Feuille de TD 4 : Exponentielle de matrices
Corrigé

Exercice 1 Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1. Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ i.e. que toute matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est limite d'une suite de matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ (au sens de la norme sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ définie dans le cours). On pourra par exemple commencer par montrer que, pour $k \in \mathbb{N}$ suffisamment grand, la matrice $A_k := A - \frac{1}{k} I_n$ est inversible.

   Solution : On suppose que $\mathbb{K}$ contient le corps des nombres rationels $\mathbb{Q}$. Soit A une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. On note $sp(A)$ l'ensemble fini des valeurs propres de A. L'ensemble des entiers naturels k non nuls tels que $1/k$ soit dans $sp(A)$ est un ensemble fini. Ainsi, il existe $N \in \mathbb{N}^\star$ tel que pour $k \geq N$, $1/k$ n'est pas dans $sp(A)$ et $A_k := A - 1/kI_n$ est donc inversible. Par ailleurs,
$$\|A - A_k\| = \|\frac{1}{k} I_n\| \leq \frac{1}{k}\|I_n\| = \frac{1}{k}\sqrt{\mathrm{tr}({}^t\overline{I_n} I_n)} \leq \frac{1}{k}\sqrt{n}$$
   qui tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$. La suite de matrices inversibles $(A_k)_{k\geq N}$ tend donc vers A. On en déduit que l'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

2. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ i.e. que toute matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est limite d'une suite de matrices diagonalisables de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ (au sens de la norme sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ définie dans le cours). On pourra par exemple commencer par montrer que toute matrice triangulaire supérieure est limite d'une suite de matrices ayant chacune ses valeurs propres deux à deux distinctes.

   Solution : Soit A une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_{n-1} \leq \lambda_n$ ses n valeurs propres comptées avec multiplicités et ordonnées. Il existe une matrice de passage P et une matrice de Jordan J triangulaire supérieure à diagonale $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n-1}, \lambda_n)$ telles que $A = PJP^{-1}$. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^\star$, on note
$$A_k := P\left(J + \mathrm{diag}(\frac{1}{k^n}, \frac{1}{k^{n-1}}, \cdots, \frac{1}{k^2}, \frac{1}{k})\right)P^{-1}.$$
   Puisque ses valeurs propres
$$\lambda_1 + \frac{1}{k^n} < \lambda_2 + \frac{1}{k^{n-1}} < \cdots < \lambda_{n-1} + \frac{1}{k^2} < \lambda_n + \frac{1}{k}$$
   sont toutes deux à deux distinctes, la matrice A_k est diagonalisable. Par ailleurs,
$$\|A - A_k\| \leq \|P\|\|\mathrm{diag}(\frac{1}{k^n}, \frac{1}{k^{n-1}}, \cdots, +\frac{1}{k^2}, \frac{1}{k})\|\|P^{-1}\| \leq \|P\|\|P^{-1}\|\sqrt{n(\frac{1}{k})^2} \leq \frac{\|P\|\|P^{-1}\|\sqrt{n}}{k}$$
   qui tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$. La suite de matrices diagonalisables $(A_k)_{k\geq N}$ tend donc vers A.

Exercice 2 On considère les matrices $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Calculer e^{A+B} et $e^A e^B$. Que peut-on dire de A et B ?

Solution : Par son effet sur les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$, on constate que $A^2 = 0$. Donc, $e^A = I_2 + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Par transposition, $e^B = e^{{}^tA} = {}^t(e^A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et donc

$$e^A e^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que $(A+B)^2 = I_2$ et donc pour n impair $(A+B)^n = (A+B)$ et pour n pair $(A+B)^n = I_2$. On trouve donc

$$e^{A+B} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A+B}{(2k+1)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{I_2}{(2k)!} = \begin{pmatrix} \frac{e+e^{-1}}{2} & \frac{e-e^{-1}}{2} \\ \frac{e-e^{-1}}{2} & \frac{e+e^{-1}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(1) & \sinh(1) \\ \sinh(1) & \cosh(1) \end{pmatrix} \neq e^A e^B.$$

On peut en conclure que A et B ne commutent pas.

Exercice 3 Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que si A et B commutent alors les matrices A et $\exp(B)$ commutent également.

Solution : La matrice e^B est la limite des matrices $C_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{B^k}{k!}$ qui sont des polynômes en B et qui commutent donc avec A. Maintenant, $\|Ae^B - AC_n\| \leq \|A\|\|e^B - C_n\|$ qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Donc,

$$Ae^B = \lim AC_n = \lim C_n A = e^B A.$$

Exercice 4 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & -2 \\ 11 & 17 & -1 \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que la matrice A est nilpotente.

   Solution : On vérifie que

   $$A^2 = \begin{pmatrix} 36 & 54 & 0 \\ -24 & -36 & 0 \\ -12 & -18 & 0 \end{pmatrix} \text{ et pour tout n} \geq 3, A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Calculer e^A.

