Exo 10.1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $1 \leq n \leq 6$ calculer les restes de la DE de 3^n par 7

n	le reste de la DE de 3^n par 7
1	3
2	2
3	6
4	4
5	5
6	1

$3^2 \equiv 2 \mod 7 \ /\cdot 3$

$3^3 \equiv 6 \mod 7$

$3^4 \equiv 18 \equiv 4 \ / 3$

$3^5 \equiv 12 \equiv 5 \ / 3$

$3^6 \equiv 15 \equiv 1$

2. Mq. $\forall n \in \mathbb{N}$, $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7.

$$3^{n+6} - 3^n = \underbrace{3^6}_{\equiv 1} \cdot 3^n - 3^n \equiv 1 \cdot 3^n - 3^n \equiv 0 \mod 7$$

Conclusion $3^{n+6} \equiv 3^n \mod 7$, donc . .

le reste de la DE de 3^{n+6} par 7 est egal au reste de la DE de 3^n par 7

3. le reste de la DE de 3^{1000} par 7

$$1000 = \underbrace{166 \cdot 6}_{996} + 4$$

$$3^{1000} = 3^{6 \cdot 166 + 4} = 3^4 \cdot 3^{6 \cdot 166} = 3^4 \cdot \underbrace{(3^6)}_{\substack{\equiv \\ 1 \bmod 7}}{}^{166} \equiv 3^4 \equiv 4 \mod 7$$

le reste requis est 4.

4. Reponse : on fait la DE de n par 6

$n = q \cdot 6 + r$, où $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

le reste requis est le reste de la DE de 3^r par 7

Exo 11. Soit $(u_n)_n$ suite de $\mathbb{N}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 14 \\ u_{n+1} = 5u_n - 6 \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

1. $u_1 = 64$, $u_2 = 314$, $u_3 = 1564$, $u_4 = 7814$

<u>Conjecture</u> : le deux derniers chiffres de u_n sont 14 si n est pair, et 64 si n est impair

2. M.q. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} \equiv u_n \mod 4$. En déduire que $\forall k \in \mathbb{N}$
$u_{2k} \equiv 2 \mod 4$, $u_{2k+1} \equiv 0 \mod 4$

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6 = 5(5u_n - 6) - 6 = 25u_n - 36$$

$$u_{n+2} - u_n = 24u_n - 36 = 4(6u_n - 9) \text{ divisible par } 4$$

$$\Longrightarrow u_{n+2} \equiv u_n \mod 4$$

$$u_{2k} \equiv \underbrace{u_{2(k-1)}}_{= u_{2k-2}} \equiv \dots \equiv u_0 \equiv 2 \mod 4$$

$$u_{2k+1} \equiv u_{2(k-1)+1} \equiv \dots \equiv u_1 \equiv 0 \mod 4$$

3. M.q. $\forall n \in \mathbb{N}$, $2u_n = 5^{n+2}+3$. $P(n)$

Initialisation : pour $n=0$ $\quad \underbrace{2u_0}_{2\cdot 14 = 28} \overset{?}{=} \underbrace{5^2+3}_{= 25+3=28}$ Oui !

Hérédité : Supposons

$P(n)$ $\boxed{2u_n = 5^{n+2}+3}$

$$2u_{n+1} = 2(5u_n - 6) = 5\cdot(2u_n) - 12 = 5\cdot(5^{n+2}+3) - 12$$

$$= 5^{n+3}+3 = 5^{(n+1)+2}+3 \qquad P(n+1)$$

4. En déduire $\forall n \in \mathbb{N}$, $2u_n \equiv 28 \bmod 100$

$$2u_n = 5^{n+2}+3$$

5^{n+2} est une puissance de 5.

On va étudier les puissances de $\underline{5}$ mod 100 :

Remarque.

les 2 derniers chiffres d'un naturel divisible par 25 sont :

00, 25, 50, 75.

n	5^n mod 100
1	5
2	25
3	25
4	25

Par recurrence : $\forall n \geq 2,\ 5^n \equiv 25 \bmod 100$

$\forall n \in \mathbb{N},\ 5^{n+2} \equiv 25 \bmod 100$

$2u_n = 5^{n+2} + 3 \equiv 28 \bmod 100$

5. Determiner les deux derniers chiffres de u_n suivant n

Soit r le reste de la DE de u_n par 100.

$0 \leq r < 100$. $\quad 0 \leq 2r < 200$. $\quad 2r \in \{28, 128\}$

$\Rightarrow r \in \{14, 64\}$

Mais

pour n pair, $u_n \equiv 2 \mod 4$

n impair $u_n \equiv 0 \mod 4$

$u_n \equiv r \mod 4$

$(100 \mid u_n - r)$

$\Longrightarrow$ pour n pair

$u_n \equiv 14 \mod 100$

pour n impair

$u_n \equiv 64 \mod 100$

6. M.q. $\mathrm{pgcd}(u_n, u_{n+1})$ est constant (indép de n)

D'après la question 5, il en résulte $2 \mid u_n$ et $2 \mid u_{n+1}$, donc $2 \mid \mathrm{pgcd}(u_n, u_{n+1})$. D'autre part, la relation de recurrence montre que $\mathrm{pgcd}(u_n, u_{n+1}) \mid 6$. Mais la relation $2u_n = 5^{n+2}+3$ montre que 3 ne divise pas u_n (pour aucun n)

En effet, si, par l'absurde, 3 divise u_n, il va diviser 2u_n, donc il va diviser 5^{n+2}=2u_n-3 (faux!)

Conclusion :

$pgcd(u_n, u_{n+1})$ est un diviseur pair de 6 qui n'est pas divisible par 3, donc

$pgcd(u_n, u_{n+1}) = 2$. (indépendant de n !)