Exo 7 TD1

a)

Calculer $\mathrm{pgcd}(4539, 1958)$

$4539 = \underbrace{2 \cdot 1958}_{= 3916} + 623$ $\qquad q_1 = 2,\ r_1 = 623 = 1 \cdot 4539 - 2 \cdot 1958$

$1958 = 3 \cdot 623 + 89$ $\qquad q_2 = 3,\ r_2 = 89 = 1 \cdot 1958 - 3 \cdot \overbrace{623}^{r_1} =$

$= 1 \cdot 1958 - 3(1 \cdot 4539 - 2 \cdot 1958)$

$= 7 \cdot 1958 - 3 \cdot 4539$

$623 = 7 \cdot 89 + 0$

$r_3 = 0, \quad \mathrm{pgcd}(4539, 1958) = r_2 = 89$

$7 \cdot 1958 = 13706$ $\qquad$ On a bien :

$3 \cdot 4539 = 13617$ $\qquad 7 \cdot 1958 - 3 \cdot 4539 = 89$

On a donc $\mathrm{pgcd}(4539, 1958) = 89 = u \cdot 4539 + v \cdot 1958$, où $u = -3,\ v = 7$.

b) écrire une formule pour ppcm(4539, 1958)

$$\text{pgcd}(m,n)\cdot \text{ppcm}(m,n) = m\cdot n \quad \forall\, m,n \in \mathbb{N}^*$$

$$\underline{\text{pp}}\text{cm}(4539, 1958) = \frac{4539\cdot 1958}{89} = 99858.$$

Exo 1 $a, b \in \mathbb{Z}$ t.q. $a \equiv 5 \bmod 7$, $b \equiv 3 \bmod 7$

le reste de la DE par 7 de :

1) $2a+5b$

<u>Rappel</u> les opérations $+$ et $\cdot$ sur $\mathbb{Z}$ sont compatibles avec

la congruence mod n

Si $A \equiv A' \bmod n$, $B \equiv B' \bmod n$, alors $A+B \equiv A'+B' \bmod n$

$A\cdot B \equiv A'\cdot B' \bmod n$

$2a+5b \equiv 2\cdot 5 + 5\cdot 3 \equiv 25 \equiv 4 \bmod 7 \Rightarrow$ le reste de la DE de $2a+5b$ par 7 est 4

2) $a^2 + 11b$

$$a^2 + 11b \equiv 5^2 + 11 \cdot 3 \equiv 58 \equiv 2 \mod 7$$

le reste de la DE de a^2+11b par 7 est 2

3) $a^2 + 3b^2 \equiv 5^2 + 3 \cdot 3^2 \equiv 25 + 27 \equiv 52 \equiv 3 \mod 7$

le reste de la DE de a^2+3b^2 par 7 est 3.

Exo 2. a) Préciser le reste de la DE de 6^{943} par 7

$6 \equiv -1 \mod 7$ (parce que $6-(-1) = 7$ divisible par 7)

$\Downarrow$

$$6^{943} \equiv (-1)^{943} \equiv -1 \equiv 6 \mod 7$$

Donc le reste de la DE de 6^{943} par 7 est 6.

b) Le reste de la DE de 247^{349} par 7.

$247 = 35 \cdot 7 + 2$, donc $247 \equiv 2 \mod 7$

$247^{349} \equiv 2^{349} \mod 7$

k	$2^k \mod 7$
0	$1 \mod 7$
1	$2 \mod 7$
2	$4 \mod 7$
3	$1 \mod 7$

$2^3 \equiv 1 \mod 7$

la DE de 349 par 3 :

$349 = 116 \cdot 3 + 1$

$$2^{349} \equiv 2^{3 \cdot 116 + 1} = \underbrace{(2^3)}_{\equiv 1 \mod 7}{}^{116} \cdot 2 \equiv 1^{116} \cdot 2 \equiv 2 \mod 7$$

Le reste de la DE de 247^{349} par 7 est 2.

Exo 3. M.q $\forall n \in \mathbb{N}$ $2^{4n+1} + 3^{4n+1}$ est divisible par 5

k	2^k mod 5	3^k mod 5
1	2 mod 5	3 mod 5
2	4 mod 5	4 mod 5
3	3 mod 5	2 mod 5
4	1 mod 5	1 mod 5

Conclusion :

$$2^4 \equiv 3^4 \equiv 1 \mod 5$$

$$2^{4n+1} + 3^{4n+1} = 2^1 \cdot 2^{4n} + 3^1 \cdot 3^{4n} = 2 \cdot (\underset{\substack{\equiv \\ 1}}{2^4})^n + 3 \cdot (\underset{\substack{\equiv \\ 1}}{3^4})^n \equiv 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \equiv 5 \equiv 0 \mod 5$$

donc $5 \mid 2^{4n+1} + 3^{4n+1}$

Exo 4 1a) Mq $3^3 \equiv 1 \mod 13$

$$3^3 = 27 = 2 \times 13 + 1$$

$3^3 - 1 = 2 \times 13$ divisible par 13

1b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ 3^{3n} \equiv 1 \mod 13$

$$3^{3n} = (3^3)^n \equiv 1^n \equiv 1 \mod 13$$

$$3^3 \equiv 1$$

$$\boxed{\begin{array}{l}(x^m)^n = x^{nm} \\ x^{m+n} = x^m \cdot x^n\end{array}}$$

