Algèbre 2 – TD n°4

Anneaux

Exercice 1 (Règles de calcul dans un anneau) Soit $(A,+,\cdot)$ un anneau. Alors

1. Pour tout élément $x \in A$ on a $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$.
2. Pour tout $(x,y) \in A \times A$ on a $x(-y) = (-x)y = -(xy)$.
3. Pour tout $(x,y) \in A \times A$ on a $(-x)(-y) = -((-x)y) = -(-(xy)) = xy$.
4. Pour tout élément $x \in A$, et $n \in \mathbb{N}$ on définit l'élément $x^n \in A$ en posant

$$x^n := \begin{cases} \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ fois}} & \text{si} \quad n > 0, \\ 1 & \text{si} \quad n = 0. \end{cases}$$

   Alors on a l'identité $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$

5. Pour tout $x \in A$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a $nx = (n\,1_A) \cdot x = x \cdot (n\,1_A)$.

Exercice 2 Soit $(A,+,\cdot)$ un anneau, et soient $x,\, y \in A$ deux éléments qui commutent. Démontrer la formule

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Indication : Utiliser récurrence par rapport à n et les identités $(x+y)^{n+1} = (x+y)^n(x+y)$, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

Exercice 3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x = [k]_n \in \mathbb{Z}_n \setminus \{[0]_n\}$. Montrer que x est un diviseur de 0 dans l'anneau $\mathbb{Z}_n$ si et seulement si x est non-inversible dans cet anneau.

Exercice 4 Préciser les groupe des éléments inversibles dans les anneaux commutatifs suivants (munis de leurs opérations usuelles) : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[X]$, $\mathbb{R}[X]$. Préciser les éléments inversibles de l'anneau non-commutatif $M_n(\mathbb{Z})$, où $n \geq 2$.

Exercice 5 Soit $(A,+,\cdot)$ un anneau commutatif intègre. Identifions A avec le sous ensemble de $A[X]$ formé par les polynômes constants. Montrer qu'un polynôme $P(X) \in A[X]$ est inversible si et seulement si $P(X) \in A^\times$. En déduire que $A[X]$ n'est jamais un corps.

Exercice 6 Montrer que sous-ensemble $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} |\ a,\ b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$, muni de l'addition et de la multiplication ordinaires, est un corps commutatif. Généralisation.

Exercice 7 Soit $I \subset A$ un idéal de $(A,+,\cdot)$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $I = A$.

(ii) I est un sous-anneau.

(iii) $1_A \in I$.

(iv) I contient un élément inversible.

Exercice 8 Soit K un corps. Montrer que tout idéal de $K[X]$ est principal. *Indication : Soit $I \subset K[X]$ un idéal non-nul. Montrer que* $I = (P(X))$, *où $P(X)$ est un élément de degré minimal de $I \setminus \{0\}$.*

Exercice 9 Montrer que l'idéal $(2,X) = 2\mathbb{Z}[X] + X\mathbb{Z}[X] \subset \mathbb{Z}[X]$ ne coïncide pas avec $\mathbb{Z}[X]$, et n'est pas un idéal principal.

Exercice 10 Soient $(A,+,\cdot)$ un anneau commutatif, et $I \subset A$ un idéal. Alors

1. I est un idéal maximal si et seulement si A/I est un corps.
2. I est un idéal premier si et seulement si A/I est intègre.

Exercice 11 Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux commutatifs. Montrer que :

(i) $f(0_A) = 0_B$.

(ii) Pour tout $x \in A$ on a $f(-x) = -f(x)$.

(iii) Soit $x \in A$ inversible. Alors $f(x)$ est inversible dans B et $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$.

(iv) Soit $A' \subset A$ un sous-anneau de A. Alors l'image $f(A')$ est un sous-anneau de B.

(v) Soit $I \subset A$ un idéal de A. Si f est surjective, alors l'image $f(I)$ est un idéal de B.

