Corrigé des Exercices d'approfondissement du chapitre 2.

Exercice 2.16. Soit $y \in F$. On va montrer qu'il existe une suite (y_n) d'éléments de $f(A)$ qui converge vers y.

Comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Comme A est dense dans E, il existe une suite (x_n) d'éléments de A qui converge vers x. Comme f est continue, la suite $(y_n) = (f(x_n))$ est une suite d'éléments de $f(A)$ qui converge vers $f(x) = y$.

Exercice 2.17.

i. Soit $((x_n, x_n))$ une suite d'éléments de Δ qui converge vers (x, y). On a x_n qui converge vers x et x_n qui converge vers y. L'unicité de la limite nous donne $x = y$.

ii. x appartient à tout voisinage fermé contenant x, donc l'intersection des voisinages contient x. L'intersection des voisinages contenant x est incluse dans l'intersection des boules fermées de centre x et de rayon $1/n$. Cette intersection vaut x car si $y \neq x$ et si n est tel que $d(x, y) > 1/n$, alors la boule fermée de centre x et de rayon $1/n$ ne contient pas y.

iii. Le complémentaire d'un singleton $\{x\}$ est ouvert, car pour tout $y \in E \setminus \{x\}$, si $r = d(x, y)$, la boule ouverte $B(y, r) \subset E \setminus \{x\}$. Donc, les singletons sont fermés. Comme une réunion finie d'ensembles fermés est fermée, on en déduit que tout ensemble fini est fermé.

iv. Si (x_n) est une suite d'éléments de A qui converge vers $x \in E$, il faut montrer que $x \in A$. Or f étant continue, la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(x)$. De même, g étant continue, la suite $(g(x_n))$ converge vers $g(x)$. Comme les suite $(f(x_n))$ et $(g(x_n))$ sont identiques et que la limite est unique, on a $f(x) = g(x)$, ce qui montre que $x \in A$.

Exercice 2.18.

1. D'après la proposition 1.4.4, la fonction d_A est $1-$lipschitzienne, donc continue.

2. Posons $f = d_F/(d_F + d_G)$. La fonction f est bien définie car, pour tout $x \in E$, $d_F(x) + d_G(x) > 0$ (s'il existe $x \in E$ tel que $d_F(x) + d_G(x) = 0$, alors $d_F(x) = d_G(x) = 0$ et donc $x \in \overline{F} \cap \overline{G} = F \cap G = \emptyset$, ce qui est absurde). d_F et d_G sont continues, donc l'application

$$\psi : E \ni x \mapsto (d_F(x), d_G(x)) \in \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2,\ \alpha + \beta > 0$$

est définie et continue.

$$\Phi : \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \alpha + \beta > 0\} \ni (\alpha, \beta) \mapsto \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

est continue, donc f est continue car $f = \Phi \circ \psi$. On a bien $f(x) = 0$ si et seulement si $d_F(x) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{F} = F$ et $f(x) = 1$ si et seulement si $d_F(x) = d_F(x) + d_G(x)$ si et seulement si $d_G(x) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{G} = G$.

3. On peut prendre $O_n^1 = \{x \in E, f(x) < \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\}$, $F_n^1 = \{x \in E,\ f(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\}$, $O_n^2 = \{x \in E,\ f(x) > \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\}$ et $F_n^2 = \{x \in E,\ f(x) \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\}$. Ce sont des ouverts et des fermés en tant qu'images réciproques d'ouverts et de fermés par des fonctions continues et vérifient toutes les propriétés énoncées.

Exercice 2.19.

1. Soit U un ouvert de E. Montrons que $\pi_1(U)$ est ouvert dans E_1. Soit $x_1 \in \pi_1(U)$. Soit $x_2 \in E_2$ tel que $(x_1, x_2) \in U$. On peut prendre la distance D_∞ sur $E_1 \times E_2$. Comme U est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_{d_1}(x_1, \varepsilon) \times B_{d_2}(x_2, \varepsilon) \subset U$. Et donc $B_{d_1}(x_1, \varepsilon) \subset \pi_1(U)$, ce qui montre que $\pi_1(U)$ est ouvert. De même pour $\pi_2(U)$.

