Feuille de TD 5 : Orthogonalité et réduction

Exercice 1 Diagonaliser “dans une base orthonormale” les matrices symétriques

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 2

1. Donner l'exemple d'un endomorphisme d'un espace vectoriel réel dont le spectre est vide.
2. La matrice
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 1 \\ i & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
de $\mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 3 Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et soit f un endomorphisme symétrique de E.

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f. Montrer que $F^\perp$ est également stable par F.
2. En déduire que, si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de f, $(E_\lambda)^\perp$ est stable par f.

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et soit $A \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive.

1. Montrer que les coefficients diagonaux de A sont strictement positifs.
2. Montrer que le déterminant de A est strictement positif.
3. Montrer que les mineurs principaux de A (un mineur principal de A est le déterminant d'une sous-matrice obtenue en supprimant les lignes et colonnes de mêmes indices) sont tous strictement positifs.

Exercice 5 Calculer le carré des matrices $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Laquelle de ces matrices est la racine carrée de la matrice identité $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?

Exercice 6 Pour chacune des matrices symétriques suivantes de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, déterminer s'il s'agit d'une matrice positive, définie positive ou non positive, puis, dans les deux premiers cas, calculer la racine carrée de la matrice :

$$A := \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & -2 \\ -2 & -2 & 10 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7 Que signifie la décomposition polaire en dimension 1 ?

Exercice 8 Déterminer la décomposition polaire des matrices inversibles suivantes de $M_3(\mathbb{R})$:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 3\sqrt{2} & -\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 3\sqrt{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Exercice 9 Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, on considère l'endomorphisme f dont la matrice représentative dans la base canonique est la matrice

$$A := \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 & -4 \\ -4 & 5 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 5 & 2 \\ -4 & -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier sans calcul que f est diagonalisable dans une base orthonormale de $\mathbb{R}^4$.
2. Montrer que l'endomorphisme f est orthogonal. En déduire les seules valeurs propres possibles pour f.
3. Déterminer à partir de la trace de f les multiplicités des valeurs propres de f dans le polynôme caractéristique de f sans calculer celui-ci. En déduire le polynôme caractéristique de f.
4. Déterminer une base orthonormale de l'espace propre E_1 associé à la valeur propre 1 de f.
5. Montrer que l'espace propre E_{-1} associé à la valeur propre -1 de f vérifie $E_{-1} = (E_1)^{\perp}$. En utilisant l'équation linéaire caractérisant E_1, en déduire un vecteur générateur de E_{-1}.
6. Donner une base orthonormale de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice représentative de f est diagonale.

Exercice 10

1. Montrer que toute matrice orthogonale de $O_2(\mathbb{R})$ est diagonalisable en tant que matrice de $M_2(\mathbb{C})$ et déterminer ses valeurs propres complexes.
2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, toute matrice orthogonale de $O_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable en tant que matrice de $M_n(\mathbb{C})$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, déterminer les matrices orthogonales O de $O_n(\mathbb{R})$ vérifiant $(O - I_n)^2 = 0_n$ (0_n désigne la matrice nulle de taille n).

Exercice 11 Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

1. On note X le vecteur colonne de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ dont toutes les coordonnées sont égales à 1. Calculer ${}^tXAX$.
2. Montrer que si la matrice A est orthogonale, alors la valeur absolue de la somme des coefficients de A est inférieure ou égale à n.