Classes remarquables d'endomorphismes

Andrei Teleman

Aix-Marseille Université

7 décembre 2021

1 Endomorphismes normaux, hermitiens, anti-hermitiens et unitaires dans un espace hermitien

Définition 1.1 *Soient (E_1, f_1), (E_2, f_2) espaces hermitiens et $\phi : E_1 \to E_2$ une application linéaire. L'application adjointe de ϕ est l'application linéaire $\phi^* : E_2 \to E_1$ qui satisfait*

$$\forall (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2,\ \langle \phi(x_1), x_2 \rangle_{f_2} = \langle x_1, \phi^*(x_2) \rangle_{f_1}.$$

En conjuguant les deux membres, on constate que cette égalité est équivalente à

$$\forall (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2,\ \langle x_2, \phi(x_1) \rangle_{f_2} = \langle \phi^*(x_2), x_1 \rangle_{f_1}.$$

Remarque 1.2 *Toute application linéaire admet une unique application adjointe. Si B_i est une base orthonormée de E_i (pour $i \in \{1, 2\}$) alors on a*

$$M_{B_2 B_1}(\phi^*) = M_{B_1 B_2}(\phi)^*.$$

Dans cette formule, à droite, on a utilisé la notation * pour l'adjointe d'une matrice. L'adjointe d'une matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ est la matrice $A^* \in M_{n,m}(\mathbb{C})$ définie par

$$A^* := {}^t\bar{A}.$$

Remarque 1.3 *Soient (E_1, f_1), (E_2, f_2), (E_3, f_3) des espaces hermitiens.*

1. *L'application $L(E_1, E_2) \to L(E_2, E_1)$ donnée par $\phi \mapsto \phi^*$ est anti-linéaire.*
2. *Pour tout $\phi \in L(E_1, E_2)$ on a :*
   (a) $(\phi^*)^* = \phi$,
   (b) $\mathrm{im}(\phi) = \ker(\phi^*)^{\perp_{f_2}}$, $\mathrm{im}(\phi^*) = \ker(\phi)^{\perp_{f_1}}$.
3. *Soient $\phi \in L(E_1, E_2)$, $\psi \in L(E_2, E_3)$. Alors $(\psi \circ \phi) = \phi^* \circ \psi^*$.*

Démonstration: Exercice. ■

Lemme 1.4 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, ϕ, $\psi \in \mathrm{End}(E)$ deux endomorphismes qui commutent et $\lambda \in \mathrm{Spec}(\phi)$. Alors l'espace propre E_λ de ϕ qui correspond à λ est ψ-invariant, i.e. $\psi(E_\lambda) \subset E_\lambda$.*

Démonstration: Si $x \in E_\lambda$ alors

$$\phi(\psi(x)) = (\phi \circ \psi)(x) = (\psi \circ \phi)(x) = \psi(\phi)(x)) = \psi(\lambda x) = \lambda \psi(x)\ ,$$

donc $\psi(x) \in E_\lambda$. ■

Lemme 1.5 *Soient (E, f) un espace hermitien, $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E et $\phi \in \mathrm{End}(E)$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes*

1. *F est ϕ-invariant.*
2. *$F^\perp$ est ϕ^*-invariant.*

Démonstration: 1⇒ 2. Supposons que F est ϕ-invariant et soit $x \in F^\perp$. Pour tout $y \in F$ on a

$$\langle \phi^*(x), y\rangle_f = \langle x, \phi(y)\rangle_f = 0$$

parce que $x \in F^\perp$ et, F étant ϕ-invariant, on a $\phi(y) \in F$.

2⇒ 1. On applique l'implication déjà démontrée à l'endomorphisme $\psi = \varphi^*$ et au sous-espace $G := F^\perp$. Puisque G est ψ-invariant, il en résulte que $G^\perp$ est ψ^*-invariant. Mais $G^\perp = (F^\perp)^\perp = F$ et $\psi^* = (\phi^*)^* = \phi$. ■

Définition 1.6 *Soit (E, f) un espace hermitien. Un endomorphisme $\phi \in \mathrm{End}(E)$ est dit*

1. *normal, si $\phi \circ \phi^* = \phi^* \circ \phi$.*
2. *hermitien (auto-adjoint), si $\phi^* = \phi$.*
3. *anti-hermitien (anti-auto-adjoint), si $\phi^* = -\phi$.*
4. *unitaire, si ϕ est inversible et $\phi^{-1} = \phi^*$.*

Une matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ est dite normale (respectivement hermitienne, anti-hermitienne, unitaire) si $AA^* = A^*A$ (respectivement $A^* = A$, $A^* = -A$, $AA^* = I_n$). Ces notions correspondent aux notions d'endomorphisme normal (respectivement hermitien, anti-hermitien, unitaire) de l'espace hermitien standard $(\mathbb{C}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{st}})$, où le produit scalaire hermitien standard sur $\mathbb{C}^n$ est défini par

$$\langle u, v\rangle_{\mathrm{st}} := \sum_{i=1}^{n} \bar{u}_i v_i \ .$$

Remarque 1.7
1. *Tout endomorphisme hermitien, anti-hermitien ou unitaire est normal.*
2. *L'ensemble des endomorphismes hermitiens de E est un sous-espace vectoriel* `réel` *de $\mathrm{End}(E)$.*
3. *L'ensemble des endomorphismes anti-hermitiens de E est un sous-espace vectoriel* `réel` *de $\mathrm{End}(E)$. Ce sous-espace est stable pour l'opération*

   $$(\phi, \psi) \to [\phi, \psi] := \phi \circ \psi - \psi \circ \phi$$

   (le commutateur ou le crochet des endomorphismes).
4. *L'ensemble $\mathrm{U}(E)$ des endomorphismes unitaires de E est un sous-groupe du groupe $\mathrm{GL}(E)$ des automorphismes linéaires de E. Muni de la structure de groupe définie par la composition, $\mathrm{U}(E)$ s'appelle le groupe unitaire de l'espace hermitien (E, f) et est compact.*
5. *Si $\phi \in \mathrm{U}(E)$ alors $|\det(\phi)| = 1$ et l'application $\det : \mathrm{U}(E) \to \mathrm{U}$ est un epimorphisme de groupes. Ici on a noté $\mathrm{U} := \{z \in \mathbb{C}|\ |z| = 1\}$, regardé comme sous-groupe du groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$.*
6. *Soit B une base orthonormée de E. Un endomorphisme $\phi \in \mathrm{End}(E)$ est normal (respectivement hermitien, anti-hermitien, unitaire) si et seulement si $M_B(\phi)$ est une matrice normale (respectivement hermitienne, anti-hermitienne, unitaire).*

