Formes quadratiques. Espaces euclidiens et hermitiens

Andrei Teleman

Aix-Marseille Université

8 décembre 2021

Table des matières

1 Dualité

1.1 Le dual et le bidual d'un espace vectoriel

Définition 1.1.1 *Soit E un K-espace vectoriel. Une forme linéaire sur E est une application linéaire $f : E \to K$. L'ensemble des formes linéaires sur E a une structure naturelle de K-espace vectoriel. Cet espace vectoriel sera noté $L(E, K)$ ou E^*.*

Supposons que E est de dimension finie n et soit $B = (v_1, \dots, v_n)$ une base de E. Pour $x \in E$, soit $x = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ sa décomposition par rapport à B. Pour une forme linéaire $f : E \to K$ on a

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(v_i) = \sum_{i=1}^n a_i x_i,$$

où $a_i \coloneqq f(v_i)$. Réciproquement, toute application $f : E \to K$ donnée par une telle formule est une forme linaire sur E.

Remarque 1.1.2 *Le noyau $\ker(f)$ d'une forme linéaire $f : E \to K$ est soit un hyperplan de E (si $f \neq 0$), soit coïncide avec E (si $f = 0$).*

Soit $B = (v_1, \dots, v_n)$ une base de E. Pour $1 \leqslant j \leqslant n$ considérons la forme linéaire $v_j^* \in E^*$ définie par

$$v_j^*(\sum_{i=1}^n x_i v_i) = x_j.$$

Remarquer que

$$v_j^*(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases},$$

donc v_j^* est l'extension par K-linéarité de l'application $B \to K$ définie par le membre droit de la formule ci-dessus.

Proposition 1.1.3 *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n et $B = (v_1, \dots, v_n)$ une base de E. Alors $B^* \coloneqq (v_1^*, \dots, v_n^*)$ est une base de E^*. En particulier, si E est de dimension finie, alors E^* sera aussi de dimension finie et $\dim(E^*) = \dim(E)$.*

Démonstration: Pour démontrer que B^* est libre, soit $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ t.q.

$$\sum_{j=1}^{n} x_j v_j^* = 0.$$

Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. En appliquant les deux membres à v_i on obtient $x_i = 0$. Donc $x_i = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

Pour démontrer que B est une famille génératrice, soit $f \in E^*$. Pour tout $x = \sum_{i=1}^n x_i v_i \in E$ nous avons

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} f(v_j) x_j = \sum_{j=1}^{n} f(v_j) v_j^*(x),$$

donc $f = \sum_{j=1}^n a_j v_j^*$, où $a_j \coloneqq f(v_j)$. ∎

Définition 1.1.4 *La base $B^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$ de E^* définie ci-dessus s'appelle la base duale de la base B de E.*

Le dual E^{**} de E^* s'appelle *le bidual de E*. Nous avons une application linéaire *canonique* (i.e. naturelle, définie de la même manière pour les espaces vectoriels)

$$c_E : E \to E^{**},\ c_E(x)(f) \coloneqq f(x).$$

Remarque 1.1.5 *Soit E un K-espace vectoriel.*

1. *L'application linéaire $c_E : E \to E^{**}$ est injective.*
2. *Si E est de dimension finie, alors c_E est un isomorphisme, donc le bidual E^{**} est canoniquement isomorphe à E.*

Démonstration: 1. On va montrer qu'aucun vecteur non-nul de E n'appartient à $\ker(c_E)$. Soit $y \in E \backslash \{0_E\}$ et soit F un sous-espace supplémentaire de la droite vectorielle Ky dans E[1]. La projection $p : E \to Ky$ par rapport à la décomposition en somme directe $E = Ky \oplus F$ s'écrit $p(x) = f(x)y$, où $f : E \to K$ est une forme linéaire sur E ayant évidemment la propriété $f(y) = 1$. Donc $y \notin \ker(c_E)$.