   Solution :

   $$e^A = I_3 + A + \frac{A^2}{2} = \begin{pmatrix} 22 & 30 & 3 \\ -14 & -19 & -2 \\ 5 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de A.

   Solution :

$$\chi_A(X) = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} 1-X & 4 & -2 \\ 0 & 6-X & -3 \\ -1 & 4 & -X \end{vmatrix} = (X-2)^2(3-X)$$

   (On voit par exemple simplement que pour $X = 2$ la matrice n'est pas de rang maximal, puisque ses colonnes vérifient toutes $x = z$, qui est donc une équation de l'image. Il faut donc chercher à factoriser par $X - 2$.) Puisque le polynôme minimal de A a les mêmes facteurs irréductibles que χ_A, les seules possibilités pour μ_A sont $(X-2)(X-3)$ et $(X-2)^2(X-3)$. Or

$$(A - 2I_3)(A - 3I_3) = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \neq 0.$$

   Par conséquent, le polynôme minimal de A est $\mu_A = (X-2)^2(X-3)$.

2. La matrice A est-elle diagonalisable (sur $\mathbb{R}$) ? Triangularisable (sur $\mathbb{R}$) ?

   Solution : Comme μ_A n'est pas à racines simples, A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Comme μ_A est scindé, A est triangularisable sur $\mathbb{R}$.

3. Calculer $\det\left(e^A\right)$.

   Solution : On sait que

$$\det\left(e^A\right) = e^{\mathrm{tr} A} = e^7.$$

4. Calculer e^A.

   Solution : La forme de Jordan de A a un bloc de taille 1 pour la valeur propre 3 et un bloc de taille 2 pour la valeur propre 2. Elle est donc $J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Puisque $\exp\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \exp\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \exp\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^2 & e^2 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}$, on trouve

$$e^J = \begin{pmatrix} e^3 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & e^2 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}.$$

Reste à déterminer une matrice de passage explicite vers une réduite de Jordan. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On constate que $v_1 := e_1 + e_2 + e_3$ est dans le noyau de $A - 3I_3$. C'est donc un vecteur propre pour la valeur propre 3. L'espace caractéristique pour la valeur propre 2 est le noyau de $(A-2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 3 & 4 & -6 \\ 3 & 4 & -6 \end{pmatrix}$ engendré par $2e_1 + e_3$ et $3e_2 + 2e_3$. Or $(A - 2I_3)(2e_1 + e_3) = -4e_1 - 3e_2 - 4e_3 \neq 0$. On peut donc prendre $v_3 := 2e_1 + e_3$ et $v_2 := (A - 2I_3)v_3 = -4e_1 - 3e_2 - 4e_3$, de sorte que $Av_2 = 2v_2$ et $Av_3 = 2v_3 + v_2$. La matrice de passage de la base canonique à la base (v) est $P = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Comme $A = PJP^{-1}$, $e^A = Pe^JP^{-1} =$ $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^3 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & e^2 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, soit

$$e^A = \begin{pmatrix} 3\,e^3 - 6\,e^2 & 4\,e^3 - 4\,e^2 & -6\,e^3 + 10\,e^2 \\ 3\,e^3 - 6\,e^2 & 4\,e^3 - 3\,e^2 & -6\,e^3 + 9\,e^2 \\ 3\,e^3 - 7\,e^2 & 4\,e^3 - 4\,e^2 & -6\,e^3 + 11\,e^2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$. Calculer e^A.

Solution : Le polynôme caractéristique de A est

$$(X - 1)(X^2 - 2X + 2) = (X - 1)((X - 1)^2 + 1) = (X - 1)(X - 1 + i)(X - 1 - i).$$

La matrice A est donc diagonalisable dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{C})$.

On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{C}^3$. En étudiant la matrice $A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on constate que le vecteur $v_1 := e_2 + e_3$ est vecteur propre pour la valeur propre 1. En étudiant la matrice $A - (1+i)I_3 = \begin{pmatrix} -i & 1 & -1 \\ 0 & -i & 0 \\ 1 & 0 & -i \end{pmatrix}$, on constate que Le vecteur $v_2 = ie_1 + e_3$ est vecteur propre pour la valeur propre $1+i$. Par conjugaison, puisque A est à coefficients réels, le vecteur $v_2 = -ie_1 + e_3$ est vecteur propre pour la valeur propre $1 - i$. La matrice de passage de la base canonique à la base (v) est $P := \begin{pmatrix} 0 & i & -i \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et son inverse $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -i & -1 & 1 \\ i & -1 & 1 \end{pmatrix}$. On trouve donc

$$\begin{aligned} A &= P\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1+i & 0\\ 0 & 0 & 1-i\end{pmatrix}P^{-1} \\ e^A &= P\begin{pmatrix}e & 0 & 0\\ 0 & ee^i & 0\\ 0 & 0 & ee^{-i}\end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} e\cos(1) & e\sin(1) & -e\sin(1)\\ 0 & e & 0\\ e\sin(1) & e(1-\cos(1)) & e\cos(1)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Même si le calcul a requis l'utilisation de coefficients complexes, le résultat est une matrice de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 7 On note $A := \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ et $B := \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$. Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer e^{tA} et e^{tB}.