2. Prenons $E_1 = E_2 = \mathbb{R}$ munis de la topologie usuelle. Posons $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ xy - 1 = 0\}$. F est un fermé car c'est l'image réciproque de $\{0\}$ par l'application continue $(x, y) \mapsto xy - 1$. Seulement, $(x, y) \in F$ implique $x \neq 0$, et pour tout $x \neq 0$, il existe $y \neq 0$ tel que $xy = 1$. En particulier, $\pi_1(F) = \mathbb{R}^*$ n'est pas fermé dans $E_1 = \mathbb{R}$.

3. Tout d'abord, le produit de deux fermés est fermé : c'est la même preuve que pour l'exercice 1.47 du chapitre 1. Et donc, comme $A_1 \times A_2 \subset \overline{A}_1 \times \overline{A}_2$, on en déduit que $\overline{A_1 \times A_2} \subset \overline{A}_1 \times \overline{A}_2$.

Montrons maintenant l'inclusion réciproque. Soit $(x, y) \in \overline{A}_1 \times \overline{A}_2$. Il existe deux suites (x_n) et (y_n) d'éléments de A_1 et de A_2 telle que (x_n) converge vers x et (y_n) converge vers y. La suite (x_n, y_n) converge vers (x, y), et donc $(x, y) \in \overline{A_1 \times A_2}$. On a donc bien prouvé que $\overline{A_1 \times A_2} = \overline{A}_1 \times \overline{A}_2$.

Exercice 2.20.

1. Soit f une application uniformément continue. On a

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \exists \alpha > 0, \qquad \forall x, y \in E, \qquad d(x, y) \leq \alpha \ \Rightarrow\ d'(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.$$

Soient (x_n) et (y_n) deux suites telles que $\lim_n d(x_n, y_n) = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit α vérifiant la proposition ci-dessus. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad n \geq n_0 \ \Rightarrow\ d(x_n, y_n) \leq \alpha.$$

L'uniforme continuité nous donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad n \geq n_0 \ \Rightarrow\ d'(f(x_n), (y_n)) \leq \varepsilon.$$

On a donc prouvé que

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad n \geq n_0 \ \Rightarrow\ d'(f(x_n), (y_n)) \leq \varepsilon,$$

ce qui montre que $d'(f(x_n), f(y_n))$ tend vers 0. En particulier, si

$$\lim_{n \to +\infty} d'(f(x_n), f(y_n)) > 0,$$

alors f n'est pas uniformément continue.

2. D'après l'inégalité des accroissements finis, les fonctions f_1 et f_3 sont $1-$lipschitziennes donc uniformément continues.
Pour montrer que f_2 et f_4 ne le sont pas, on va utiliser le critère précédent. Pour f_2, on pose

$$x_n = \sqrt{2\pi n} \qquad \text{et} \qquad y_n = \sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}}.$$

Alors $|f(x_n) - f(y_n)| = 1$, et cependant

$$y_n - x_n = \frac{2\pi n + \frac{\pi}{2} - 2\pi n}{\sqrt{2\pi n} + \sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}}} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi n} + \sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De même pour f_4, on pose

$$x_n = \frac{1}{2\pi n} \qquad \text{et} \qquad y_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}.$$

Alors $|f(x_n) - f(y_n)| = 1$, et cependant $x_n - y_n$ tend vers 0.

Exercice 2.21.

1. Dans la définition de la continuité avec les α et les ϵ, on peut prendre $\alpha = 1/2$, quel que soit $\varepsilon > 0$.

2.1. Idem.

2.2. Si f est continue en un point x, alors

$$\exists \alpha > 0, \qquad \forall y \in E, \qquad d(x,y) < \alpha \;\Rightarrow\; \delta(f(x), f(y)) < \frac{1}{2}.$$

Or $\delta(f(x), f(y)) < \frac{1}{2}$ si et seulement si $f(x) = f(y)$, et donc f est constante sur la boule de centre x et de rayon α, ce qui contredit l'injectivité et donc la bijectivité de f.