Démonstration: Exercice. ■

On définit le groupe spécial unitaire $\mathrm{SU}(E)$ de l'espace hermitien (E, f) par

$$\mathrm{SU}(E) := \{\phi \in \mathrm{U}(E)|\ \det(\phi) = 1\}.$$

En fixant une base orthonormée dans E, les groupes $\mathrm{U}(E)$, $\mathrm{SU}(E)$ s'identifient aux groupes des matrices

$$\mathrm{U}(n) := \{A \in M_{n,n}(\mathbb{C})|\ A^*A = I_n\}\ ,\ \mathrm{SU}(n) := \{A \in \mathrm{U}(n)|\ \det(A) = 1\}.$$

Théorème 1.8 *Soit (E, f) un espace hermitien et soit $\phi \in \mathrm{End}(E)$. Sont équivalentes :*

1. *ϕ est normal.*
2. *ϕ est diagonalisable dans une base orthonormée, i.e. il existe une base orthonormée B de E telle que $M_B(\phi)$ soit diagonale.*

Démonstration: $2 \Rightarrow 1$. Soit B une base orthonormée de E telle que $M_B(\phi)$ soit diagonale. En écrivant

$$M_B(\phi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} ,$$

on obtient d'après la remarque 1.2

$$M_B(\phi)^* = \begin{pmatrix} \bar\lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \bar\lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \bar\lambda_n \end{pmatrix} ,$$

donc

$$M_B(\phi)M_B(\phi)^* = M_B(\phi)^* M_B(\phi) = \begin{pmatrix} \lambda_1\bar\lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2\bar\lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\bar\lambda_n \end{pmatrix} .$$

mais l'égalité $M_B(\phi)M_B(\phi)^* = M_B(\phi)^* M_B(\phi)$ est équivalente à l'égalité $\phi\circ\phi^* = \phi^*\circ\phi$. Donc ϕ est normal.

$1 \Rightarrow 2$. On va démontrer l'implication $1 \Rightarrow 2$ par récurrence par rapport à $n := \dim(E)$. Pour $\dim(E) = 1$ l'implication est évidente. Pour $n > 1$ supposons que l'implication $1 \Rightarrow 2$ est vraie dans tout espace hermitien de dimension $m < n$, et démontrons qu'elle est vraie aussi dans un espace hermitien E de dimension n. Soit donc $\phi \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme normal et soit $\lambda \in \mathrm{Spec}(\phi)$. A remarquer que $\mathrm{Spec}(\phi) \neq \emptyset$ parce qu'il s'agit d'un endomorphisme complexe, donc $P_\phi(X)$ est scindé. Nous obtenons la décomposition en somme directe orthogonale

$$E = E_\lambda \oplus E_\lambda^\perp \tag{1}$$

Si $E_\lambda = E$ (i.e. si $E_\lambda^\perp = \{0_E\}$) on a $\phi = \lambda \mathrm{id}_E$, donc la matrice de ϕ sera diagonale dans *toute* base de E. Supposons $E_\lambda \subsetneq E$. Dans ce cas on a $1 \leq \dim(E_\lambda) < n$, $1 \leq \dim(E_\lambda^\perp) < n$.

Puisque E_λ est un sous-espace propre de l'endomorphisme ϕ, il est un sous-espace ϕ-invariant. Puisque $\phi \circ \phi^* = \phi^* \circ \phi$ il en résulte d'après le lemme 1.4 que E_λ sera aussi ϕ^*-invariant.

D'autre part, puisque E_λ est ϕ-invariant, il en résulte d'après le lemme 1.5 que $E_\lambda^\perp$ est ϕ^*-invariant et puisque E_λ est ϕ^*-invariant, il en résulte d'après le même lemme que $E_\lambda^\perp$ est ϕ-invariant. En conclusion chacun des deux facteurs E_λ, $E_\lambda^\perp$ de la décomposition (1) est à la fois ϕ et ϕ^*-invariant. Soit $\tilde\phi \in \mathrm{End}(E_\lambda^\perp)$ l'endomorphisme de $E_\lambda^\perp$ induit par ϕ et soit $\tilde\psi \in \mathrm{End}(E_\lambda^\perp)$ l'endomorphisme induit par ϕ^* sur le sous-espace $E_\lambda^\perp$. Ce sous-espace vectoriel sera considéré comme un espace hermitien muni du produit scalaire hermitien g induit par f. Nous affirmons que $\tilde\psi$ coïncide avec l'adjoint de $\tilde\phi$ et que $\tilde\phi$ est un endomorphisme normal de $E_\lambda^\perp$. Pour la première affirmation il suffit de remarquer que pour tous $x,\ y \in E^\perp$ on a

$$\langle \tilde\phi(x), y\rangle_g = \langle \phi(x), y\rangle_f = \langle x, \phi^*(y)\rangle_f = \langle x, \tilde\psi(y)\rangle_g \ .$$

Pour la deuxième affirmation il suffit de remarquer que pour tout $x \in E_\lambda^\perp$ on a

$$(\tilde\phi \circ \tilde\phi^*)(x) = (\tilde\phi \circ \tilde\psi)(x) = \tilde\phi(\tilde\psi(x)) = \phi(\phi^*(x)) = \phi^*(\phi(x)) = \tilde\psi(\tilde\phi(x)) = (\tilde\psi \circ \tilde\phi)(x) = (\tilde\phi^* \circ \tilde\phi)(x) \ .$$

Pour ces égalités on a utilisé le fait que $\tilde\phi$, $\tilde\psi$ sont induits par ϕ et ϕ^* respectivement, et que ϕ est normal. Puisque $\dim(E_\lambda^\perp) < n$, on déduit, en utilisant l'hypothèse de récurrence, que l'endomorphisme normal $\tilde\phi$ est diagonalisable dans une base orthonormée $\tilde B$ de $E_\lambda^\perp$. Il suffit de poser $B = B_\lambda \tilde B$, où B_λ este une base orthonormée arbitraire de l'espace propre E_λ. ∎

En utilisant le théorème 1.8 on obtient facilement :

Corollaire 1.9 *Soient (E, f) un espace hermitien et $\phi \in \mathrm{End}(E)$. Sont équivalentes*

1. *ϕ est normal.*
2. *ϕ est diagonalisable et les sous-espaces propres de ϕ sont orthogonaux deux à deux.*

Démonstration: Exercice. ■

Proposition 1.10 *Soient (E, f) un espace hermitien et $\phi \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme* `normal` *de E. Alors*

1. *ϕ est hermitien si et seulement si $\mathrm{Spec}(\phi) \subset \mathbb{R}$.*
2. *ϕ est anti-hermitien si et seulement si $\mathrm{Spec}(\phi) \subset i\mathbb{R}$.*
3. *ϕ est unitaire si et seulement si $\mathrm{Spec}(\phi) \subset \mathrm{U}$ où $\mathrm{U} := \{z \in \mathbb{C} |\ |z| = 1\}$.*

