Feuille de TD 1+ : Dualité, aspects effectifs

Exercice 1 *Le but de l'exercice est de déterminer un système d'équation pour un sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^5$.*

1. Soit $a = (1, 2, 0, 0, 0)$, $b = (3, 4, 0, 0, 0)$ et $c = (0, 0, 1, 1, 1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^5$ et V le sous-espace vectoriel $vect(a, b, c)$ de $\mathbb{R}^5$ engendré par $\{a, b, c\}$. Montrer que $\{a, b, c\}$ est une famille libre et la completer en une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^5$.

2. Déterminer la base duale de la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^5$.

3. Déterminer l'annulateur V° du sous-espace vectoriel V. Déterminer un système d'équation pour V.

4. Soit $d = (1, 4, 1, 2, 0)$ et $V' = vect(a, b, c, d) = V + vect(d)$. En utilisant la formule (de l'exercice 4 de la feuille précédente)
$$(V')^\circ = (V + vect(d))^\circ = V^\circ \cap (vect(d))^\circ,$$
déterminer l'annulateur $(V')^\circ$ de V' et un système d'équation pour V'.

Exercice 2 Déterminer un système d'équation pour le sous-espace W de $\mathbb{R}^4$ engendré par $\alpha = (1, 2, -3, 2)$, $\beta = (1, 1, -2, 2)$, $\gamma = (0, 1, -1, 0)$.

Exercice 3 Soit $a = (1, 2, 0)$, $b = (3, 4, 0)$ et $c = (0, 0, 1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = \{a, b, c\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer la base duale de la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

3. Déterminer une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$ qui vaut 1 sur a, 2 sur b et 3 sur c.

Exercice 4 Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des polynômes en une indéterminée, à coefficients réels et de degré au plus 2 muni de la base $\mathcal{B} = \{1, X, X^2\}$. Soit $\mathcal{B}_0 = \{e_1, e_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $(\mathcal{B}_0)^\star = \{e_1^\star, e_2^\star\}$ sa base duale. Considérons l'application
$$\begin{array}{rccc} f: & E & \to & \mathbb{R}^2 \\ & P & \mapsto & \begin{pmatrix} P(1) \\ P(2) \end{pmatrix} \end{array}$$

1. Écrire la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_0$.

2. Écrire la matrice de ${}^t f$ dans les bases $(\mathcal{B}_0)^\star$ et $\mathcal{B}^\star$.

3. Compléter
$$\begin{array}{rccc} {}^t f: & (\mathbb{R}^2)^\star & \to & E^\star \\ & u = \lambda e_1^\star + \mu e_2^\star & \mapsto & \left\{ \begin{array}{rccc} {}^t f(u): & E & \to & \mathbb{R} \\ & P = a + bX + cX^2 & \mapsto & \end{array} \right. \end{array}$$