Feuille de TD 5 : Orthogonalité et réduction

Exercice 1 Diagonaliser "dans une base orthonormale" les matrices symétriques

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

de $M_3(\mathbb{R})$.

Solution : On a $\chi_A = (3-X)(-X)^2$. Une base orthonormale de $E_3 = \text{Ker } (A - 3I_3) = \text{Ker } \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ est $\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ et une base orthonormale de $E_0 = \text{Ker } (A)$ est $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$. Ainsi, si on note

$$O := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \in O_3(\mathbb{R}),$$

on a

$${}^tOAO = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a $\chi_B = (2-X)(-X)(8-X)$. Une base orthonormale de $E_2 = \text{Ker } (B - 2I_3) = \text{Ker } \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ est $\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, une base orthonormale de $E_0 = \text{Ker } B$ est $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ et une base orthonormale de $E_1 = \text{Ker } (B - 8I_3) = \text{Ker } \begin{pmatrix} -6 & 2 & -2 \\ 2 & -6 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ est $\left\{ \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$. Ainsi, si on note

$$O := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \in O_3(\mathbb{R}),$$

on a

$${}^tOBO = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

On a $\chi_C = (2-X)(-1-X)^2$. Une base orthonormale de $E_2 = \mathrm{Ker}\,(C-2I_3) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$ est $\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$, une base orthonormale de $E_{-1} = \mathrm{Ker}\,(C+I_3) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ est $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\right\}$. Ainsi, si on note

$$O := \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R}),$$

on a

$${}^tOAO = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Exercice 2 1. Donner l'exemple d'un endomorphisme d'un espace vectoriel réel dont le spectre est vide.

Solution : La matrice de l'endomorphisme $f : \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2\\ (x,y) & \mapsto & (y,-x)\end{array}$ de $\mathbb{R}^2$ a pour matrice $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Le polynôme caractéristique de f est donc X^2+1 qui n'a pas de racine réelle et le spectre de f est donc vide.

2. La matrice

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & i\\ 0 & 0 & 1\\ i & 1 & 0\end{pmatrix}$$

de $\mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ est-elle diagonalisable ?

Solution : Si on note M cette matrice, on a

$$\begin{aligned}
\chi_M &= \begin{vmatrix} -X & 0 & i \\ 0 & -X & 1 \\ i & 1 & -X \end{vmatrix} \\
&= (-X) \begin{vmatrix} -X & 1 \\ 1 & -X \end{vmatrix} + i \begin{vmatrix} 0 & i \\ -X & 1 \end{vmatrix} \\
&= (-X)(X^2 - 1) + i(iX) \\
&= (-X)(X^2 - 1 + 1) \\
&= (-X)^3.
\end{aligned}$$

Or M n'est pas la matrice nulle donc $\mu_M = X^2$ ou X^3 et en particulier le polynôme minimal de M n'est pas à racine simple donc M n'est pas diagonalisable.

Exercice 3 Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et soit f un endomorphisme symétrique de E.

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f. Montrer que $F^\perp$ est également stable par F.

   Solution : Soit $v \in F^\perp$. Montrons que $f(v) \in F^\perp$: soit $w \in F$, alors

   $$\begin{aligned}
   \langle f(v), w \rangle &= \langle v, f(w) \rangle \text{ (car } f \text{ est symétrique)} \\
   &= 0 \text{ (car } v \in F^\perp \text{ et } f(w) \in F \text{ car } w \in F \text{ et } f(F) \subset F).
   \end{aligned}$$

   Ainsi $f(v) \in F^\perp$ et $f\left(F^\perp\right) \subset F^\perp$.

2. En déduire que, si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de f, $(E_\lambda)^\perp$ est stable par F.

   Solution : Si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de f alors, pour tout $v \in E_\lambda$, $f(v) = \lambda v \in E_\lambda$ donc E_λ est stable par F. D'après la question précédente, l'orthogonal $(E_\lambda)^\perp$ de E_λ est donc stable par F.

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et soit $A \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive.