Exercice 2.22. Il suffit de montrer qu'il existe a et b tels que, pour tout $x \geq 0$, on ait $|f(x)| \leq ax + b$ (le résultat pour $x \leq 0$ étant analogue). Tout d'abord, f étant uniformément continue, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad |x - y| \leq \alpha \;\Rightarrow\; |f(x) - f(y)| \leq 1.$$

Ensuite, on fixe $x > 0$. On relie x à 0 avec une chaine de pas inférieur à α, c'est-à-dire qu'on pose

$$x_0 = 0 < x_1 = \alpha < \cdots < x_k = k\alpha < \cdots < x_N = N\alpha < x_{N+1} = x$$

avec N choisi tel que $0 \leq x - N\alpha < \alpha$. Or, cette inégalité implique $0 \leq \frac{x}{\alpha} - N < 1$, soit encore $N \leq \frac{x}{\alpha} < N + 1$, soit encore $N = \left[\frac{x}{\alpha}\right]$ (partie entière de x/α).

En particulier,

$$|f(x) - f(0)| = \left| \sum_{k=0}^{N} f((x_{k+1}) - f(x_k)) \right| \leq$$

$$\sum_{k=0}^{N} |f((x_{k+1}) - f(x_k))| \leq \sum_{k=0}^{N} 1 = N + 1 = \left[\frac{x}{\alpha}\right] + 1 \leq \frac{x}{\alpha} + 1$$

Et donc $|f(x)| \leq \frac{x}{\alpha} + 1 + |f(0)|$, ce qui prouve le résultat.

La réciproque est fausse. En effet, $|\sin x^2| \leq 1$, et pourtant $\sin x^2$ n'est pas uniformément continue.

Exercice 2.23.

1. Si x_0 est fixé et si x est différent de x_0 alors

$$\frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} \leq C|x - x_0|^{\alpha - 1}$$

avec $\alpha - 1 > 0$, et donc

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0.$$

Ceci montre que f est dérivable en tout point de I, et que $f' = 0$. Comme I est un intervalle, f est donc constante.

2. Si $C = 0$, alors f est constante donc uniformément continue. Si $C > 0$, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \forall x, y \in I, \qquad |x - y| \leq \left(\frac{\varepsilon}{C}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

ce qui montre que f est uniformément continue.

Posons $f(x) = \sqrt{x}$ sur $I = [0, 1]$. On a $|f(x) - f(y)| \leq \sqrt{|x - y|}$. En effet, si $x \geq y$, on a

$$\left(\sqrt{x - y} \geq \sqrt{x} - \sqrt{y}\right) \Leftrightarrow \left(x - y \geq (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2\right) \Leftrightarrow \\ \left(x - y \geq x + y - 2\sqrt{x}\sqrt{y}\right) \Leftrightarrow \left(2\sqrt{x}\sqrt{y} \geq 2y\right) \Leftrightarrow (x \geq y).$$

Cependant, f n'est pas lipschitzienne. En effet, si f l'était, on aurait

$$|f(x) - f(0)| = f(x) \leq C|x - 0| = Cx$$

sur $[0, 1]$, soit encore $\sqrt{x} \leq Cx$ sur $[0, 1]$, ce qui implique que

$$\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \leq C \qquad \text{sur } [0, 1],$$

ce qui est absurde car $1/\sqrt{x}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0.

3. Posons $f(x) = -\frac{1}{\ln x}$. f est continue sur $[0, \frac{1}{2}]$. On verra dans le chapitre 4 que toute fonction continue sur un compact est uniformément continue et donc f est uniformément continue. Enfin, $f(0) = 0$. Si f vérifie une condition H_α, alors $|f(x) - f(0)| \leq C|x|^\alpha$, ce qui implique que

$$\frac{1}{x^\alpha \ln x}$$

est bornée au voisinage de 0. C'est absurde.

Exercice 2.24. Pour montrer que la topologie de $\mathbb{R}$ et la topologie induite par $\overline{\mathbb{R}}$ sur $\mathbb{R}$ coïncident, il suffit de montrer que si (u_n) est une suite d'éléments de $\mathbb{R}$ qui converge vers ℓ pour la topologie de $\overline{\mathbb{R}}$, alors elle converge vers ℓ pour la topologie usuelle, et réciproquement. (*cf.* proposition 1.5.2). Pour cela, se reporter à la solution de l'exercice 3.4 du chapitre 3.

Pour montrer que $\mathbb{R}$ est dense dans $\overline{\mathbb{R}}$, il suffit de montrer, par exemple, que la suite (n) converge vers $+\infty$. Or

$$d_1(n, +\infty) = \left|\frac{n}{1+n} - 1\right| = \frac{1}{n+1} \longrightarrow_{n\to+\infty} 0.$$

On démontre de manière tout à fait analogue que d_2 est une distance sur $\overline{\mathbb{R}}$ qui est topologiquement équivalente à la distance d_1.