Démonstration: D'après le théorème 1.8 il existe une base orthonormée B de E qui diagonalise ϕ, c'est à dire

$$M_B(\phi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{m_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k I_{m_k} \end{pmatrix},$$

où $\mathrm{Spec}(\phi) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ et $m_i = \mathrm{m}_a(\lambda_i)$. D'après la remarque 1.2 on a

$$M_B(\phi)^* = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 I_{m_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}_2 I_{m_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \bar{\lambda}_k I_{m_k} \end{pmatrix},$$

donc

$$M_B(\phi) M_B(\phi)^* = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_1 I_{m_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}_2 \bar{\lambda}_2 I_{m_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \bar{\lambda}_k \bar{\lambda}_k I_{m_k} \end{pmatrix}.$$

1. La condition "ϕ est hermitien" est équivalante à $M_B(\phi)^* = M_B(\phi)$, i.e. $\bar{\lambda}_i = \lambda_i$ pour $1 \leq i \leq k$ (soit $\lambda_i \in \mathbb{R}$ pour $1 \leq i \leq k$).
2. La condition "ϕ est anti-hermitien" est équivalante à $M_B(\phi)^* = -M_B(\phi)$, i.e. $\bar{\lambda}_i = -\lambda_i$ pour $1 \leq i \leq k$ (soit $\lambda_i \in i\mathbb{R}$ pour $1 \leq i \leq k$) .
3. La condition "ϕ est unitaire" est équivalante à $M_B(\phi) M_B(\phi)^* = I_n$, i.e. $\lambda_i \bar{\lambda}_i = 1$ pour $1 \leq i \leq k$ (soit $\lambda_i \in \mathrm{U}$ pour $1 \leq i \leq k$).

■

En combinant le théorème 1.8 avec la proposition 1.10 on obtient :

Théorème 1.11 *(formes canoniques des endomorphismes remarquables d'un espace hermitien) Soient (E, f) un espace hermitien et $\phi \in \mathrm{End}(E)$. Alors*

1. *ϕ est hermitien si et seulement si il existe une base orthonormée B de E telle que*

$$M_B(\phi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{m_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k I_{m_k} \end{pmatrix}, \textit{ avec } \lambda_i \in \mathbb{R} \textit{ pour } 1 \leq i \leq k.$$

2. *ϕ est anti-hermitien si et seulement si il existe une base orthonormée B de E telle que*

$$M_B(\phi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{m_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k I_{m_k} \end{pmatrix}, \text{ avec } \lambda_i \in i\mathbb{R} \text{ pour } 1 \le i \le k.$$

3. *ϕ est unitaire si et seulement si il existe une base orthonormée B de E telle que*

$$M_B(\phi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{m_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k I_{m_k} \end{pmatrix}, \text{ avec } |\lambda_i| = 1 \text{ pour } 1 \le i \le k.$$

Définition 1.12 *Soit $\phi \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme* `hermitien`. *La forme hermitienne associée à ϕ est définie par*

$$f_\phi(x,y) := \langle x, \phi(y)\rangle_f \ .$$

Remarquer que $\langle x, \phi(y)\rangle_f = \langle \varphi(x), y\rangle_f$ donc on peut utiliser la 2me formule dans la définition de $f_\phi(x,y)$. Remarque aussi que, pour $t \in \mathbb{R}$, on a évidemment $f_{t\mathrm{id}_E} = tf$.

Définition 1.13 *Soit (E,f) un espace hermitien. Un endomorphisme* `hermitien` *$\phi \in \mathrm{End}(E)$ est dit*

1. *positif, si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :*
   (a) $\mathrm{Spec}(\phi) \subset \mathbb{R}_+$,
   (b) *La forme hermitienne associée à ϕ est positive, i. e.*
   $$\langle x, \varphi(x)\rangle_f \ge 0 \ \ \forall x \in E \ .$$
2. *défini positif, si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :*
   (a) $\mathrm{Spec}(\phi) \subset \mathbb{R}_+^*$,
   (b) *La forme hermitienne associée à ϕ est définie positive, i. e.*
   $$\langle x, \varphi(x)\rangle_f > 0 \ \ \forall x \in E \setminus \{0_E\} \ .$$

La définition 1.13 affirme implicitement l'équivalence des conditions $1(a)$, $1(b)$, et l'équivalence des conditions $2(a)$, $2(b)$. Pour démontrer l'équivalence $1(a) \Leftrightarrow 1(b)$ utilisons la décomposition de E en somme directe orthogonale de sous-espaces propres de ϕ

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Spec}(\phi)} E^\phi_\lambda \ .$$

Donc tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = \sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(\phi)} x_\lambda$ avec $x_\lambda \in E^\phi_\lambda$. On a

$$\begin{aligned} \langle x, \phi(x)\rangle_f = \Big\langle \sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(\phi)} x_\lambda \ , \ \varphi\Big(\sum_{\mu \in \mathrm{Spec}(\phi)} x_\mu\Big)\Big\rangle_f &= \Big\langle \sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(\phi)} x_\lambda \ , \ \sum_{\mu \in \mathrm{Spec}(\phi)} \mu x_\mu \Big\rangle_f \\ &= \sum_{\lambda,\mu \in \mathrm{Spec}(\phi)} \mu \langle x_\lambda, x_\mu\rangle_f = \sum_{\mu \in \mathrm{Spec}(\phi)} \mu \|x_\mu\|_f^2 \ , \end{aligned} \tag{2}$$

parce que $x_\lambda \perp x_\mu$ pour $\lambda \neq \mu$. Donc si $\mathrm{Spec}(\phi) \subset \mathbb{R}_+$ on obtient $\langle x, \phi(x)\rangle_f \ge 0$ pour tout $x \in E$. Réciproquement, supposons que $1(b)$ est vérifiée, et choisissons $\mu \in \mathrm{Spec}(\phi)$ et $x \in E_\mu \setminus \{0_E\}$. Alors

$$\mu \|x\|_f^2 = \langle x, \phi(x)\rangle_f \ge 0 \ ,$$

donc (puisque $\|x\|_f^2 > 0$) on obtient $\mu \ge 0$. En utilisant la même formule (1) on obtient facilement l'équivalence $2(a) \Leftrightarrow 2(b)$. ■

Pour tester si un endomorphisme hermitien donné est défini positif nous avons un critère important :

Proposition 1.14 *(le critère de Sylvester) Soit* (E, f) *un espace hermitien de dimension* n*, soit* $\phi \in \mathrm{End}(E)$ *un endomorphisme* `hermitien`*,* B *une base orthonormée de* E *et* $A := M_B(\phi)$*. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. φ *est défini positif,*
2. *Pour tout* $k \in \{1, \dots, n\}$ *on a* $\det\left((a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq k\\ 1\leq j\leq k}}\right) > 0$*. (i.e. si les* n `mineurs principaux dominants` *de* A *sont strictement positifs).*