1. Montrer que les coefficients diagonaux de A sont strictement positifs.

   Solution : Notons $A = (a_{i\,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, notons X_i le vecteur colonne de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la $i^{\text{ème}}$ coordonnée qui est 1. On a alors ${}^tX_iAX_i > 0$, car A est symétrique définie positive, or ${}^tX_iAX_i = a_{i\,i}$ d'où le résultat.

2. Montrer que le déterminant de A est strictement positif.

   Solution : Comme A est une matrice symétrique définie positive, A est diagonalisable et ses valeurs propres sont strictement positives. Le déterminant d'une matrice diagonalisable étant le produit de ses valeurs propres (comptées avec multiplicité dans le polynôme caractéristique), on obtient le résultat.

3. Montrer que les mineurs principaux de A (un mineur principal de A est le déterminant d'une sous-matrice obtenue en supprimant les lignes et colonnes de mêmes indices) sont tous strictement positifs.

   Solution : Soit B une sous-matrice de taille p de A obtenue en supprimant des lignes et des colonnes de mêmes indices. Si l'on permute deux colonnes de A puis les deux lignes de mêmes indices, on ne change ni le caractère symétrique défini positif de A ni son déterminant (si A représente un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ dans la base canonique, cette opération revient juste à considérer la matrice de f dans la base obtenue en permutant deux vecteurs de la base canonique). On peut ainsi supposer sans perdre de généralité que B a été obtenue en supprimant les $n-p$ dernières colonnes et lignes de A.

   Remarquons que B est une matrice symétrique de taille p. Soit maintenant $\widetilde{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ et $X := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. On a

   $$^t\widetilde{X} B \widetilde{X} = {}^tXAX > 0.$$

   Ainsi la matrice B est symétrique définie positive et, d'après la question précédente, le déterminant de B est donc strictement positif.

Exercice 5 Calculer le carré des matrices $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Laquelle de ces matrices est la racine carrée de la matrice identité $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?

Solution : On a

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

mais la seule matrice symétrique positive parmi les trois matrices proposées est la matrice identité $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice identité $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est donc sa propre racine carrée.

Exercice 6 Pour chacune des matrices symétriques suivantes de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, déterminer s'il s'agit d'une matrice positive, définie positive ou non positive, puis, dans les deux premiers cas, calculer la racine carrée de la matrice :

$$A := \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & -2 \\ -2 & -2 & 10 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solution : On a $\chi_A = (6-X)(4-X)(12-X)$. Ainsi $\mathrm{Sp}(A) \subset]0,+\infty[$ et la matrice symétrique A est donc définie positive. Pour déterminer la racine carrée de A, on commence par diagonaliser A "dans une base orthonormale". Une base orthonormale de E_6 est $\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, une base orthonormale de E_4 est $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ et une base orthonormale de E_{12} est $\left\{ \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$. Si on note alors

$$O := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R}),$$

on a

$$A = O \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} {}^tO$$

et la racine carrée de A est la matrice

$$R := O \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{12} \end{pmatrix} {}^tO = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

On a $B = \frac{1}{2}A$ donc la matrice symétrique B est définie positive et sa racine carrée est la matrice

$$\frac{1}{\sqrt{2}}R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

On a $\chi_C = (1-X)(-X)(4-X)$. Ainsi $\mathrm{Sp}(C) = \{1;0;4\}$ et la matrice symétrique C est donc positive non définie positive. Une base orthonormale de E_1 est $\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$, une base orthonormale de E_0 est $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}$ et une base orthonormale de E_4 est $\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\right\}$, donc, avec la même matrice O que ci-dessus, on a

$$C = O\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&4\end{pmatrix}{}^tO$$

et la racine carrée de C est la matrice

$$O\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}{}^tO = \begin{pmatrix}\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{5}{3}\end{pmatrix}.$$

Exercice 7 Que signifie la décomposition polaire en dimension 1 ?

Solution : Une matrice réelle inversible de dimension 1 correspond à un nombre réel x non nul. En appliquant la méthode pour déterminer la décomposition polaire de x, on est amené à calculer le carré de x puis à considérer la racine carrée de x^2, à savoir $|x|$. La décomposition polaire de x est alors l'expression $x = \frac{x}{|x|}|x|$ où $\frac{x}{|x|} \in \{+1;-1\}$ est le “signe” de x.

