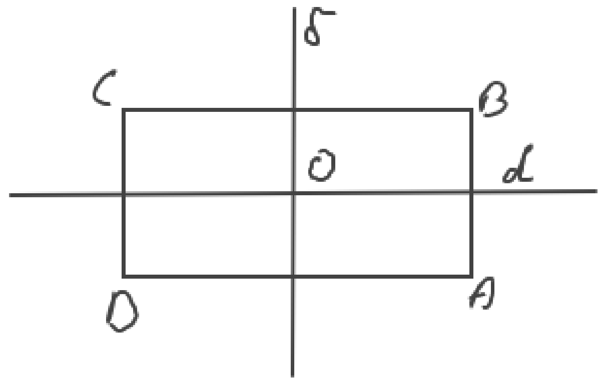
Exo 19 TD 2

3) Le groupe des isométries (du plan euclidien) qui préservent un rectangle est isomorphe à $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

Soit $(\mathbb{R}^2, d)$ le plan euclidien



$$d((x_1, y_1)(x_2, y_2)) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$G = \{ f \in Iso(\mathbb{R}^2, d) \mid f(\{A, B, C, D\}) = \{A, B, C, D\} \}$$

$G = \{ id_{\mathbb{R}^2}, s_d, s_\delta, R_\pi \}$ où R_θ désigne la rotation d'angle θ et centre O

R_π la symétrie centrale de centre O.

Rappel

la symétrie centrale de centre Q :
$P \longmapsto P'$ où P' est tel que Q soit le milieu du segment PP'

Remarque $\forall f \in G$, $f^2 = id_{\mathbb{R}^2}$ (l'élément neutre de G).

D'après l'exo 13, G est un groupe abélien.

On peut utiliser la question 3 de l'exo 13. Il en résulte que $\left.\begin{array}{l} G \simeq \mathbb{Z}_2^k \\ |G| = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow k = 2$, donc $G \simeq \mathbb{Z}_2^2$

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

On peut définir un isomorphisme $F : \mathbb{Z}_2^2 \longrightarrow G$ de la manière suivante :

On remarque $s_d \circ s_\delta = R_\pi = s_\delta \circ s_d$

$F([0]_2, [0]_2) = id_{\mathbb{R}^2}$

$F([1]_2, [0]_2) = s_d$

$F([0]_2, [1]_2) = s_\delta$

$F([1]_2, [1]_2) = F(([1]_2, [0]_2) + ([0]_2, [1]_2)) = F([1]_2, [0]_2) \circ F([0]_2, [1]_2)$

$= s_d \circ s_\delta = R_\pi$

Exercice Vérifier que F ainsi défini est bien un isomorphisme, i.e. que (1) F est bijective

(2) F est un morphisme de groupes.

(1) évident

(2) $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2^2$, $F(\alpha + \beta) = F(\alpha) \circ F(\beta)$

4) Construire des isomorphismes

$$(\mathbb{Z}_2, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}_6^\times, \cdot), \quad (\mathbb{Z}_4, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}_5^\times, \cdot)$$

$$(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}_{30}^\times, \cdot)$$

$\mathbb{Z}_6^\times = \{[1]_6, [5]_6\}$, $\langle [5]_6 \rangle = \langle [1]_6, [5]_6 \rangle$

$\text{ord}([5]_6) = 2$ dans $\mathbb{Z}_6^\times$ (le sous-groupe cyclique de $\mathbb{Z}_6^\times$ engendré par $[5]_6$)

Il en résulte :

$\mathbb{Z}_6^\times$ est cyclique, engendré par $[5]_6$

Rappel Soit $x \in G$ élément d'ordre fini n. Alors la formule $g_x([k]_n) = x^k$ définit un isomorphisme $g_x : \mathbb{Z}_n \longrightarrow \langle x \rangle$

Dans notre cas $\mathbb{Z}_6^\times = \langle [5]_6 \rangle$: La remarque nous donne un isomorphisme

$$\alpha = g_{[5]_6} : (\mathbb{Z}_2, +) \longrightarrow \langle [5]_6 \rangle = \mathbb{Z}_6^\times ,$$

$$\alpha([k]_2) = [5]_6^k = [5^k]_6$$

x

$$\mathbb{Z}_5^\times = \{ [1]_5, [2]_5, [3]_5, [4]_5 \}$$

$\mathrm{ord}([2]_5) = 4 = |\mathbb{Z}_5^\times|$, donc $\mathbb{Z}_5^\times = \langle [2]_5 \rangle$

$\mathrm{ord}([3]_5) = 4 = |\mathbb{Z}_5^\times|$, donc $\mathbb{Z}_5^\times = \langle [3]_5$

En utilisant le fait que $[2]_5$ est un générateur de $\mathbb{Z}_5^\times$.