Théorème 1.15 *(la racine carrée d'un endomorphisme hermitien positif) Soit* (E, f) *une espace hermitien et* $\phi \in \mathrm{End}(E)$ *un endomorphisme hermitien positif. Alors il existe un unique endomorphisme hermitien positif* $\psi \in \mathrm{End}(E)$ *tel que* $\psi^2 = \phi$*. Le spectre de cet endomorphisme est*

$$\mathrm{Spec}(\psi) = \{\sqrt{\lambda} |\ \lambda \in \mathrm{Spec}(\phi)\} \ ,$$

en particulier ψ *sera défini positif si* ϕ *est défini positif.*

Démonstration: En utilisant le théorème 1.11 on obtient une base orthonormée B de E telle que

$$M_B(\phi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{m_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k I_{m_k} \end{pmatrix}, \text{ avec } \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ pour } 1 \leq i \leq k \ ,$$

Par l'hypothèse on a $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$. Soit ψ l'endomorphisme de E tel que

$$M_B(\psi) = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} I_{m_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} I_{m_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\lambda_k} I_{m_k} \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\psi = \sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(\phi)} \sqrt{\lambda} p_\lambda \ ,$$

où $p_\lambda : E \to E^\phi_\lambda$ désigne la projection sur l'espace propre E^ϕ_λ. C'est facile de voir que ψ est hermitien, positif et que $\psi^2 = \phi$. Pour démontrer l'unicité il suffit de remarquer que si $\psi^2 = \phi$, alors ψ et ϕ commutent. D'après le lemme 1.4 il en résulte que E^ϕ_λ est ψ-invariant pour tout $\lambda \in \mathrm{Spec}(\phi)$. L'endomorphisme $\psi_\lambda \in \mathrm{End}(E^\phi_\lambda)$ est hermitien (pourquoi ?) et son spectre se réduit à $\{\sqrt{\lambda}\}$. Donc $\psi_\lambda = \sqrt{\lambda}\mathrm{id}_{E^\phi_\lambda}$ et $\psi = \sum_{\lambda\in\mathrm{Spec}(\phi)} \sqrt{\lambda} p_\lambda$. ■

Lemme 1.16 *Soit* (E, f) *une espace hermitien et* $\phi \in \mathrm{End}(E)$*. Alors l'endomorphisme* $\phi^* \circ \phi$ *est un endomorphisme hermitien positif. Si* $\phi \in \mathrm{GL}(E)$*, alors* $\phi^* \circ \phi$ *est un endomorphisme hermitien défini positif.*

Démonstration: On a

$$(\phi^* \circ \phi)^* = \phi^* \circ (\phi^*)^* = \phi^* \circ \phi \ ,$$

donc $\phi^* \circ \phi$ est bien hermitien. Pour tout $x \in E$ on a

$$\langle(\phi^* \circ \phi)(x), x\rangle_f = \langle\phi^*(\phi(x)), x\rangle_f = \langle\phi(x), \phi(x)\rangle_f == \|\phi(x)\|^2 \geq 0 \ ,$$

donc ϕ est positif. Supposons que $\phi \in \mathrm{GL}(E)$ et soit $x \in E_\setminus\{0_E\}$. Puisque $\ker(\phi) = \{0_E\}$ on obtient $\phi(x) \neq 0_E$, donc le même argument donne $\left\langle(\phi^* \circ \phi)(x), x\right\rangle_f > 0$. Donc ϕ est défini positif. ■

Théorème 1.17 *(la décomposition polaire d'un endomorphisme inversible) Soit (E, f) une espace hermitien et $\phi \in \mathrm{GL}(E)$. Alors il existe un unique endomorphisme unitaire $u \in \mathrm{End}(E)$ et un unique endomorphisme hermitien défini positif $h \in \mathrm{End}(E)$ tels que $\phi = u \circ h$.*

Démonstration: D'après le lemme 1.16 l'endomorphisme $\chi := \phi^* \circ \phi$ est hermitien et défini positif. En utilisant le théorème 1.15 on obtient un endomorphisme hermitien défini positif h tel que $h^2 = \chi$. Cet endomorphisme est inversible et l'endomorphisme inverse h^{-1} est aussi hermitien (pourquoi ?). Nous posons

$$u := \phi \circ h^{-1} \ .$$

Nous affirmons que u est unitaire. En effet

$$u^* \circ u = (\phi \circ h^{-1})^* \circ (\phi \circ h^{-1}) = h^{-1} \circ (\phi^* \circ \phi) \circ h^{-1} = h^{-1} \circ (h^2) \circ h^{-1} = \mathrm{id}_E \ .$$

Avec ce choix on a $u \circ h = (\phi \circ h^{-1}) \circ h = \phi$, ce qui démontre l'existence de la paire (u, h) avec les propriétés requises. Pour démontrer l'unicité il suffit de remarque que l'égalité $\phi = \tilde{u} \circ \tilde{h}$ avec $\tilde{u}$ unitaire et $\tilde{h}$ hermitien implique $\phi^* \circ \phi = \tilde{h}^2$. Si on requiert que $\tilde{h}$ soit défini positif, il en résulte d'après le théorème 1.15 que $\tilde{h} = h$. Puisque $\tilde{u} \circ h = u \circ h$ et h est inversible on obtient $\tilde{u} = u$. ∎

En appliquant le théorème 1.17 à l'espace hermitien standard $(\mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ on obtient :

Corollaire 1.18 *(la décomposition polaire d'une matrice inversible) Soit $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Alors il existe une unique matrice unitaire U et une unique matrice hermitienne définie positive H telle que $A = UH$.*

2 Endomorphismes symétriques, anti-symétriques et orthogonaux dans un espace euclidien

2.1 La forme canonique d'un endomorphisme réel dont le complexifié est diagonalisable

Soit $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ et désignons par $f_A \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$, $f_A^{\mathbb{C}} \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$ les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ définis par A. Deux cas peuvent se présenter :

1. Le polynôme $P_A(X) \in \mathbb{R}[X]$ est scindé dans $\mathbb{R}$. Dans ce cas f_A est diagonalisable si et seulement si $f_A^{\mathbb{C}}$ est diagonalisable. En effet, il suffit d'utiliser le critère de diagonalisabilité qui utilise le polynôme minimal, et de remarquer que les polynômes minimales des deux endomorphimes coïncident.
2. Le polynôme $P_A(X) \in \mathbb{R}[X]$ n'est pas scindé dans $\mathbb{R}$. Dans ce cas c'est bien possible que $f_A^{\mathbb{C}}$ soit diagonalisable, mais f_A n'est pas diagonalisable.