Exercice 8 Déterminer la décomposition polaire des matrices inversibles suivantes de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$:

$$A := \begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&1\\-2&-1&-1\end{pmatrix},\quad B := \begin{pmatrix}1&2&1\\-2&-1&-1\\-1&-1&-2\end{pmatrix},\quad C := \begin{pmatrix}3&0&-1\\\frac{\sqrt{2}}{2}&3\sqrt{2}&-\frac{3\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&3\sqrt{2}&\frac{3\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}.$$

Solution : On commence par déterminer la racine carrée de la matrice symétrique positive

$$\widetilde{A} := {}^tAA = \begin{pmatrix}6&5&5\\5&6&5\\5&5&6\end{pmatrix}$$

On a $\chi_{\widetilde{A}} = (16-X)(1-X)^2$, une base orthonormale de E_{16} est $\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ et une base orthonormale de E_1 est $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$. Si on note

$$P := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R}),$$

on a alors

$$\widetilde{A} = P \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} {}^tP$$

et la racine carrée de $\widetilde{A}$ est donc la matrice

$$S := P \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} {}^tP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Son inverse est la matrice

$$S^{-1} = P \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} {}^tP = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

et on calcule enfin la matrice

$$O := AS^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La décomposition polaire de A est ainsi l'égalité

$$A = OS = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\widetilde{B} := {}^tBB = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

matrice symétrique positive dont on a déjà calculé la racine carrée

$$S := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

d'inverse

$$S^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

On calcule alors la matrice

$$O := BS^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

de sorte que

$$B = OS = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

soit la décomposition polaire de B.

Enfin,

- $\widetilde{C} := {}^tCC = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -6 \\ 0 & 36 & 0 \\ -6 & 0 & 10 \end{pmatrix}$,
- $\chi_{\widetilde{C}} = (36 - X)(4 - X)(16 - X)$,
- une base orthonormale de $E_4 = \mathrm{Ker}\ (\widetilde{C} - 4I_3) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 0 & 32 & 0 \\ -6 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ est $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$,
- une base orthonormale de $E_{16} = \mathrm{Ker}\ (\widetilde{C} - 16I_3) = \begin{pmatrix} -6 & 0 & -6 \\ 0 & 20 & 0 \\ -6 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ est $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$,
- une base orthonormale de $E_{36} = \mathrm{Ker}\ (\widetilde{C} - 36I_3) = \begin{pmatrix} -26 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & -26 \end{pmatrix}$ est $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$,

ainsi, si on pose

$$P := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R}),$$

on a

$$\widetilde{C} = P\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{pmatrix}{}^tP$$

et la racine carrée de $\widetilde{A}$ est donc la matrice

$$S := P\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}{}^tP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

d'inverse

$$S^{-1} = P \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} {}^tP = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{8} \end{pmatrix}.$$

On pose enfin

$$O := CS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

et la décomposition polaire de C est alors l'égalité

$$C = OS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9 Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, on considère l'endomorphisme f dont la matrice représentative dans la base canonique est la matrice

$$A := \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 & -4 \\ -4 & 5 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 5 & 2 \\ -4 & -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier sans calcul que f est diagonalisable dans une base orthonormale de $\mathbb{R}^4$.

   Solution : La matrice A, représentative de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ (qui est une base orthonormale pour le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^4$), est symétrique : l'endomorphisme f est donc auto-adjoint et est donc diagonalisable dans une base orthonormale.

2. Montrer que l'endomorphisme f est orthogonal. En déduire les seules valeurs propres possibles pour f.

   Solution : La matrice A, représentative de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ (qui est une base orthonormale pour le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^4$), est orthogonale : l'endomorphisme f est donc orthogonal et les seules valeurs propres possibles pour f sont donc 1 et -1.

3. Déterminer à partir de la trace de f les multiplicités des valeurs propres de f dans le polynôme caractéristique de f sans calculer celui-ci. En déduire le polynôme caractéristique de f.