2. Si E est de dimension finie n, alors, d'après la proposition 1.1.3, $\dim(E^*) = n$ et $\dim(E^{**}) = n$; $c_E : E \to E^{**}$ est donc une application linéaire injective entre espaces vectoriels de même dimension, donc est un isomorphisme. ∎

Remarque 1.1.6 *En choisissant une base $B = (v_1, \dots, v_n)$ de E, on obtient un isomorphisme $E \xrightarrow{\phi_B} E^*$ tel que $\phi_B(v_i) = v_i^*$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Si E est non-trivial, cet isomorphisme dépend de B ; E et E^* ne sont pas canoniquement isomorphes.*

Définition 1.1.7 *Soit $\phi : E \to F$ une application linéaire entre K-espaces vectoriels. L'application transposée ${}^t\phi : F^* \to E^*$ de ϕ est définie par ${}^t\phi(f) \coloneqq f \circ \phi$.*

Exercice : Supposons que E, F sont de dimensions finie et soient B, C bases de E et F respectivement. Démontrer que pour toute application linéaire $\phi : E \to F$ on a

$$M_{C^* B^*}({}^t\phi) = {}^tM_{BC}(\phi).$$

Donc l'opération de transposition pour les applications linéaires correspond à l'opération de transposition pour les matrices.

1. Pour tout espace vectoriel E et tout sous-espace vectoriel $F \subset E$ il existe un supplémentaire de F dans E. La démonstration s'appuie sur le théorème de la base incomplète ; si E est de dimension infinie, la démonstration de ce théorème est plus difficile.

1.2 Sous-espaces annulateurs

Soient E un K-espace vectoriel et E^* son dual

Définition 1.2.1 *1. Soit $S \subset E$ un sous-ensemble. L'annulateur de S dans E^* est le sous-espace vectoriel de E^* défini par*

$$\mathrm{Ann}_{E^*}(S) \coloneqq \{f \in E^* \mid \forall x \in S,\ f(x) = 0\}.$$

2. Soit $T \subset E^*$ un sous-ensemble. L'annulateur de T dans E est le sous-espace vectoriel de E défini par

$$\mathrm{Ann}_{E}(T) \coloneqq \{x \in E \mid \forall f \in T,\ f(x) = 0\}.$$

Donc $\mathrm{Ann}_{E^*}(S)$ est le sous-espace des formes linéaires qui s'annulent sur S et $\mathrm{Ann}_E(T)$ est l'espace des vecteurs de E sur lesquels s'annulent toutes les formes de T, c'est à dire

$$\mathrm{Ann}_E(T) = \bigcap_{f \in T} \ker(f).$$

Notations utilisées dans la littérature mathématique : $S^0 \coloneqq \mathrm{Ann}_{E^*}(S)$, ${}^0T \coloneqq \mathrm{Ann}_E(T)$.

Exemple : Soit $T = \{f_1, \ldots, f_k\} \subset E^*$. Alors $\mathrm{Ann}_E(T)$ est l'ensemble des solutions du système linéaire homogène

$$\left\{\begin{array}{ccc} f_1(x) & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_k(x) & = & 0 \end{array}\right. .$$

Proposition 1.2.2 *Soient E un K-espace vectoriel, $S \subset E$, $T \subset E^*$. Alors*

1. *$\mathrm{Ann}_{E^*}(S)$, $\mathrm{Ann}_E(T)$ sont bien des sous-espaces vectoriels de E^* et E respectivement.*
2. *$\mathrm{Ann}_{E^*}(S) = \mathrm{Ann}_{E^*}(\mathrm{Vect}(S))$, $\mathrm{Ann}_E(T) = \mathrm{Ann}_E(\mathrm{Vect}(T))$.*
3. *Si $S \subset S' \subset E$, $T \subset T' \subset E^*$, alors $\mathrm{Ann}_{E^*}(S) \supset \mathrm{Ann}_{E^*}(S')$, $\mathrm{Ann}_E(T) \supset \mathrm{Ann}_E(T')$.*
4. *On a $T \subset \mathrm{Ann}_{E^*}(S)$ si et seulement si $S \subset \mathrm{Ann}_E(T)$.*