Solution : On vérifie que $A^2 = -I_2$ et donc pour $n = 2k$, $A^n = (-1)^k I_2$ et pour $n = 2k+1$, $A^n = (-1)^k A$. Ainsi,

$$e^{tA} = I_2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k t^{2k}}{2k!} + A\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} = \begin{pmatrix}\cos(t) & \sin(t)\\ -\sin(t) & \cos(t)\end{pmatrix}.$$

On calcule les premières puissances de B

$$B^2 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \text{ et } B^3 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \text{ et donc pour tout } n \geq 2, B^n = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Donc, on peut calculer

$$e^{tB} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k B^k}{k!} = I_3 + tB + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{t^n B^n}{n!} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix} + (e^t - 1 - t)\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

coefficients par coefficients :

$$e^{tB} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ t & 1 & 0\\ e^t - 1 & 0 & e^t\end{pmatrix}$$

Exercice 8 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 3 & -1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

Calculer, pour $t \in \mathbb{R}$, $\exp(tA)$ puis résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x' &= 2x - y + z\\ y' &= 3y - z\\ z' &= 2x + y + 3z\end{cases}$$

de condition initiale $(x(0), y(0), z(0)) = (1, -2, 1)$.

Solution :

$$\chi_A(X) = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} 2-X & -1 & 1 \\ 0 & 3-X & -1 \\ 2 & 1 & 3-X \end{vmatrix} = (X-2)^2(4-X)$$

(On voit par exemple simplement que pour $X = 2$ la matrice n'est pas de rang maximal, puisque ses colonnes vérifient toutes $y+z = 0$, qui est donc une équation de l'image. Il faut donc chercher à factoriser par $X - 2$.) La matrice $A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 2 puisqu'elle n'est pas de rang maximal et qu'elle a un mineur $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ non nul de taille 2. Par conséquent, son noyau, l'espace propre de valeur propre 2 n'est que de dimension 1 et A n'est donc pas diagonalisable. Puisque χ_A est scindé, elle admet une forme de Jordan $J = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. En remarquant que pour la matrice nilpotente $\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a l'égalité $\exp(t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on trouve

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{4t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Pour déterminer une matrice de passage vers une base de Jordan, on trouve d'abord un vecteur propre pour la valeur propre 4 dans le noyau de $A - 4I_3 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, par exemple $v_1 := e_1 - e_2 + e_3$. On calcule ensuite la matrice $(A - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Puisque e_2 est dans son noyau, il est dans l'espace caractéristique pour la valeur propre 2. Puisque e_2 n'est pas dans le noyau de $A - 2I$, ce n'est pas un vecteur propre pour la valeur prpore 2. On peut donc choisir $v_3 := e_2$ et $v_2 := (A-2I)v_3 = -e_1+e_2+e_3$ de sorte que $Av_3 = 2v_3 + v_2$ et $(A - 2I_2)v_2 = (A - 2I)^2 v_3 = 0$, soit $Av_2 = 2v_2$. La matrice de passage de la base canonique vers la base (v) est $P := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ d'inverse $P^{-1} =$

$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. On trouve donc

$$\begin{aligned} A &= PJP^{-1} \\ e^A &= Pe^{tJ}P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (1-2t)e^{2t}+e^{4t} & -2te^{2t} & -e^{2t}+e^{4t} \\ (1+2t)e^{2t}-e^{4t} & 2(1+t)e^{2t} & e^{2t}-e^{4t} \\ (2t-1)e^{2t}+e^{4t} & 2te^{2t} & e^{2t}+e^{4t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pour déterminer la solution du système différentiel linéaire réécrit en $X' = AX$ avec $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, il suffit maintenant de remarquer qu'elle est donnée par

$$X(t) = e^{tA}X(0) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (1-2t)e^{2t}+e^{4t} & -2te^{2t} & -e^{2t}+e^{4t} \\ (1+2t)e^{2t}-e^{4t} & 2(1+t)e^{2t} & e^{2t}-e^{4t} \\ (2t-1)e^{2t}+e^{4t} & 2te^{2t} & e^{2t}+e^{4t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} te^{2t}+e^{4t} \\ -(1+t)e^{2t}-e^{4t} \\ -te^{2t}+e^{4t} \end{pmatrix}.$$