2) M.q. $\forall n \in \mathbb{N}$, $3^{6n+2} + 3^{3n+1} + 1$ est divisible par 13.

$$3^{6n+2} + 3^{3n+1} + 1 = (3^3)^{2n} \cdot 3^2 + (3^3)^n \cdot 3 + 1 \equiv 9 + 3 + 1 \equiv 13 \equiv 0 \mod 13$$

$$3^3 \equiv 1 \qquad 3^3 \equiv 1$$

Donc $3^{6n+2} + 3^{3n+1} + 1$ est divisible par 13.

__Exo 5__ Pour quels $n \in \mathbb{N}$ on a $9 \mid 2^n - 1$.

$n \mod 6$	$2^n \mod 9$	$2^n - 1 \mod 9$
0	1	0
1	2	1
2	4	3
3	8	7
4	7	6
5	5	4

k	$2^k \mod 9$
1	2
2	4
3	8
4	7
5	5
6	1

mod 9

$$2^6 \equiv 1 \mod 9$$

$$2^{6k} \equiv 1 \mod 9$$

Conclusion :

$$9 \mid 2^n - 1 \iff n \equiv 0 \mod 6 \iff n \in 6\mathbb{N}$$

Pause !

Exo 6 Soit $n \in \mathbb{N}$

1) Les restes possibles dans la DE de 3^n par 11

n	$3^n \mod 11$
0	1
1	3
2	9
3	5
4	4
5	1

$3^5 = 243 = 22 \times 11 + 1$

Conclusion : $3^5 \equiv 1 \mod 11$

$n \mod 5$	$3^n \mod 11$
0	1
1	3
2	9
3	5
4	4

Le restes possibles sont :

1, 3, 9, 5, 4

2) En déduire : $3^n+7 \equiv 0 \mod 11 \iff n=5k+4$ avec $k \in \mathbb{N}$

$n \mod 5$	$3^n \mod 11$	$3^n+7 \mod 11$
0	1	8
1	3	10
2	9	5
3	5	1
4	4	0

Conclusion :

$$3^n+7 \equiv 0 \mod 11$$
$$\Updownarrow$$
$$n \equiv 4 \mod 5 \iff$$
$$\exists k \in \mathbb{N},\ n=5k+4$$

Autre démonstration (Adam)

$$3^n+7 = 3^{5k+r}+7 = (3^5)^n \cdot 3^r + 7 \equiv$$
$$\equiv 3^r+7 = \begin{cases} 8 \mod 11 \text{ si } r=0 \\ 10 \quad " \quad \text{si } r=1 \\ 5 \quad " \quad \text{si } r=2 \\ 1 \quad " \quad \text{si } r=3 \\ 0 \quad " \quad \text{si } r=4 \end{cases}$$

où $r \in \{0,1,2,3,4\}$

On a donc $3^n+7 \equiv 0 \mod 11$ ssi $r=4 \iff n=5k+4$ où $k \in \mathbb{N}$

Exo 7 fait

Exo 8. M.q 59, 27 sont premiers entre eux, puis déterminer $(u,v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ t.q $59u + 27v = 1$

À démontrer : $pgcd(59,27)=1$

Avec l'algorithme d'Euclid :

$59 = 2 \cdot 27 + 5$ $\quad q_1 = 2,\ r_1 = 5 = 1\cdot 59 - 2 \cdot 27$

$27 = 5 \cdot 5 + 2$ $\quad q_2 = 5,\ r_2 = 2 = 1 \cdot 27 - 5 \cdot (1 \cdot 59 - 2 \cdot 27)$

$= 11 \cdot 27 - 5 \cdot 59$

$5 = 2 \cdot 2 + 1$ $\quad q_3 = 2,\ r_3 = 1 = \underset{r_1}{5} - 2 \cdot \underset{r_2}{2} = (1 \cdot 59 - 2 \cdot 27) - 2(11 \cdot 27 - 5 \cdot 59)$

$= \underbrace{11 \cdot 59}_{649} - \underbrace{24 \cdot 27}_{648}$

$r_4 = 0$

$pgcd(59,27) = 1$

$u = 11,\ v = -24.$

argument différent (Jonathan)
59 est premier et 59∤27

On a donc
$pgcd(59,27)=1$

Exo 9 Trouver les solutions dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ de l'équation $10(x-1)=14y$

Remarque

$10(x-1)=14y \Longleftrightarrow 5(x-1)=7y$

Ladislas

Rappel Soient $m, n \in \mathbb{Z}^*$ premiers entre eux.

Pour un couple $(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

$mx = ny \Longleftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z},\ x=kn$ et $y=km$

Zélie

kn km

5, 7 sont premiers entre eux

$5(x-1)=7y \Longleftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z},\ x-1=7k$ et $y=5k$

Conclusion : L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\{(7k+1,5k)\mid k\in\mathbb{Z}\}$