Feuille de TD 2 : Espaces euclidiens

Exercice 1 On considère l'application

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ ((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)) & \mapsto & x_1x_2+2y_1y_2+3z_1z_2+x_1y_2+y_1x_2 \end{array}$$

Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2 Soit $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne induite par $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Les deux questions ci-dessous sont indépendantes.

1. Montrer que, pour tous $v,w\in E$, $\|v+w\|^2+\|v-w\|^2 = 2\left(\|v\|^2+\|w\|^2\right)$.
2. Soit $\{v_1,\dots,v_p\}$ une famille orthogonale de E. Montrer que $\left\|\sum_{i=1}^{p} v_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{p}\|v_i\|^2$.

Exercice 3 Déterminer l'orthogonal

1. du vecteur $(1,1,1)$ dans l'espace euclidien $\left(\mathbb{R}^3,\langle\cdot,\cdot\rangle_{\text{can}}\right)$,
2. de l'hyperplan d'équation $x+2y-z+t=0$ dans $\left(\mathbb{R}^4,\langle\cdot,\cdot\rangle_{\text{can}}\right)$,
3. du sous-espace vectoriel engendré par $(1,1,0)$ et $(-1,2,1)$ dans $\left(\mathbb{R}^3,\langle\cdot,\cdot\rangle_{\text{can}}\right)$.

Exercice 4 Soit $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et soient A et B deux sous-ensembles de E.

1. Montrer que $A^\perp = (\mathrm{Vect}(A))^\perp$ (où $\mathrm{Vect}(A)$ est le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs de A).
2. Montrer que $(A\cup B)^\perp = A^\perp\cap B^\perp$.

Exercice 5 Soit $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et soit F un sous-espace vectoriel de E. Les trois questions ci-dessous sont indépendantes.

1. Soit p un projecteur de E. Justifier que p est un projecteur orthogonal ssi $\operatorname{Ker} p = (\operatorname{Im} p)^\perp$.
2. Montrer que, pour tous $v,w\in E$, $\langle p_F(v),w\rangle = \langle v,p_F(w)\rangle$ (le projecteur orthogonal p_F est donc auto-adjoint).
3. Montrer que si $\{v_1,\dots,v_p\}$ est une base orthonormale de F alors, pour tout $v\in E$,

$$p_F(v) = \sum_{i=1}^{p}\langle v,v_i\rangle v_i.$$

Exercice 6 Appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt aux familles libres

1. $\{(1,1),(2,3)\}$ de $\big(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\text{can}}\big)$,
2. $\{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$ de $\big(\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\text{can}}\big)$,
3. $\{(1,0,1,0),(1,1,2,0),(-1,2,-1,1),(-1,-1,1,15)\}$ de $\big(\mathbb{R}^4, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\text{can}}\big)$
4. $\{(1,2,1),(-1,0,-1)\}$ de $\big(\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\text{can}}\big)$, puis, pour ce cas, compléter la famille orthonormale obtenue en une base orthonormale de $\big(\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\text{can}}\big)$,
5. $\{(1,0,1),(1,1,1),(-1,1,0)\}$ de $\big(\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\text{can}}\big)$, puis, pour ce cas, donner la décomposition QR de la matrice A de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont formées, dans l'ordre, par les vecteurs $(1,0,1)$, $(1,1,1)$ et $(-1,1,0)$.

Exercice 7 Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice orthogonale de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Ecrire les équations en $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ caractérisant l'orthogonalité de A.
2. En déduire la forme générale des matrices orthogonales de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 8 Déterminer si les matrices suivantes de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sont orthogonales :

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 9 Déterminer la décomposition QR des matrices inversibles suivantes :

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$