Feuille de TD 7 : Matrices stochastiques et théorèmes de Perron-Frobenius

Exercice 1 Soient $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que la matrice A est positive si et seulement si pour tout vecteur $v \geqslant 0$ de $\mathbb{R}^n$, $Av \geqslant 0$.
2. Montrer que la matrice A est strictement positive si et seulement si pour tout vecteur $v \geqslant 0$ non nul de $\mathbb{R}^n$, $Av > 0$.

Exercice 2

1. Donner un exemple de matrice positive non nulle de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ dont le rayon spectral est nul.
2. Donner un exemple de matrice positive non nulle de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ dont le rayon spectral est une valeur propre de multiplicité 2.
3. Donner un exemple de matrice positive non nulle de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ dont le rayon spectral est une valeur propre non dominante.

Exercice 3 Les matrices

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sont-elles primitives ? Irréductibles ?

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice positive et primitive. En particulier, il existe $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ tel que la matrice A^m soit strictement positive.

1. Montrer que, pour tout entier $k \geqslant m$, la matrice A^k est strictement positive.
2. Montrer que la matrice $-A$ est primitive.

Exercice 5 Etudier les valeurs propres de la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$. La matrice A est-elle primitive ? Irréductible ?

Exercice 6 On considère la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R}).$$

1. Montrer que la matrice A est irréductible.
2. Vérifier les conclusions du théorème de Frobenius appliqué à la matrice positive et irréductible A en calculant les valeurs propres de A.
3. La matrice A est-elle primitive ?

Exercice 7 Pour chacune des matrices stochastiques suivantes, déterminer si un vecteur d'état limite existe et, si oui, le déterminer :

$$A := \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,9 & 0,1 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,1 \\ 0 & 0,1 & 0,9 \\ 0,1 & 0 & 0,9 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8 Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que la suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice $L \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $AL = LA = L$.
2. En déduire que
   (a) toute colonne de L est soit nulle soit un vecteur propre de A,
   (b) toute ligne de L est soit nulle soit un vecteur propre de ${}^tA$.