   Solution : On a $\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{Tr}(A) = 2$. Or f est diagonalisable et les seules valeurs propres possibles pour f sont 1 et -1. On a donc $2 = \mathrm{Tr}(f) = m_1 \times 1 + m_{-1} \times (-1) = m_1 - m_{-1}$

(la trace est invariante par changement de base). De plus, $m_1 + m_{-1} = 4$ (car $\mathbb{R}^4$ est de dimension 4). Ainsi, nécessairement, $m_1 = 3$ et $m_{-1} = 1$ i.e. la valeur propre 1 est de multiplicité 3 dans le polynôme caractéristique de f et la valeur propre -1 est de multiplicité 1, et donc $\chi_f = (1-X)^3(-1-X) = (X-1)^3(X+1)$.

4. Déterminer une base orthonormale de l'espace propre E_1 associé à la valeur propre 1 de f.

Solution : On a

$$\begin{aligned} E_1 = \text{Ker }(A - I_4) &= \text{Ker }\left(\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -8 & -4 & 4 & -4 \\ -4 & -2 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & -2 & 2 \\ -4 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}\right) \\ &= \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + y - z + t = 0\right\} = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}. \end{aligned}$$

Notant $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, on applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ de E_1, pour obtenir la base orthonormale

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}\right\}$$

de E_1.

5. Montrer que l'espace propre E_{-1} associé à la valeur propre -1 de f vérifie $E_{-1} = (E_1)^\perp$. En utilisant l'équation linéaire caractérisant E_1, en déduire un vecteur générateur de E_{-1}.

Solution : Comme l'endormorphisme f de $\mathbb{R}^4$ est auto-adjoint, ses espaces propres E_1 et E_{-1} sont orthogonaux et supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$. On a donc, d'une part, $E_{-1} \subset (E_1)^\perp$ et, d'autre part,

$$\dim\left((E_1)^\perp\right) = 4 - \dim(E_1) = \dim(E_{-1})$$

(car $\mathbb{R}^4 = E_1 \oplus E_{-1}$). Ainsi $E_{-1} = (E_1)^\perp$.

Ensuite, comme $E_1 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x+y-z+t=0\right\} = \left\{\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}^{\perp}$, on a

$$E_{-1} = (E_1)^{\perp} = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

et le vecteur $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$ est donc un vecteur générateur de E_{-1}.

6. Donner une base orthonormale de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice représentative de f est diagonale.

Solution : Une base orthonormale de E_1 est $\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}2\\1\\5\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\\6\end{pmatrix}\right\}$, une base orthonormale de E_{-1} est $\left\{\frac{1}{\sqrt{7}}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ et les espaces propres E_1 et E_{-1} sont orthogonaux, donc la famille

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}2\\1\\5\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\\6\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{7}}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

est une base orthonormale de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice représentative de f est

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}.$$

Exercice 10 1. Montrer que toute matrice orthogonale de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ est diagonalisable en tant que matrice de $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ et déterminer ses valeurs propres complexes.

Solution : Soit $A \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$. On a vu dans l'exercice 7 de la feuille de TD 2 qu'il existait alors $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

- Si $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, on a

$$\begin{aligned} \chi_A = \begin{vmatrix} \cos\theta - X & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - X \end{vmatrix} &= (\cos\theta - X)^2 + \sin^2\theta \\ &= X^2 - 2\cos(\theta)X + 1 \\ &= \left(X - e^{i\theta}\right)\left(X - e^{-i\theta}\right) \end{aligned}$$

  Si $\theta \not\equiv 0\,[\pi]$, χ_A est scindé à racines simples donc A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ de valeurs propres complexes (distinctes) $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$. Si $\theta \equiv 0\,[2\pi]$, alors $A = I_2$ et donc A est diagonale (en particulier diagonalisable), de valeur propre double 1. Si $\theta \equiv \pi\,[2\pi]$, alors $A = -I_2$ et donc A est diagonale (en particulier diagonalisable), de valeur propre double -1.