Démonstration: Exercice. ■

Proposition 1.2.3 *Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie n et F un sous-espace vectoriel de E. Alors*

1. *$\dim(\mathrm{Ann}_{E^*}(F)) = n - \dim(F)$.*
2. *$\mathrm{Ann}_E(\mathrm{Ann}_{E^*}(F)) = F$.*

Les propriétés similaires sont vraies pour un sous-espace vectoriel $G \subset E^*$.

Démonstration: 1. Posons $k \coloneqq \dim(F)$. Soit $B = (v_1, \ldots, v_n)$ une base de E telle que $(v_1, \ldots, v_k)$ soit une base de F. Nous avons $\mathrm{Ann}_{E^*}(F) = \mathrm{Ann}_{E^*}(\{v_1, \ldots, v_k\})$. Pourquoi ?

Une forme linéaire $f = \sum_{j=1}^n a_j v_j^*$ appartient donc à $\mathrm{Ann}_{E^*}(F)$ si et seulement si $f(v_i) = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant k$, i.e. si et seulement si $a_j = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant k$.
On a donc $\mathrm{Ann}_{E^*}(F) = \mathrm{Vect}(v_{k+1}^*, \ldots, v_n^*)$, donc $\dim(\mathrm{Ann}_{E^*}(F)) = n - k$.

2. Remarquer d'abord que l'inclusion $F \subset \mathrm{Ann}_E(\mathrm{Ann}_{E^*}(F))$ est vraie en toute généralité (pour un espace vectoriel E arbitraire, pas nécessairement de dimension finie). Pourquoi ?

Si E est de dimension finie n, alors, d'après (1), on aura

$$\dim\big(\mathrm{Ann}_E(\mathrm{Ann}_{E^*}(F))\big) = n - (n-k) = k.$$

F est un sous-espace vectoriel k-dimensionnel de l'espace vectoriel k-dimensionnel $\mathrm{Ann}_E(\mathrm{Ann}_{E^*}(F))$, donc il coïncide avec cet espace. ■

2 Formes bilinéaires. Formes quadratiques

2.1 Applications multilinéaires

Soient $E_1,\dots,E_k$, F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

Définition 2.1.1 *Une application $f : E_1 \times \cdots \times E_k \to F$ est dite k-linéaire si elle est linéaire par rapport à chaque argument, c'est à dire si pour $1 \leqslant i \leqslant k$, v'_i, $v''_i \in E_i$ et α', $\alpha'' \in \mathbb{K}$ on a*

$$f(v_1,\dots,\alpha' v'_i + \alpha'' v''_i,\dots,v_k) = \alpha' f(v_1,\dots,v'_i,\dots,v_k) + \alpha'' f(v_1,\dots,v''_i,\dots,v_k)\ .$$

Dans ce cours on va étudier en détail le cas $k = 2$, dans lequel la définition ci-dessus devient :

Définition 2.1.2 *Une application $f : E_1 \times E_2 \to F$ est dite bilinéaire si pour tous v_1, v'_1, $v''_1 \in E_1$, v_2, v'_2, $v''_2 \in E_2$, α', $\alpha'' \in \mathbb{K}$ on a*

$$f(\alpha' v'_1 + \alpha'' v''_1, v_2) = \alpha' f(v'_1, v_2) + \alpha'' f(v''_1, v_2) \text{ et } f(v_1, \alpha' v'_2 + \alpha'' v''_2) = \alpha' f(v_1, v'_2) + \alpha'' f(v_1, v''_2)\ .$$

On va utiliser la notation $L^k(E_1,\dots,E_k;F) := \{f : E_1 \times \cdots \times E_k \to F|\ f \text{ est } k\text{-linéaire}\}$. Cet ensemble a une structure naturelle de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Pour $k = 1$ et deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E, F, on obtient l'espace $L(E,F)$ des applications linéaires $f : E \to F$. Nous savons que, en choisissants des bases dans les deux espaces, cet espace s'identifie à l'espace des matrices $M_{n,m}(\mathbb{K})$, où $\dim(E) = m$, $\dim(F) = n$.

