Exo 6 TD 2.

$G :=]-1, 1[\qquad x * y := \dfrac{x+y}{1+xy}$

Conclusion :

$(G, *)$ est un groupe abélien

Nous avons démontré :

0) $*$ est une lci sur G

1) $*$ est associative

2) 0 est élément neutre de $*$

3) $\forall x \in G$, $-x$ est un symétrique de x par rapport à $*$

4) $*$ est commutative

<u>Remarque</u>

Soit E un ensemble,

soit $(A, \cdot)$ un groupe et

soit $f : E \longrightarrow A$ une application <u>bijective</u>. Alors la formule

$x * y := f^{-1}(f(x) \cdot f(y))$ est une

lci de groupe sur E. Par rapport à cette lci f devient un isomorphisme

<u>Dem</u> Exercice

l'élément neutre de $*$ est $f^{-1}(e)$, où $e \in A$ est l'élément neutre de $\cdot$

Dans notre exemple choisissons

$f :]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{argth}(x)$. $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow]-1, 1[$

$$f^{-1}(y) = th(y) = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$$

En utilisant la remarque on obtient une loi de groupe sur $]-1, 1[$ donnée par :

$$x * y = f^{-1}(f(x) + f(y)) = th(\operatorname{argth}(x) + \operatorname{argth}(y)) =$$

Rappel $th(a+b) = \dfrac{th(a) + th(b)}{1 + th(a)\, th(b)}$

$$= \frac{x + y}{1 + xy}$$

(la loi donnée)

Nous avons une 2me démonstration pour : $(G, *)$ est un groupe.

1) $G = \mathcal{P}(X)$ Pour $A, B \in G$ on définit

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in \mathcal{P}(X) = G$$

À démontrer : Δ est une lci de groupe sur $G = \mathcal{P}(X)$

Δ est bien une lci sur G

Remarques (i) $A \Delta \emptyset = (A \cup \emptyset) \setminus (A \cap \emptyset) = A = \emptyset \Delta A$ pour tout $A \in G$, donc $\emptyset$ est élém neutre pour Δ.

(ii) Δ est commutative (parce que $\cup$ et $\cap$ sont commutatives).

(iii) $\forall A \in G$, $A \Delta A = (A \cup A) \setminus (A \cap A) = A \setminus A = \emptyset$ donc A est un symétrique de A par rapport à Δ.

(iv) Δ est associative

On va obtenir une formule explicite pour $(A \Delta B) \Delta C$. Notation $\bar{A} := {}^c A$ (le complémentaire de A par rapport à X)

$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) =$ Rappel $A \setminus B = A \cap {}^c B = A \cap \bar{B}$

$(A \cup B) \cap {}^c(A \cap B) =$

$(A \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$

$(A \Delta B) \Delta C = [(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)] \Delta C = [(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)] \cap \bar{C} \cup$

${}^c[(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)] \cap C = (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$

On a obtenu :

${}^c(A \cap \bar{B}) \cap {}^c(\bar{A} \cap B)$

$= (\bar{A} \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) = (\bar{A} \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)$

Conclusion :

$$(A \triangle B) \triangle C = (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (A \cap B \cap C)$$

cette expression est symétrique par rapport à A, B, C, en particulier

$$(A \triangle B) \triangle C = (B \triangle C) \triangle A$$

Mais $(B \triangle C) \triangle A = A \triangle (B \triangle C)$, parce que $\triangle$ est commutative.

On peut donner une démonstration directe de l'associativité en utilisant une table de vérité :

	$x \in A$?	$x \in B$?	$x \in C$?	$x \in (A \Delta B) \Delta C$?	$x \in A \Delta (B \Delta C)$?
1	oui	oui	oui	oui	oui
2	oui	oui	non	non	non
3					
4					
5					
6					
7					
8					

les memes reponses dans tous les 8 cas,
donc $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$

$(A \Delta B) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

$$(A \Delta B) \Delta C = \overbrace{(A \Delta B) \cup C}^{x_n} \setminus (A \Delta B) \cap C$$

1 $\quad x \notin A \Delta B$

3) $G = \mathbb{R}^2$ $\qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 e^{y_1} + y_2 e^{x_1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$*$ est bien une lci sur $\mathbb{R}^2$

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) * \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overbrace{x_1 + y_1}^{X_1} \\ \underbrace{x_2 e^{y_1} + y_2 e^{x_1}}_{X_2} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \overset{Y_1}{z_1} \\ \underset{Y_2}{z_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + z_1 \\ (x_2 e^{y_1} + y_2 e^{x_1}) e^{z_1} + z_2 e^{x_1 + y_1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 + y_1 + z_1 \\ x_2 e^{y_1 + z_1} + y_2 e^{x_1 + z_1} + z_2 e^{x_1 + y_1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} * \left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \overbrace{y_1 + z_1}^{Y_1} \\ \underbrace{y_2 e^{z_1} + z_2 e^{y_1}}_{Y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + z_1 \\ x_2 e^{y_1 + z_1} + (y_2 e^{z_1} + z_2 e^{y_1}) e^{x_1} \end{pmatrix}$$

donc on a égalité.

(ii) $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ est élément neutre.