Exemple : Soit

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

la matrice de la rotation $r_\theta \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ d'angle θ dans le plan $\mathbb{R}^2$. On a

$$P_{R_\theta}(X) = X^2 - 2\cos(\theta)X + 1 = \big(X - (\cos(\theta) + i\sin(\theta)\big)\big(X - (\cos(\theta) - i\sin(\theta)\big) \ .$$

Donc l'endomorphisme $r_\theta \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ est diagonalisable seulement pour $\theta \in \mathbb{Z}\pi$. D'autre part l'endomorphisme complexe $\psi \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^2)$ défini par la même matrice est toujours diagonalisable. Pourquoi ?

On arrive donc au problème naturel suivant :

Question : Soit $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ et désignons par $\phi := f_A \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$, $\psi := f_A^{\mathbb{C}} \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$ les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ définis par la matrice A. Supposons que ψ est diagonalisable. Trouver une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de ϕ est aussi simple que possible.

Puisque $P_A(X) \in \mathbb{R}[X]$, le spectre complexe de A est invariant pour la conjugaison, donc s'écrit sous la forme

$$\mathrm{Spec}(\psi) = (\mathrm{Spec}(\psi) \cap \mathbb{R}) \cup (\mathrm{Spec}(\psi) \setminus \mathbb{R}) = \{a_1, \ldots, a_l\} \cup \{\alpha_1, \bar{\alpha}_1, \ldots, \alpha_m, \bar{\alpha}_m\} \ ,$$

avec $a_i \in \mathbb{R}$ et $\Im(\alpha_i) > 0$. Le polynôme caractéristique de A se factorise sous la forme

$$P_A(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{l}(X - a_i)^{m_i} \prod_{j=1}^{m}(X - \alpha_j)^{\mu_j}(X - \bar{\alpha}_j)^{\mu_j} = \prod_{i=1}^{l}(X - a_i)^{m_i} \prod_{j=1}^{m}(X^2 - 2\Re(\alpha_j)X + |\alpha_j|^2)^{\mu_j} \ ,$$

où $m_i := \mathrm{m}_a(a_i)$ et $\mu_j :=: m_a(\alpha_j)$. La première formule donne une factorisation de $P_A(X)$ dans $\mathbb{C}[X]$ et la deuxième formule une factorisation de $P_A(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Puisque nous avons supposé que ψ est diagonalisable on a $\beta(a_i) = \beta(\alpha_j) = 1$, donc pour le polynôme minimal on obtient

$$m_A(X) = m_\phi(X) = m_\psi(X) = \prod_{i=1}^{l}(X - a_i) \prod_{j=1}^{m}(X - \alpha_j)(X - \bar{\alpha}_j) = \prod_{i=1}^{l}(X - a_i) \prod_{j=1}^{m}(X^2 - 2\Re(\alpha_j)X + |\alpha_j|^2) \ .$$

En appliquant le lemme des noyaux aux endomorphismes $\psi \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$, $\phi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ on obtient une décomposition de $\mathbb{C}^n$ en somme directe de sous-espaces ψ-invariants et une décomposition de $\mathbb{R}^n$ en somme directe de sous-espaces ϕ-invariants :

$$\mathbb{C}^n = \left(\bigoplus_{i=1}^{l} E^\psi_{a_i}\right) \bigoplus \left(\bigoplus_{j=1}^{m} (E^\psi_{\alpha_j} \oplus E^\psi_{\bar{\alpha}_j})\right)$$

$$\mathbb{R}^n = \left(\bigoplus_{i=1}^{l} E^\phi_{a_i}\right) \bigoplus \left(\bigoplus_{j=1}^{m} F_j\right)$$

où $E^\psi_{a_i}$, $E^\psi_{\alpha_j}$, $E^\psi_{\bar{\alpha}_j} \subset \mathbb{C}^n$ désigne le sous-espace propre de ψ associé à la valeur propre a_i, α_j, $\bar{\alpha}_j$ respectivement, $E^\phi_{a_i} \subset \mathbb{R}^n$ désigne le sous-espace propre de ϕ associé à la valeur propre a_i et

$$F_j := \ker\left(\phi^2 - 2\Re(\alpha_j)\phi + |\alpha_j|^2 \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}\right) \subset \mathbb{R}^n \ .$$

Remarquer que l'endomorphisme induit par ϕ sur le facteur $E^\phi_{a_i}$ de la 2ème somme directe coïncide avec l'homothétie $a_i \mathrm{id}_{E_{ai}}$, donc c'est un endomorphisme très simple. On va trouver une forme standard (réduite) pour l'endomorphisme $\phi_j \in \mathrm{End}(F_j)$ induit par ϕ sur le facteur F_j de la même somme directe.

Proposition 2.1 *(la forme canonique d'un endomorphisme réel dont le complexifié est diagonalisable)*

1. *Les sous-espaces $E^\psi_{a_i}$, $E^\psi_{\alpha_j}$, $E^\psi_{\bar{\alpha}_j}$, $E^\phi_{a_i}$, F_j sont reliés par les relations*
   (a) $\overline{E^\psi_{a_i}} = E^\psi_{a_i}$ *et* $E^\phi_{a_i} = E^\psi_{a_i} \cap \mathbb{R}^n$,
   (b) $\overline{E^\psi_{\alpha_j}} = E^\psi_{\bar{\alpha}_j}$ *et* $F_j = \left(E^\psi_{\alpha_j} \oplus E^\psi_{\bar{\alpha}_j}\right) \cap \mathbb{R}^n$.
2. *Les applications linéaires $E^\psi_{\alpha_j} \to F_j$, $E^\psi_{\bar{\alpha}_j} \to F_j$ données par $w \to \Re(w)$ sont des isomorphismes $\mathbb{R}$-linéaires.*
3. *Soit $\mathcal{B}_j := (f^j_1, \dots, f^j_{\mu_j})$ est une base de $E^\psi_{\alpha_j}$. Alors, en posant $u_j = \Re(f_j)$, $v_j := -\Im(f_j)$ la famille*

$$\tilde{\mathcal{B}}_j := (u^j_1, v^j_1, \dots, u^j_{\mu_j}, v^j_{\mu_j})$$

est une base de F_j et

$$M_{\tilde{\mathcal{B}}_j}(\phi_j) = \begin{pmatrix} A_j & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_j & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_j \end{pmatrix} \in M_{2\mu_j, 2\mu_j}(\mathbb{R}), \ \text{où } A_j := \begin{pmatrix} \Re(\alpha_j) & -\Im(\alpha_j) \\ \Im(\alpha_j) & \Re(\alpha_j) \end{pmatrix} \ .$$

4. *Soit B_i une base arbitraire de $E^{\phi}_{a_i}$ pour $1 \leq i \leq l$. Alors la matrice de ϕ dans la base concaténée $B := B_1 \dots B_l \tilde{\mathcal{B}}_1 \dots \tilde{\mathcal{B}}_m$ est une matrice diagonale par blocs de la forme*

$$\begin{pmatrix} a_1 I_{m_1} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & a_l I_{m_l} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & Y_1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & Y_k \end{pmatrix} \text{ où } Y_i \in M_{2,2}(\mathbb{R}) \ .$$

Si $\Im(\alpha) > 0$ et $\alpha \in \mathrm{Spec}(\psi)$ alors $\begin{pmatrix} \Re(\alpha) & -\Im(\alpha) \\ \Im(\alpha) & \Re(\alpha) \end{pmatrix}$ intervient $m_a(\alpha)$ fois dans la suite $(Y_1, \dots Y_k)$.