Dans le cas $E_1 = \cdots = E_k = E$ on va utiliser la notation simplifiée $L^k(E,F)$ au lieu de $L^k(\underbrace{E,\dots,E}_{k \text{ fois}};F)$.

Définition 2.1.3 *Une application k-linéaire $f \in L^k(E,F)$ est dite*

1. *symétrique, si elle est invariante par rapport aux permutations de deux arguments, c'est à dire si pour $1 \leqslant i < j \leqslant k$ et vecteurs $v_s \in E$ $(1 \leqslant s \leqslant k)$ on a*

$$f(v_1,\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ i\text{me}}}{v_i},\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ j\text{me}}}{v_j},\dots,v_k) = f(v_1,\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ i\text{me}}}{v_j},\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ j\text{me}}}{v_i},\dots,v_k).$$

2. *alternée, si elle est anti-invariante (change de signe) par rapport à la permutation de deux arguments, c'est à dire si pour $1 \leqslant i < j \leqslant k$ et vecteurs $v_s \in E$ $(1 \leqslant s \leqslant k)$ on a*

$$f(v_1,\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ i\text{me}}}{v_i},\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ j\text{me}}}{v_j},\dots,v_k) = -f(v_1,\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ i\text{me}}}{v_j},\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ j\text{me}}}{v_i},\dots,v_k).$$

Pour $k = 2$ on utilise aussi la terminologie "anti-symétrique", au lieu de "alternée".

On va désigner par $L^k_{\mathrm{sym}}(E,F)$, respectivement $L^k_{\mathrm{alt}}(E,F)$ les espaces des applications k-linéaires symétriques (respectivement alternées) définies sur $\underbrace{E \times \cdots \times E}_{k \text{ fois}}$ à valeurs dans F.

Notons pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ on a

$$f(v_{\sigma_1},\dots,v_{\sigma_k}) = \begin{cases} f(v_1,\dots,v_k) & \text{si} \quad f \text{ est symétrique,} \\ \mathrm{sign}(\sigma) f(v_1,\dots,v_k) & \text{si} \quad f \text{ est alternée.} \end{cases}$$

Pour $k = 2$, les deux conditions deviennent très simples : Une application bilinéaire $f \in L^2(E,F)$ est

1. symétrique si pour tous v_1, $v_2 \in E$ on a $f(v_2,v_1) = f(v_1,v_2)$,
2. alternée (anti-symétrique) si pour tous v_1, $v_2 \in E$ on a $f(v_2,v_1) = -f(v_1,v_2)$.

Exemples :

1. Le produit scalaire standard $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sur $\mathbb{R}^n$ est une application bilinéaire symétrique $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: $\langle u,v\rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i$.

2. Le produit vectoriel $\wedge$ est l'application $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$u \wedge v := \begin{vmatrix} e_1 & u_1 & v_1 \\ e_2 & u_2 & v_2 \\ e_3 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} e_3\ ,$$

où (e_1, e_2, e_3) désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Cette application est bilinéaire alternée (anti-symétrique). Justifier cette affirmation.

3. L'application déterminant dét : $M_{n,n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ peut être regardée comme une application $\underbrace{\mathbb{K}^n \times \cdots \times \mathbb{K}^n}_{n \text{ fois}} \to \mathbb{K}$, parce qu'une matrice carrée d'ordre n est déterminée par ses colonnes, donc par un système de n vecteurs de $\mathbb{K}^n$. En utilisant cette interprétation, dét devient une application n-linéaire alternée. Justifier cette affirmation en utilisant les propriétés du déterminant.