Exercice 2.25. Il suffit, toujours selon le même principe, de vérifier que si une suite d'éléments de $\mathbb{R}$ converge vers ℓ pour une distance, alors c'est encore vrai pour l'autre distance.

Tout d'abord, si une suite (u_n) converge vers ℓ pour la topologie usuelle, alors la continuité de l'application $x \mapsto x^3$ nous dit que u_n^3 converge vers ℓ^3, et donc (u_n) converge vers ℓ pour l'autre distance.

De même, la continuité de l'application $x \mapsto x^{1/3}$ nous donne l'autre partie de l'équivalence des distances d et d_3.

Supposons que d et d_3 soient uniformément équivalentes. Alors si (u_n) et (v_n) sont deux suites de $\mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} d(u_n, v_n) = 0 \qquad \iff \qquad \lim_{n\to+\infty} d_3(u_n, v_n) = 0$$

(cela découle de l'exercice 2.20). Or si $u_n = (n + \frac{1}{n})$ et $v_n = n$, on a $d(u_n, v_n) = \frac{1}{n}$ qui tend vers 0, et $d_3(u_n, v_n) = n^3 + 3n + 3/n + 1/n^3 - n^3$ qui tend vers $+\infty$. d et d_3 ne sont donc pas uniformément équivalentes.

Exercice 2.26. Si f est continue en 0, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \exists \alpha > 0, \qquad \forall x \geq 0, \qquad |x| \leq \alpha \qquad \Rightarrow \qquad f(x) < \varepsilon.$$

En particulier, si (u_n) et (v_n) sont deux suites,

$$\lim_{n\to+\infty} d(u_n, v_n) \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} d'(u_n, v_n) = 0.$$

Réciproquement, si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que

$$\lim_{n\to+\infty} d'(u_n, v_n) = 0,$$

et si

$$\lim_{n\to+\infty} d(u_n, v_n) \neq 0$$

alors il existe $\varepsilon > 0$ et une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad d(u_{\varphi(n)}, v_{\varphi(n)}) \geq \varepsilon,$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad d'(u_{\varphi(n)}, v_{\varphi(n)}) \geq f(\varepsilon),$$

ce qui est absurde.

2. On peut prendre $f(x) = 1$ si $x > 0$, et $f(0) = 0$.

Exercice 2.27. Si f est continue, alors elle transforme une suite de limite nulle en une suite de limite nulle, donc bornée.

Réciproquement, si une fonction transforme toute suite de limite nulle en une suite bornée, il suffit de montrer qu'elle transforme toute suite de limite nulle en une suite de limite nulle pour montrer qu'elle est continue.

Soit donc (x_n) une suite de limite nulle. On pose $\lambda_n = n$ si $x_n = 0$ et $\lambda_n = \frac{1}{\sqrt{\|x_n\|}}$ si $x_n \neq 0$. La suite $(\lambda_n x_n)$ tend vers 0 donc la suite $(f(\lambda_n x_n)$ est bornée en norme par M. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \|f(\lambda_n x_n)\| \leq M,$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \|f(x_n)\| \leq \frac{M}{\lambda_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exercice 2.28.

1. Si $a \in E \backslash H$ et si $x \in H \cap \mathbb{R}a$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda a$ et $f(x) = \lambda f(a) = 0$ implique $\lambda = 0$ et donc $x = 0$. Pour avoir $E = H \oplus \mathbb{R}a$, il suffit de montrer que $E = H + \mathbb{R}a$. Soit donc $x \in E$. On a $x = (x - \frac{f(x)}{f(a)}a) + \frac{f(x)}{f(a)}a$ avec $(x - \frac{f(x)}{f(a)}a) \in H$ car $f(x - \frac{f(x)}{f(a)}a) = 0$. On a donc prouvé le résultat.