Démonstration: Exercice. ∎

2.2 Formes canoniques des endomorphismes remarquables d'un espace euclidien

Définition 2.2 *Soient (E_1, f_1), (E_2, f_2) espaces euclidiens et $\phi : E_1 \to E_2$ une application linéaire. L'application adjointe de ϕ est l'application linéaire $\phi^* : E_2 \to E_1$ qui satisfait*

$$\forall (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2, \ \langle \phi(x_1), x_2 \rangle_{f_2} = \langle x_1, \phi^*(x_2) \rangle_{f_1}.$$

Remarque 2.3 *Toute application linéaire admet une unique application adjointe. Si B_i est une base orthonormée de E_i (pour $i \in \{1, 2\}$) alors on a*

$$M_{B_2 B_1}(\phi^*) = {}^t M_{B_1 B_2}(\phi).$$

Dans cette formule, à droite, on a utilisé la notation ${}^t(\cdot)$ pour la matrice transposée (ou adjointe) d'une matrice réelle. Dans le cas réel la notion de "matrice adjointe" coïncide avec celle de "matrice transposée", tandis que dans le cas complexe les deux notions sont différentes.

Définition 2.4 *Soit (E, f) un espace euclidien. Un endomorphisme $\phi \in \mathrm{End}(E)$ est dit*

1. *symétrique (auto-adjoint), si $\phi^* = \phi$,*
2. *anti-symétrique (anti-auto-adjoint), si $\phi^* = -\phi$,*
3. *orthogonal, si ϕ est inversible et $\phi^{-1} = \phi^*$.*

Une matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ est dite symétrique (respectivement anti-symétrique, orthogonale) si ${}^t A = A$ (respectivement ${}^t A = -A$, $A {}^t A = I_n$). Ces notions correspondent aux notions d'endomorphisme symétrique (respectivement anti-symétrique, orthogonal) de l'espace euclidien standard $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{st}})$, où le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^n$ est défini par

$$\langle x, y \rangle_{\mathrm{st}} := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \ .$$

Remarque 2.5 1. *L'ensemble des endomorphismes symétriques de E est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{End}(E)$.*

2. *L'ensemble des endomorphismes anti-symétriques de E est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{End}(E)$. Ce sous-espace est stable pour l'opération*

$$(\phi, \psi) \to [\phi, \psi] := \phi \circ \psi - \psi \circ \phi$$

(le commutateur ou le crochet de Lie des endomorphismes).

3. *L'ensemble $\mathrm{O}(E)$ des endomorphismes orthogonaux de E est un sous-groupe du groupe $\mathrm{GL}(E)$ des automorphismes linéaires de E. Ce sous-groupe s'appelle le groupe orthogonal de l'espace euclidien (E, f) et est compact.*

4. *Si $\phi \in \mathrm{O}(E)$ alors $\det(\phi) \in \{\pm 1\}$ et l'application $\det : \mathrm{O}(E) \to \{\pm 1\}$ est un epimorphisme de groupes. Ici $\{\pm 1\}$ est regardé comme sous-groupe du groupe multiplicatif $\mathbb{R}^*$.*
5. *Soit B une base orthonormée de E. Un endomorphisme $\phi \in \mathrm{End}(E)$ est symétrique (respectivement anti-symétrique, orthogonal) si et seulement si $M_B(\phi)$ est une matrice symétrique (respectivement, anti-symétrique, orthogonale).*

Démonstration: Exercice. ■

On définit le groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}(E)$ de l'espace euclidien (E, f) par

$$\mathrm{SO}(E) := \{\phi \in \mathrm{O}(E)| \ \det(\phi) = 1\} \ .$$

En fixant une base orthonormée dans E, les groupes $\mathrm{O}(E)$, $\mathrm{SO}(E)$ s'identifient respectivement aux groupes des matrices

$$\mathrm{O}(n) := \{A \in M_{n,n}(\mathbb{R})| \ {}^t A\, A = I_n\}, \ \mathrm{SO}(n) := \{A \in \mathrm{O}(n)| \ \det(A) = 1\}.$$

Exercice : Pour une matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ désignons par a_j la $j$ème colonne de A. Montrer que l'application $A \mapsto a_1$ définit un homéomorphisme $\tau : \mathrm{SO}(2) \to \mathrm{U}$, où U est le cercle de centre $0_{\mathbb{R}^2}$ et rayon 1 dans le plan $\mathbb{R}^2$. Si on identifie ce cercle avec le cercle des nombres complexes de module 1 (muni de sa structure naturelle de groupe définie par la multiplication complexe), τ devient un isomorphisme de groupes.

Exercice : Énoncer et démontrer les analogues de la remarque 1.3 et du lemme 1.5 pour les espaces euclidiens.

Théorème 2.6 *(formes canoniques des endomorphismes remarquables d'un espace euclidien) Soient (E, f) un espace euclidien de dimension n et $\phi \in \mathrm{End}(E)$. Alors*

1. *ϕ est symétrique si et seulement si ϕ est diagonalisable dans une base orthonormée, i.e. si et seulement si il existe une base orthonormée B de E telle que*

$$M_B(\phi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ où } \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ pour } 1 \leq i \leq n.$$

2. *ϕ est anti-symétrique si et seulement s'il existe une base orthonormée B de E, des nombres naturels l, k tels que $l + 2k = n$ et $(y_1, \dots, y_k) \in (\mathbb{R}^*_+)^k$ tels que*

$$M_B(\phi) = \begin{pmatrix} O_l & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Y_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & Y_k \end{pmatrix} \text{ où } O_l \text{ désigne la matrice nulle d'ordre } l, \text{ et } Y_i := \begin{pmatrix} 0 & -y_i \\ y_i & 0 \end{pmatrix}.$$

3. *ϕ est orthogonal si et seulement s'il existe une base orthonormée B de E, des nombres naturels p, q, k tels que $p + q + 2k = n$ et $(\theta_1, \dots, \theta_k) \in]0, \pi[^k$ tels que*

$$M_B(\phi) = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -I_q & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & R_{\theta_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & R_{\theta_k} \end{pmatrix} \text{ où } R_\theta := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

   En plus on a $\phi \in \mathrm{SO}(E)$ si et seulement si $q \in 2\mathbb{N}$.