La remarque nous fournit un isomorphisme

$$\beta = g_{[2]_5} : (\mathbb{Z}_4, +) \longrightarrow \langle [2]_5 \rangle = (\mathbb{Z}_5^\times, \cdot)$$

défini par $\beta([k]_4) = [2]_5^k = [2^k]_5$

La version multiplicative du théorème chinois nous donne un isomorphisme

$$h : (\mathbb{Z}_{30}^\times, \cdot) \longrightarrow (\underbrace{\mathbb{Z}_6^\times}_{\simeq \mathbb{Z}_2} \times \underbrace{\mathbb{Z}_5^\times}_{\simeq \mathbb{Z}_4}, \cdot)$$ donnée par

$$h([k]_{30}) = ([k]_6, [k]_5)$$

On a utilisé $30 = 5 \cdot 6$ et $5, 6$ sont premiers entre eux.

Mais nous avons des isomorphismes

$$\alpha : (\mathbb{Z}_2, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}_6^\times, \cdot), \quad \beta : (\mathbb{Z}_4, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}_5^\times, \cdot)$$

On obtient le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{Z}_{30}^\times, \cdot) \arrow[rr, "h"] & & (\mathbb{Z}_6^\times \times \mathbb{Z}_5^\times, \cdot) \\
& & (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4, +) \arrow[u, "\alpha\times\beta"'] \arrow[ull, dashed, "h^{-1}\circ(\alpha\times\beta)"]
\end{tikzcd}$$

où $\alpha \times \beta$ est défini par :

$$(\alpha\times\beta)([k]_2, [\ell]_4) = (\underbrace{\alpha([k]_2)}_{\in\, \mathbb{Z}_6^\times}, \underbrace{\beta([\ell]_4)}_{\in\, \mathbb{Z}_5^\times}).$$

Puisque α, β sont des isomorphismes, il en résulte que $\alpha\times\beta$ est un isomorphisme.

<u>Exercice</u> Soit $(G_i)_{i\in I}$, $(\tilde{G}_i)_{i\in I}$ familles de groupes. Supposons $\forall i \in I$, $G_i \simeq \tilde{G}_i$. Alors $\bigtimes_{i\in I} G_i \simeq \bigtimes_{i\in I} \tilde{G}_i$

Il suffit de remarquer que

$$h^{-1} \circ (\alpha \times \beta) : (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}_{30}^{\times}, \cdot) \text{ est}$$

un isomorphisme (en tant que composition d'isomorphismes)

5). Mq. le groupe $(\{f_1, f_2, f_3, f_4\}, \circ)$ de l'exo 7 et le groupe $(\{a, b, c, d\}, *)$ de l'exo 6 Q4 sont isomorphes à $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

$$f_1, f_2, f_3, f_4 : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^* \quad \forall z \in \mathbb{C}^* \quad f_1(z) = z,\ f_2(z) = \frac{1}{z},\ f_3(z) = -z,\ f_4(z) = -\frac{1}{z}$$

On définit $F : (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +) \longrightarrow (\{f_1, f_2, f_3, f_4\}, \circ)$ par

$F([0]_2, [0]_2) = f_1$, $F([1]_2, [0]_2) = f_2$, $F([0]_2, [1]_2) = f_3$,

$F([1]_2, [1]_2) = f_2 \circ f_3 = f_3 \circ f_2 = f_4$. Par vérification directe on vérifie que F est bien un morphisme de groupes.

F est évidemment bijective. En conclusion F est un isomorphisme

Autre argument:

$\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$, $f_i \circ f_i = f_1$ $(= id_{\mathbb{C}^*})$

D'après l'exo 13, $(\{f_1, f_2, f_3, f_4\}, \circ) \simeq \mathbb{Z}_2^k$

Puisque l'ordre de ce groupe est 4, on obtient $k=2$.