2. Tout d'abord, si f est continue alors $\ker f$ est fermé car c'est l'image réciproque par l'application continue f du fermé $\{0\}$.
Réciproquement, montrons que si $\ker f$ est fermé, alors f est continue. Tout d'abord, si $a \in E$ est tel que $f(a) \neq 0$, alors il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \cap \ker f = \emptyset$. Montrons que les $f(x)$ pour $x \in B(a, r)$ ont tous le même signe. Supposons que ce ne soit pas le cas, c'est-à-dire qu'il existe x et x' dans $B(a, r)$ tels que $f(x) > 0$ et $f(x') < 0$. La boule $B(a, r)$ étant convexe, le segment $[x, x'] = \{\lambda x + (1 - \lambda)x'\}$ est inclus dans $B(a, r)$. En effet, si $\lambda \in [0, 1]$,

$$\|\lambda x + (1-\lambda)x' - a\| = \|\lambda(x-a) + (1-\lambda)(x'-a)\| \leq \\ \lambda\|x - a\| + (1-\lambda)\|x' - a\| < \lambda r + (1-\lambda)r = r.$$

En particulier, si $g : [0, 1] \ni \lambda \mapsto f(\lambda x + (1 - \lambda)x') = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f'(x)$. Et donc g est une fonction affine de λ qui est strictement positive en O et strictement négative en 1. Elle s'annule donc en un $\lambda_0 \in]0, 1[$, ce qui montre que $\lambda_0 x + (1 - \lambda_0 x')$ est à la fois dans $\ker f$ et dans la boule $B(a, r)$. C'est absurde, et donc tous les $f(x)$ quand $x \in B(a, r)$ ont même signe.

Supposons que tous les $f(x)$ soient positifs quand $x \in B(a,r)$. En particulier, pour tout $y \in B(0,r)$, $a+y \in B(a,r)$ et donc $f(a+y) > O$. De même, $f(a-y) > 0$, et donc

$$-f(a) < f(y) < f(a).$$

Ceci montre que f est bornée sur la boule de centre 0 et de rayon r, et donc f est continue en vertu du théorème 1.6.1.

3. Montrons que l'adhérence d'un sous-espace vectoriel F de E est encore un sous espace vectoriel de E. Soient $x, y \in \overline{F}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Il existe deux suites (x_n) et (y_n) de F telles que (x_n) converge vers x et (y_n) converge vers y. La suite $x_n + \lambda y_n$ converge vers $x+\lambda y$, ce qui montre que $x+\lambda y \in \overline{F}$, et donc que $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.
Si maintenant H est un hyperplan qui n'est pas fermé, alors $\overline{H}$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient strictement H. D'après la question **1**, $\overline{H} = E$.

Exercice 2.29.

1. Si (f_n) converge uniformément vers f sur $]a,b[$ alors

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \qquad n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \forall x \in]a,b[, \quad d'(f(x), f_n(x)) \leq \varepsilon.$$

Si n_0 et $n \geq n_0$ sont fixés, alors l'application $g : [a,b] \ni x \mapsto d'(f_n(x), f(x))$ est continue et $O \leq g \leq \varepsilon$ sur $]a,b[$. Comme $g(a) = \lim_{x \to a+} g(x)$ et que $g(b) = \lim_{x \to b-} g(x)$, alors on obtient

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \qquad n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \forall x \in [a,b], \quad d'(f(x), f_n(x)) \leq \varepsilon,$$

ce qui montre la convergence uniforme de la suite (f_n) vers f sur $[a,b]$.

1. Si (P_n) est une suite de polynômes convergeant vers une fonction f uniformément sur $\mathbb{R}$, alors

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \qquad \forall n \geq n_0, \qquad \sup_{\mathbb{R}} |f(x) - P_n(x)| \leq \varepsilon,$$

et donc

$$\forall n \geq n_0, \qquad \sup_{\mathbb{R}} |P_n(x) - P_{n_0}(x)| \leq 2\varepsilon.$$

Comme un polynôme borné sur $\mathbb{R}$ est constant, on en déduit qu'il existe une suite (c_n) de réels telle que

$$\forall n \geq n_0, \qquad P_n(x) = P_{n_0}(x) + c_n.$$

En particulier, comme la suite $P_n(0)$ converge vers $f(0)$, on en déduit que la suite (c_n) converge vers $f(0) - P_{n_0}(0)$. Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $P_n(x)$ converge vers $f(x)$, alors par passage à la limite,

$$f(x) = P_{n_0}(x) + f(0) - P_{n_0}(0),$$

ce qui montre que f est un polynôme.