- Si $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$, A est une matrice symétrique réelle et est donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$, donc sur $\mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned} \chi_A = \begin{vmatrix} \cos\theta - X & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta - X \end{vmatrix} &= (\cos\theta - X)(-\cos\theta - X) - \sin^2\theta \\ &= X^2 - \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ &= X^2 - 1 \\ &= (X-1)(X+1) \end{aligned}$$

  donc les valeurs propres de A sont 1 et -1.

2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, toute matrice orthogonale de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable en tant que matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

Solution : Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et soit $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $r, s \in \mathbb{N}$, pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, $\epsilon_i \in \{+1; -1\}$ et, pour tout $j \in \{1, \dots, s\}$, $\theta_j \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ tels que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \epsilon_r & & & \\ & & & R(\theta_1) & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & R(\theta_s) \end{pmatrix}$$

(où, pour tout $j \in \{1, \ldots, s\}$, $R(\theta_j) := \begin{pmatrix} \cos\theta_j & -\sin\theta_j \\ \sin\theta_j & \cos\theta_j \end{pmatrix}$). Or, pour tout $j \in \{1, \ldots, s\}$, $R(\theta_j) \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ d'après la question 1 : il existe $P_j \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ tel que $P_j^{-1}R(\theta_j)P_j = \begin{pmatrix} e^{i\theta_j} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta_j} \end{pmatrix}$. Si l'on note alors Q la matrice diagonale par blocs

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & P_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & P_s \end{pmatrix},$$

on a

$$Q^{-1}P^{-1}APQ = (PQ)^{-1}A(PQ) = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \epsilon_r & & & & & & \\ & & & e^{i\theta_1} & 0 & & & & \\ & & & 0 & e^{-i\theta_1} & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & e^{i\theta_s} & 0 \\ 0 & & & & & & 0 & e^{-i\theta_s} \end{pmatrix}$$

et, la matrice PQ étant une matrice inversible de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, A est donc diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, déterminer les matrices orthogonales O de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $(O - I_n)^2 = 0_n$ (0_n désigne la matrice nulle de taille n).

   Solution : Soit $O \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $(O - I_n)^2 = 0_n$ i.e. le polynôme $(X-1)^2$ est un polynôme annulateur de O. En particulier le polynôme minimal μ_O de O divise $(X-1)^2$ et est donc $X - 1$ ou $(X-1)^2$. Le spectre complexe de O est donc réduit à la seule valeur propre 1. Or, d'après la question précédente, la matrice O est diagonalisable sur $\mathbb{C}$: la matrice O est donc semblable à la matrice identité I_n et est donc elle-même la matrice identité I_n (remarquons que, réciproquement, la matrice I_n vérifie bien $(I_n - I_n)^2 = 0_n$).

Exercice 11 Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On note X le vecteur colonne de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont toutes les coordonnées sont égales à 1. Calculer ${}^tXAX$.

Solution : Notons $A = (a_{i\,j})_{1\le i,j\le n}$. Alors

$$
{}^tXAX = {}^tX(AX) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{1\,j} \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{n\,j} \end{pmatrix} = \sum_{1\le i,j\le n} a_{i\,j}
$$

2. Montrer que si la matrice A est orthogonale, alors la valeur absolue de la somme des coefficients de A est inférieure ou égale à n.

Solution : Notons f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ représenté par la matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, qui est une base orthonormale pour le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$. Si la matrice A est orthogonale, alors l'endomorphisme f est orthogonal par rapport au produit scalaire canonique.

Notons maintenant $v := (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$. On a

$$
\sum_{1\le i,j\le n} a_{i\,j} = {}^tXAX = {}^tX(AX) = \langle v, f(v)\rangle_{\text{can}}
$$

et donc

$$
\begin{aligned}
\left| \sum_{1\le i,j\le n} a_{i\,j} \right| &= |\langle v, f(v)\rangle_{\text{can}}| \\
&\le \|v\|_{\text{can}}\, \|f(v)\|_{\text{can}} \quad \text{(par l'inégalité de Cauchy-Schwarz)} \\
&= \|v\|_{\text{can}}\, \|v\|_{\text{can}} \quad \text{(car } f \text{ est orthogonal)} \\
&= \|v\|_{\text{can}}^2 \\
&= n
\end{aligned}
$$