Feuille de TD 3 : Réduction des endomorphismes

Exercice 1 1. Déterminer si chacune des matrices suivantes de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ est diagonalisable et, si oui, la diagonaliser :

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \\ 6 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

2. Déterminer si chacune des matrices suivantes de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ et $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ respectivement est diagonalisable et, si oui, la diagonaliser :

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 2 On considère la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_4(\mathbb{C})$. Expliquer sans calcul pourquoi A n'est pas diagonalisable.

Exercice 3 1. Pour quelles valeurs de $a, b, c \in \mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ est-elle diagonalisable ?

2. Pour quelles valeurs de $a, b, c \in \mathbb{C}$ la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ a & b & c \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 4 On considère la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Calculer $(A - 2I_3)^k$ pour $k \in \mathbb{N}$.
3. En déduire l'expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 On considère les matrices $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -9 & 1 & 9 \\ 9 & 0 & -8 \end{pmatrix}$ et $D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = D$.
2. Déterminer une matrice $C \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $C^3 = D$.
3. En déduire une matrice $B \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^3 = A$.

Exercice 6 On considère la matrice $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$.

1. Montrer que le polynôme $X^2 + 1$ est un polynôme annulateur de la A.
2. En déduire sans calcul le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de A.
3. La matrice A est-elle diagonalisable ? Est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 7 On considère les matrices $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $C := \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.
On a $\chi_A = -(X+1)(X+2)(X-3)$, $\chi_B = (X-1)(X+2)^2$ et $\chi_C = (X-1)^3$.

1. Déterminer les polynômes minimaux de A, B et C.
2. Pour chacune des matrices A, B et C, déterminer si elle est diagonalisable ou non.

Exercice 8 Déterminer le polynôme minimal des matrices de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 9 On considère les matrices $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $D := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$

1. Montrer que D est diagonalisable.
2. Déterminer les polynômes caractéristiques et les polynômes minimaux de A, B et C.
3. Parmi les matrices A, B et C, lesquelles sont diagonalisables et laquelle est semblable à D ?

Exercice 10 Réduire sous forme de Jordan les matrices réelles suivantes :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & -5 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D := \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11 On considère la matrice $A := \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Calculer le polynôme caractéristique χ_A de A et en déduire la forme de Jordan de A.
2. On note J la forme de Jordan de A et soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer J^n.
3. Déterminer une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = J$.
4. Calculer A^n.
5. Retrouver le résultat précédent en utilisant la division euclidienne de X^n par χ_A.

Exercice 12 En utilisant les matrices, déterminer le terme général de chacune des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes, définies par $u_0 = -1$, $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

1. $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$,
2. $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$,
3. $u_{n+2} = -u_n$.