De la même manière on obtient un isomorphisme

$(\mathbb{Z}_2^2, +) \longrightarrow (\{a, b, c, d\}, *)$

6. M. q le groupe $(\mathcal{P}(X), \Delta)$ (voir l'exo 6)

est isomorphe à $(\mathcal{F}(X, \mathbb{Z}_2), +)$

On définit $\chi : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(X, \mathbb{Z}_2)$ par

$\forall A \in \mathcal{P}(X)$, $\chi(A) = \chi_A$ où χ_A est l'application

caractéristique de A définie par

$$\forall x \in X, \ \chi_A(x) = \begin{cases} [1]_2 & \text{si } x \in A \\ [0]_2 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

L'application χ est une bijection. En effet, soit

$\Sigma : \mathcal{F}(X, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ définie par $\Sigma(h) = h^{-1}(\{[1]_2\})$

<u>Exercice</u> $\chi \circ \Sigma = id_{\mathcal{F}(X, \mathbb{Z}_2)}$, $\Sigma \circ \chi = id_{\mathcal{P}(X)}$

Il en résulte χ est bijective et $\chi^{-1} = \Sigma$

Il nous reste à démontrer que χ est un morphisme de groupes, i.e.

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X),\ \chi(A \Delta B) = \underbrace{\chi(A)}_{= \chi_A} + \underbrace{\chi(B)}_{= \chi_B}$$

Ceci résulte du tableau (pour $x \in X$):

$x \in A$?	$x \in B$?	$x \in A \Delta B$?	$\chi(A \Delta B)(x)$	$(\chi(A) + \chi(B))(x)$
oui	oui	non	$[0]_2$	$[1]_2 + [1]_2 = [0]_2$
oui	non	oui	$[1]_2$	$[1]_2 + [0]_2 = [1]_2$
non	oui	oui	$[1]_2$	$[0]_2 + [1]_2 = [1]_2$
non	non	non	$[0]_2$	$[0]_2 + [0]_2 = [0]_2$

$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

20. À définir des isomorphismes

$(\mathbb{Z}_n,+) \longrightarrow End(\mathbb{Z}_n,+)$, $(\mathbb{Z}_n^\times,\cdot) \longrightarrow (Aut(\mathbb{Z}_n,+),\circ)$

A réviser l'exo 17

On définit $F : \mathbb{Z}_n \longrightarrow End(\mathbb{Z}_n,+)$

$F(a) = f_a$, où $f_a : \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_n$ est

défini par $f_a(x) = ax$

À démontrer:

(i) F est un isomorphisme

(ii) $f_a \circ f_b = f_{ab}$

(iii) f_a est un isomorphisme ssi il existe $b \in \mathbb{Z}_n$, $f_a \circ f_b = id_{\mathbb{Z}_2}$

ssi il existe $b \in \mathbb{Z}_n$, $ab = [1]_n$ ssi $a \in \mathbb{Z}_n^\times$

Conclusion $a \longmapsto f_a$ definit des isomorphismes

$$(\mathbb{Z}_n, +) \longrightarrow (\mathrm{End}(\mathbb{Z}_n,+), +)$$

$$(\mathbb{Z}_n^\times, \cdot) \longrightarrow (\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n,+), \circ)$$

Exo 21 1) Démontrer que tout groupe d'ordre 4 est isomorphe soit à $(\mathbb{Z}_4,+)$, soit à $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$

Soit $(G,*)$ un groupe d'ordre 4. D'après le 2me corollaire au th. de Lagrange

$$\forall x \in G,\ \mathrm{ord}(x) \in \{1,2,4\}$$

Cas 1 Il existe $x \in G$ t.q. $\mathrm{ord}(x) = 4$. D'après la thème des groupes cycliques, il en résulte $G \simeq \mathbb{Z}_4$. Plus précisément la formule

$g_x([k]_4) = x^k$ définit un isomorphisme

$g_x : (\mathbb{Z}_4, +) \longrightarrow (G, *)$

Cas 2 $\forall x \in G$, $ord(x) \in \{1, 2\}$

Dans ce cas $\forall x \in G$, $x^2 = e$. D'après l'exo 13Q3 il existe $k \in \mathbb{N}$ t.q $\left.\begin{array}{l} G \simeq \mathbb{Z}_2^k \\ |G| = 4 \end{array}\right\} \Longrightarrow k = 2$, donc $G \simeq \mathbb{Z}_2^2$

2) Préciser des sous-groupes de $(Iso(\mathbb{R}^2), \circ)$ isomorphes à

$(\mathbb{Z}_4, +)$, respectivement $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$

$\langle R_{\frac{\pi}{2}} \rangle = \{ id_{\mathbb{R}^2}, R_{\frac{\pi}{2}}, R_{\pi}, R_{\frac{3\pi}{2}} \}$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}_4, +)$ (cyclique d'ordre 4)

$ord(R_{\frac{\pi}{2}}) = 4$

$\{ id_{\mathbb{R}^2}, s_d, s_{\delta}, R_{\pi} \}$ (voir l'exo 19 Q 3)

est isomorphe à $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$