer la forme de Jordan de D.

   Solution : D possède une unique valeur propre, à savoir -1, et D n'est pas diagonalisable. La forme de Jordan de D est donc $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Considérons alors la matrice nilpotente $U := D + I_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$. L'indice de nilpotence de U est 2 d'après un calcul précédent. La forme de Jordan de D contient donc un bloc de Jordan de taille 2 et la forme de Jordan de D est donc

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5. Déterminer une réduction de Jordan de D.

   Solution : Avec les notations de la question précédente, choisissons un vecteur $Y \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $UY \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, par exemple le vecteur $Y := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Alors $UY = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Enfin, pour compléter la famille libre $\{UY, Y\}$, choisissons un vecteur dans le noyau de U et qui ne soit pas dans $\mathrm{Vect}\{UY, Y\}$, par exemple $Z := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

La famille $\{UY, Y, Z\}$ est alors une base de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et, si l'on note P la matrice inversible $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a alors

$$P^{-1}DP = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$