Démonstration: En choisissant une base orthonormée arbitraire dans E on peut identifier l'espace euclidien E avec l'espace euclidien standard $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{st}})$. On peut supposer donc sans perte de généralité que $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien standard et que $\phi = f_A$ est l'endomorphisme défini par une matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. Soit $\psi = f_A^{\mathbb{C}}$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ défini par la même matrice. On va munir $\mathbb{C}^n$ du produit hermitien standard

$$\langle v, w\rangle_{\mathrm{st}} = \sum_{i=1}^{n} \bar{v}_i w_i \ .$$

Remarquons que

1. ϕ est symétrique $\Leftrightarrow$ ψ est hermitien,
2. ϕ est anti-symétrique $\Leftrightarrow$ ψ est anti-hermitien,
3. ϕ est orthogonal $\Leftrightarrow$ ψ est unitaire.

1. Supposons que ϕ est symétrique. D'après la proposition 1.10 on a $\mathrm{Spec}(\psi) = \mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(A) \subset \mathbb{R}$, donc $P_A(X)$ est scindé dans $\mathbb{R}$. Puisque ψ est diagonalisable, toutes les racines de $m_A(X)$ sont simples, donc (d'après le critère de diagonalisabilité qui utilise le polynôme minimal) ϕ est diagonalisable. D'après la proposition 2.1 on a $E_\lambda^\phi = E_\lambda^\psi \cap \mathbb{R}^n$ pour toute valeur propre $\lambda \in \mathrm{Spec}(\phi)$. En utilisant le corollaire 1.9 , on déduit que les espaces propres $(E_\lambda^\phi)_{\lambda\in\mathrm{Spec}(\phi)}$ sont orthogonaux deux à deux. Il suffit de choisir une base *orthonormée* B_λ dans chaque espace propre E_λ^ϕ et considérer la base concaténée.

2. Supposons que ϕ est anti-symétrique. Dans ce cas, d'après le théorème 1.11 on a $\mathrm{Spec}(\psi) = \mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(A) \subset i\mathbb{R}$, donc les arguments utilisés dans le cas antérieur ne s'appliquent plus. On va utiliser la dernière affirmation de la proposition 2.1 en remarquant que (en utilisant les notations introduites dans cette proposition) :

1) $(\mathrm{Spec}(\psi) \cap \mathbb{R}) \subset \{0\}$ donc, on a soit $l = 0$ (aucune valeur propre réelle), soit $l = 1$ et $a_1 = 0$.

2) Pour pour $1 \leq j \leq m$ on a
$$\alpha_j \in i\mathbb{R} \cap \{z \in \mathbb{C} |\ \Im(z) > 0\} = i\mathbb{R}_+^* \ .$$

En choisissant d'une manière convenable les bases B_1, $\mathcal{B}_j$, la base concaténée $B = B_1\tilde{\mathcal{B}}_1 \dots \tilde{\mathcal{B}}_m$ construite dans la proposition 2.1 sera orthonormée. En effet, il suffit de choisir une base orthonormée B_1 dans l'espace propre E_0, et prendre $\mathcal{B}_j = (\sqrt{2}g_1^j, \dots, \sqrt{2}g_{\mu_j}^j)$, où $(g_1^j, \dots, g_{\mu_j}^j)$ est une base orthonormée du sous-espace propre complexe $E_{\alpha_j}^\psi$. Pourquoi devons nous multiplier les vecteurs g_s^j par $\sqrt{2}$? L'explication est simple : les vecteurs de la base $\tilde{\mathcal{B}}_j$ de F_j sont donnés par les formules

$$u_s^j := \Re(f_s^j) = \frac{1}{2}(f_s^j + \bar{f}_s^j) \ , \ v_s^j = -\Im(f_s^j) = \frac{i}{2}(f_s^j - \bar{f}_s^j) \ .$$

Remarquons que $f_s^j \perp \bar{f}_s^j$ parce que les deux vecteurs appartiennent à deux sous-espaces propres différents de l'endomorphisme normal $\psi \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$ (voir le corollaire 1.9). Donc

$$\|u_s^j\|^2 = \|v_s^j\|^2 = \frac{1}{4}(\|f_s^j\|^2 + \|\bar{f}_s^j\|^2) = \frac{1}{2}\|f_s^j\|^2 \ ,$$

donc $\|u_s^j\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\|f_s^j\|$. Pour obtenir des vecteurs u_s^j, v_s^j unitaires nous avons donc besoin de vecteurs f_s^j avec $\|f_s^j\| = \sqrt{2}$. Démontrer soigneusement que la base concaténée $B = B_1\tilde{\mathcal{B}}_1 \dots \tilde{\mathcal{B}}_m$ définie plus haut est bien orthonormée.

3. Supposons que ϕ est orthogonal. Dans ce cas la démonstration utilise la même méthode que dans le cas des endomorphismes anti-symétriques. D'après la proposition 1.10 cette fois on a $\mathrm{Spec}(\psi) \subset \mathrm{U}$. On applique de nouveau la dernière affirmation de la proposition 2.1 en remarquant que cette fois :

1) $(\mathrm{Spec}(\psi) \cap \mathbb{R}) \subset \{\pm 1\}$ donc, on a soit $l = 0$ (aucune valeur propre réelle), soit $l = 1$ et $a_1 \in \{\pm 1\}$ (une seule valeur propre réelle) soit $l = 2$ et $\{a_1, a_2\} = \{\pm 1\}$ deux valeurs propres réelles).

2) Pour pour $1 \leq j \leq m$ on a
$$\alpha_j \in \mathrm{U} \cap \{z \in \mathbb{C} |\ \Im(z) > 0\} = \{\cos(\theta) + i\sin(\theta) |\ \theta \in]0, \pi[\} \ .$$

■

Comme dans le cas hermitien nous introduisons la classe important des endomorphismes symétriques positifs :

Définition 2.7 *Soit E un espace euclidien et $\phi \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme* `symétrique`. *La forme bilinéaire symétrique associée à ϕ est définie par*

$$f_\phi(x,y) := \langle x, \phi(y)\rangle_f = \langle \varphi(x), y\rangle_f \quad .$$

Définition 2.8 *Soit (E,f) un espace euclidien. Un endomorphisme* `symétrique` $\phi \in \mathrm{End}(E)$ *est dit*

1. *positif, si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :*
   (a) $\mathrm{Spec}(\phi) \subset \mathbb{R}_+$,
   (b) *La forme bilinéaire symétrique associée à ϕ est positive, i. e.*
   $$\langle x, \varphi(x)\rangle_f \geq 0 \quad \forall x \in E \ .$$
2. *défini positif, si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :*
   (a) $\mathrm{Spec}(\phi) \subset \mathbb{R}_+^*$,
   (b) *La forme bilinéaire symétrique associée à ϕ est définie positive, i. e.*
   $$\langle x, \varphi(x)\rangle_f > 0 \quad \forall x \in E \setminus \{0_E\} \ .$$

