Année universitaire 2018/2019

Site : ☒ Luminy ☐ St-Charles ☐ St-Jérôme ☐ Cht-Gombert ☐ Aix-Montperrin ☐ Aubagne-SATIS

Sujet de : ☐ 1^er^ semestre ☒ 2^ème^ semestre ☐ Session 2 Durée de l'épreuve : 2h

Examen de : L2 Nom du diplôme : Licence de Mathématiques

Code du module : SMI4U02L Libellé du module : Alèbre 2

Calculatrices autorisées : NON Documents autorisés : NON

Exercice 1 (**6p**) Questions proches du cours :

1. (**2p**) Énoncer et démontrer le premier théorème d'isomorphisme pour les groupes. Énoncer le premier théorème d'isomorphisme pour les anneaux commutatifs.
2. (**1p**) Donner les définitions d'un élément irréductible et d'un élément premier dans un anneau commutatif intègre.
3. (**3p**) Montrer que, dans l'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}] := \{a + ib\sqrt{5} |\ a,\ b \in \mathbb{Z}\}$ (regardé comme sous-anneau de $\mathbb{C}$), l'élément 3 est irréductible, mais n'est pas premier. *Indication : pour montrer que 3 est irréductible, utiliser l'application* $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}] \ni z \mapsto |z|^2 \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2 (**13p**)

Soit D_4 le groupe diédral d'ordre 8, donc le groupe des isométries du plan conservant l'ensemble $\Sigma := \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ des sommets (numérotés en suivant le sens trigonométrique) d'un carré.

1. (**2p**) Écrire la liste des éléments de D_4, et préciser l'ordre de chaque élément.
2. (**2p**) En utilisant l'application de restriction
$$D_4 \ni f \mapsto f|_{\Sigma} : \Sigma \to \Sigma\,,$$
définir un morphisme de groupes $r : D_4 \to \mathfrak{S}_4$, et préciser le sous-groupe image $\mathrm{im}(r) \subset \mathfrak{S}_4$.
3. (**2p**) Quels sont les ordres possibles des sous-groupes de D_4 ? Énoncer le corollaire au théorème de Lagrange utilisé. Donner la liste de tous les sous-groupes d'ordre 2 de D_4.
4. (**1p**) Donner la liste des tous les sous-groupes *cycliques* d'ordre 4 de D_4. Justifier votre réponse.
5. (**2p**) Donner la liste des tous les sous-groupes d'ordre 4 de D_4 *qui ne sont pas cycliques. Rappel : un groupe d'ordre 4 qui n'est pas cyclique est engendré par deux éléments d'ordre 2 qui commutent.*
6. (**2p**) Donner la liste des tous les sous-groupes de D_4, en spécifiant ceux qui sont normaux. Justifier votre réponse. *Indication pour les sous-groupes normaux : on peut utiliser un théorème général fait en TD concernant les sous-groupes d'indice 2. Énoncer et démontrer ce théorème.*
7. (**2p**) Soit $H \subset D_4$ l'unique sous-groupe normal d'ordre 2. Montrer que $D_4/H \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Exercice 3 (**7p**) Considérons l'anneau $\mathbb{Z}[X]$ et son idéal $I := 2\mathbb{Z}[X] + X\mathbb{Z}[X]$.

1. (**1,5p**) Montrer que les inclusions
$$2\mathbb{Z}[X] \subset I,\ X\mathbb{Z}[X] \subset I,\ I \subset \mathbb{Z}[X]$$
sont strictes.
2. (**1,5p**) Montrer que I n'est pas un idéal principal. *Indication : par l'absurde, I est engendré par $P(X)$, montrer d'abord que $P(X)$ est un polynôme constant, puis montrer que $P(X)$ est inversible. Ceci implique $I = \mathbb{Z}[X]$ (faux).*
3. (**2p**) Soit $\varphi : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}_2$ définie par $\varphi(P(X)) = [a_0]_2$, où $P(X) = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$. Montrer que φ est un morphisme d'anneaux, et $\ker(\varphi) = I$. Qu'est-ce qu'on peut en déduire en utilisant le premier théorème d'isomorphisme ?
4. (**1p**) Montrer que I est un idéal maximal. *Indication : On peut utiliser un critère général de maximalité qui utilise l'anneau quotient A/I.*
5. (**1p**) Montrer que $X\mathbb{Z}[X]$ est un idéal premier.