(vi) Soit $B' \subset B$ est un sous-anneau de B. Alors l'image réciproque $f^{-1}(B')$ est un sous-anneau de A.

(vii) Soit $I \subset B$ est un idéal de B. Alors $f^{-1}(I)$ est un idéal de A.

(viii) f est injectif si et seulement $\ker(f) = \{0_A\}$.

Exercice 12 Soit A un anneau commutatif. Un élément $n \in A$ est dit élément nilpotent, s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^n = 0$. Le nilradical de A est le sous-ensemble $\mathrm{Nil}(A) \subset A$ des éléments nilpotents. Montrer que

1. $\mathrm{Nil}(A)$ est un idéal de A.
2. $\mathrm{Nil}(A/\mathrm{Nil}(A)) = \{[0]\}$.
3. $\mathrm{Nil}(A)$ est contenu dans tout idéal premier de A.

On peut montrer que $\mathrm{Nil}(A)$ coïncide avec l'intersection de tous les idéaux premiers de A.

Exercice 13 Soit $n = \prod_{i=1}^{s} p_i^{\alpha_i}$ la décomposition de $n \geq 2$ en facteurs premiers (avec $\alpha_i > 0$ et p_i distincts deux à deux). Montrer que $\mathrm{Nil}(\mathbb{Z}_n) = ([m]_n)$, où $m = \prod_{i=1}^{s} p_i$.

Exercice 14 Soit $K[X]$ l'anneau des polynômes a coefficients dans un corps K. Soit $a \in K$. Soit $f_a : f : K[X] \to K$ définie par $f_a(P(X)) := P(a)$.

1. Montrer que f est un morphisme d'anneaux.
2. En utilisant le premier théorème d'isomorphisme définir un isomorphisme d'anneaux $K[X]/\ker(f_a) \to K$.
3. Montrer que $\ker(f_a)$ est un idéal maximal.
4. Préciser un générateur de cet idéal.

Exercice 15 Soit A un anneau commutatif intègre. Montrer que

1. Tout élément premier de A est irréductible.
2. Un élément $p \in A$ est premier si et seulement si l'idéal principal $(p) = pA$ engendré par p est un idéal premier.

Donner un exemple d'anneau intègre possédant un élément irréductible qui n'est pas premier.

Exercice 16 En utilisant le théorème fondamental de l'algèbre montrer que :

1. Un polynôme $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ est irréductible si et seulement si il est premier, si et seulement si $\deg(P(X)) = 1$.
2. Un polynôme $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ est irréductible si et seulement si il est premier, si et seulement si soit $\deg(P(X)) = 1$, soit $\deg(P(X)) = 2$ et son discriminant est strictement négatif.

Exercice 17 Soit K un corps, et soit $I \subset K[X,Y]$ l'idéal principal engendré par $Y^2 - X^3$. Montrer que

1. L'anneau quotient $A := K[X,Y]/I$ est intègre.
2. L'élément $\hat{X} \in A$ est un élément irréductible qui n'est pas premier.

Indication : Montrer que tout élément $u \in A$ admet un représentant unique $W(X,Y) \in K[X] + YK[X]$.

Exercice 18 Énoncer et démontrer le théorème des restes chinois dans un anneau principal.

Exercice 19 Soit A un anneau euclidien pour le stathme ν. Alors il existe $x \in A$ non inversible tel que la restriction à $A^\times \cup \{0\}$ de la projection canonique $p : A \to A/(x)$ soit surjective.

Exercice 20 1. Montrer que l'anneau $A = \mathbb{Z}[\frac{1+i\sqrt{19}}{2}]$ n'est pas euclidien.

2*. Montrer que l'anneau $A = \mathbb{Z}[\frac{1+i\sqrt{19}}{2}]$ est principal.

Exercice 21 Soit A un anneau intègre. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. A est factoriel.
2. Tout élément non nul et non inversible de A s'écrit comme produit d'éléments premiers.