(iii) Soit $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$. On cherche $x'=\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\end{pmatrix}$ t.q

$$x * x' = x' * x = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$x * x' := \begin{pmatrix}x_1+x_1'\\x_2 e^{x_1'}+x_2' e^{x_1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1' = -x_1 \\ x_2' = -x_2 e^{x_1'-x_1} \\ \quad = -x_2 e^{-2x_1}\end{cases}$$

$\parallel$

$x' * x$

Conclusion : x admet un symétrique donné par $x'=\begin{pmatrix}-x_1\\-x_2 e^{-2x_1}\end{pmatrix}$

$*$ est une loi de groupe abelien sur G

Autre demonstration :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ munie de + définie par $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 e^{-x_1} \end{pmatrix}$

À vérifier : a) f est bijective

b) f^{-1} est donnée par $f^{-1}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 e^{y_1} \end{pmatrix}$

c)

$\forall x, y \in \mathbb{R}^2$

$$f^{-1}(f(x)+f(y)) = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 e^{y_1} + y_2 e^{x_1} \end{pmatrix} = x * y$$

Donc, d'après la remarque, $*$ est une loi de groupe abelien sur $\mathbb{R}^2$ et f est un isomorphisme

$$(\mathbb{R}^2, *) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, +)$$

4. $G = \{a, b, c, d\}$

$*$	a	b	c	d
a	b	a	d	c
b	a	b	c	d
c	d	c	b	a
d	c	d	a	b

$\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{[0]_2, [1]_2\}$

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{([0],[0]), ([0],[1]), ([1],[0]), ([1],[1])\}$$

Soit

$f : G \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

donnée par

$f(b) = ([0],[0])$

$f(a) = ([0],[1])$

$f(c) = ([1],[0])$

$f(d) = ([1],[1])$

a) f est bijective (évident)

b) $x * y = f^{-1}(f(x) + f(y))$

pour tous $x, y \in G$

En effet, par exemple pour $x = c$, $y = d$, on a

$x * y = a$, $f^{-1}(f(x)+f(y)) = f^{-1}(([1],[0]) + ([1],[1])) = f^{-1}(([0],[1])) = a$

D'après la remarque, $*$ est une lci de groupe abélien sur G et $f : (G, *) \longrightarrow (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ est un isomorphisme

Exo 7 $\quad f_i : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$ bijective pour $1 \leq i \leq 4$.

$\forall z \in \mathbb{C}^*$, $f_1(z) = z$, $f_2(z) = \frac{1}{z}$, $f_3(z) = -z$, $f_4(z) = -\frac{1}{z}$

$G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$

$f_1 = id_{\mathbb{C}^*}$

la table de la composition $\circ$ sur G est :

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2
f_4	f_4	f_3	f_2	f_1

Ceci montre que $\circ$ est bien une lci sur G

(i) $\circ$ est associative parce que, en général, la composition des applications est associative.

(ii) f_1 est élément neutre par rapport à $\circ$

(iii) $\forall f \in G$, on a $f \circ f = f_1$ donc f est le symétrique de f.

Exo 8. $(G, \cdot)$, $(H, *)$ groupes

Sur $G \times H$ on definit la loi :

$$(x, y) \circ (x', y') := (x \cdot x', y * y')$$

1 M. q $(G \times H, \circ)$ est un groupe. Voir le cours.

2. Soit G groupe d'ordre 2.
La table de $G \times G$.

$\circ$	(e,e)	(e,x)	(x,e)	(x,x)
(e,e)	(e,e)	(e,x)	(x,e)	(x,x)
(e,x)	(e,x)	(e,e)	(x,x)	(x,e)
(x,e)	(x,e)	(x,x)	(e,e)	(e,x)
(x,x)	(x,x)	(x,e)	(e,x)	(e,e)

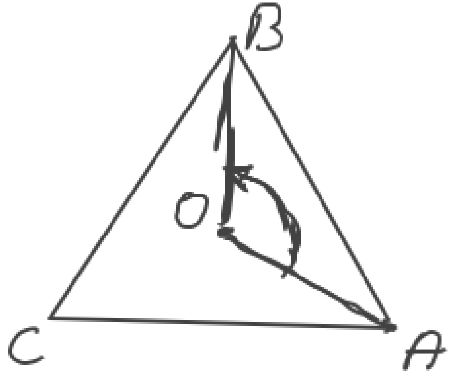
$G=\{e,x\}$ avec $e \neq x$

$\cdot$	e	x
e	e	x
x	x	e

On a $x \cdot x = e$ (si par l'absurde, on a $x \cdot x = x$ on aurait $x=e$)

Exo 9. Soit ΔABC un triangle equilatéral du plan

1) Determiner l'ensemble des rotations laissant invariant $\{A,B,C\}$



Il s'agit de l'ensemble

$$\left\{ f \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2) \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ est une rotation} \\ f(\{A,B,C\}) = \{A,B,C\} \end{array} \right\}$$

Soit O le centre du triangle, i.e

$$d(O,A) = d(O,B) = d(O,C)$$

Remarque

Si f est une isometrie de $\mathbb{R}^2$ t.q $f(\{A,B,C\}) = \{A,B,C\}$,

alors $f(O) = O$.

En effet soit $Q := f(O)$

$$d(Q, f(A)) = d(Q, f(B)) = d(Q, f(C)) \Longrightarrow Q = O$$

les sommets du triangle

$$\left\{ f \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2) \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ est rotation} \\ f(\{A,B,C\}) = \{A,B,C\} \end{array} \right\} = \{ \underset{\substack{\| \\ id_{\mathbb{R}^2}}}{R_0}, R_{\frac{2\pi}{3}}, R_{\frac{4\pi}{3}} \}$$

où R_θ désigne la rotation de centre O et angle θ.