On peut démontrer les équivalences $1(a) \Leftrightarrow 1(b)$, $2(a) \Leftrightarrow 2(b)$ exactement comme dans le cas hermitien. Exercice. ■

Pour tester si un endomorphisme symétrique donné est défini positif nous avons le critère de Sylvester pour les endomorphismes symétriques :

Proposition 2.9 *(le critère de Sylvester) Soit E un espace euclidien de dimension n, $\phi \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme* `symétrique`, *B une base orthonormée de E, et soit $A := M_B(\phi)$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *φ est défini positif.*
2. *Pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$ on a* $\det\left((a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq k\\ 1\leq j\leq k}}\right) > 0$. *(i.e. si les n* `mineurs principaux dominants` *de A sont strictement positifs).*

En utilisant les mêmes arguments que dans le cas complexe on obtient les analogues des théorèmes 1.15, 1.17, du corollaire 1.18 et du lemme 1.16 :

Théorème 2.10 *(la racine carrée d'un endomorphisme symétrique positif) Soit (E,f) une espace euclidien et soit $\phi \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme symétrique positif. Alors il existe un unique endomorphisme symétrique positif $\psi \in \mathrm{End}(E)$ tel que $\psi^2 = \phi$. Le spectre de cet endomorphisme est*

$$\mathrm{Spec}(\psi) = \{\sqrt{\lambda} | \ \lambda \in \mathrm{Spec}(\phi)\} \ ,$$

en particulier ψ sera défini positif si ϕ est défini positif.

Lemme 2.11 *Soit (E,f) une espace euclidien et $\phi \in \mathrm{End}(E)$. Alors $\phi^* \circ \phi$ est un endomorphisme symétrique positif. Si $\phi \in \mathrm{GL}(E)$, alors $\phi^* \circ \phi$ sera un endomorphisme symétrique défini positif.*

Théorème 2.12 *(la décomposition polaire d'un endomorphisme inversible) Soit (E,f) une espace euclidien et $\phi \in \mathrm{GL}(E)$. Alors il existe un unique endomorphisme orthogonal $o \in \mathrm{End}(E)$ et un unique endomorphisme symétrique défini positif $s \in \mathrm{End}(E)$ tels que $\phi = o \circ s$.*

Corollaire 2.13 *(la décomposition polaire d'une matrice inversible) Soit $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Alors il existe une unique matrice orthogonale O et une unique matrice symétrique S définie positive telle que $A = OS$.*

Nous mentionons aussi un résultat important en analyse numérique :

Théorème 2.14 *(décomposition de Cholesky) Si A est une matrice symétrique définie positive, alors il existe une unique matrice réelle triangulaire supérieure U avec des éléments diagonaux strictement positifs telle que :*

$$A = U^T U \ .$$

2.3 Théorèmes de décomposition pour les isométries linéaires

Rappelons que :

1. La matrice

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

a une interprétation géométrique importante : l'endomorphisme r_θ de $\mathbb{R}^2$ défini par cette matrice est la rotation d'angle θ dans le plan.

2. En particulier, la matrice

$$R_\pi = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$$

correspond à la rotation d'angle π dans le plan, rotation qui coïncide avec la symétrie centrale de centre $0_{\mathbb{R}^2}$.

3. La matrice

$$\Sigma := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(dont le déterminant est -1) correspond à la symétrie (reflexion) axiale par rapport à l'axe $0x_2$.

Nous obtenons des interprétations géométriques similaires dans un espace euclidien arbitraire. Soit (E, f) un espace euclidien de dimension n, $B = (v_1, \dots, v_n)$ une base orhonormale fixée de E. La matrice

$$\begin{pmatrix} I_l & 0 & 0 \\ 0 & R_\theta & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-2-l} \end{pmatrix}$$

aura une interprétation géométrique évidente : l'endomorphisme défini par cette matrice dans la base B est la rotation d'angle θ autour du sous-espace $(n-2)$-dimensional $\mathrm{Vect}(v_{l+1}, v_{l+2})^\perp$. La matrice

$$\begin{pmatrix} I_l & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-1-l} \end{pmatrix}$$

définit la symétrie (reflexion) par rapport à l'hyperplan $v_{l+1}^\perp$. En général on va appeler *symétrie hyperplane* toute symétrie par rapport à un hyperplan de E.

En utilisant ces remarques on voit que la matrice

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -I_q & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & R_{\theta_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & R_{\theta_k} \end{pmatrix}$$

qui apparaît dans 3ème affirmation du théorème 2.6 (concernant la forme canonique des endomorphismes orthogonaux) a l'interprétation géométrique suivante :

— Si q est pair (donc si $\phi \in \mathrm{SO}(E)$), alors cette matrice correspond à la composition de $k + \frac{q}{2}$ rotations autour de sous-espaces de dimension $n-2$ qui sont orthogonaux deux à deux.
— Si q est impair, alors cette matrice correspond à la composition d'une symétrie hyperplane avec $k + \frac{q-1}{2}$ rotations autour de sous-espaces de dimension $n-2$ qui sont orthogonaux deux à deux.

En utilisant ces remarques et la 3ème affirmation du théorème 2.6 on obtient

Théorème 2.15 *Soit (E, f) un espace euclidien de dimension n et $\phi \in \mathrm{O}(E)$.*

1. *Si* $\det(\phi) = 1$ *(donc si* $\phi \in \mathrm{SO}(E)$*) alors* ϕ *s'écrit comme la composition de au plus* $\left[\frac{n}{2}\right]$ *rotations autour de sous-espaces de dimension* $n-2$ *qui sont orthogonaux deux à deux.*
2. *Si* $\det(\phi) = -1$ *(donc si* $\phi \in \mathrm{O}(E) \setminus \mathrm{SO}(E)$*) alors* ϕ *s'écrit comme la composition d'une symétrie par rapport à un hyperplan avec de au plus* $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ *rotations autour de sous-espaces de dimension* $n-2$ *qui sont orthogonaux deux à deux.*

Dans le cas 3-dimensionnel la première affirmation donne :

Corollaire 2.16 *Supposons que* $\dim(E) = 3$*. Toute isométrie linéaire* $\phi \in \mathrm{SO}(E)$ *est une rotation par rapport à une droite vectorielle de* E*.*

Remarquer qu'une rotation autour d'un sous-espace $F \subset E$ de dimension $n-2$ s'écrit comme la composition de deux symétries hyperplanes. Plus précisément, une telle rotation s'écrit comme la composition des symétries par rapport à deux hyperplans qui contiennent F. (Exercice : démontrer cette affirmation en étudiant d'abord la cas d'une rotation dans le plan $\mathbb{R}^2$). En utilisant cette remarque on obtient :

Corollaire 2.17 *(le théorème de Cartan) Toute isométrie linéaire* $\phi \in \mathrm{O}(E)$ *d'un espace euclidien de dimension* n *s'écrit comme la composition d'au plus* n *symétries hyperplanes de* E*.*