Notons que $L^k_{\text{sym}}(E, F)$, $L^k_{\text{alt}}(E, F)$ sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel $L^k(E, F)$. Pour $k = 2$ ces sous-espaces donnent une décomposition en somme directe :

Proposition 2.1.4 *Les sous-espaces $L^2_{\text{sym}}(E, F)$, $L^2_{\text{alt}}(E, F)$ donnent une décomposition en somme directe de $L^2(E, F)$.*

Démonstration: (i) On montre que $L^2_{\text{sym}}(E, F)$, $L^2_{\text{alt}}(E, F)$ sont en somme directe : En effet, si $f \in L^2(E, F)$ est à la fois symétrique et anti-symétrique, alors on a pour tous vecteurs u, $v \in E$

$$f(u, v) = f(v, u) = -f(u, v) \ ,$$

donc $2f(u, v) = 0$, c'est à dire $f(u, v) = 0$.

(ii) On montre que $L^2_{\text{sym}}(E, F) + L^2_{\text{alt}}(E, F) = L^2(E, F)$: En effet, soit $f \in L^2(E, F)$. Nous définissons $f_s : E \times E \to F$, $f_a : E \times E \to F$ par

$$f_s(u, v) := \frac{1}{2}(f(u, v) + f(v, u)) \ , \ f_a(u, v) := \frac{1}{2}(f(u, v) - f(v, u)) \ .$$

C'est facile de voir que $f_s \in L^2_{\text{sym}}(E, F)$ et $f_a \in L^2_{\text{alt}}(E, F)$. D'autre part on a évidemment $f = f_s + f_a$. Donc tout élément f de $L^2(E, F)$ s'écrit comme la somme d'un élément de $L^2_{\text{sym}}(E, F)$ et d'un élément de $L^2_{\text{alt}}(E, F)$, c'est à dire $L^2_{\text{sym}}(E, F) + L^2_{\text{alt}}(E, F) = L^2(E, F)$. ■

2.2 Formes bilinéaires

Dans la suite on va se concentrer au cas où l'espace d'arrivé est $\mathbb{K}$, donc on va étudier l'espace $L^2(E \times F; \mathbb{K})$ des application bilinéaires $\varphi : E \times F \to \mathbb{K}$. Une telle application s'appelle *forme bilinéaire* sur $E \times F$. Si $E = F$ on dit brièvement forme bilinéaire sur E (au lieu de "sur $E \times E$"), mais on sous-entend toujours une application bilinéaire définie sur $E \times E$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Remarque 2.2.1 *Soit $\varphi : E \times F \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire. L'application $\tilde{\varphi} : E \to F^*$ donnée par*

$$\tilde{\varphi}(v)(w) \coloneqq \varphi(v, w)$$

est linéaire.

Réciproquement, pour toute application linéaire $f : E \to F^*$ l'application $\underset{\sim}{f} : E \times F \to \mathbb{K}$ définie par $\underset{\sim}{f}(v, w) \coloneqq f(v)(w)$ est bilinéaire.

Les applications $L^2(E, F; \mathbb{K}) \to L(E, F^*)$, $L(E, F^*) \to L^2(E, F; \mathbb{K})$ données par $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$, $f \mapsto \underset{\sim}{f}$ sont des isomorphismes mutuellement réciproques d'espaces vectoriels.

Donc la donnée d'une forme bilinéaire : $E \times F \to \mathbb{K}$ est équivalente à la donnée d'une application linéaire $E \to F^*$.

Définition 2.2.2 *Soit $\varphi : E \times F \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire, $B = (e_1, \ldots, e_m)$ une base de E et $C = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de F. Les coefficients de φ par rapport aux bases B, C sont définis par $\varphi_{ij} \coloneqq \varphi(e_i, f_j)$.*

La matrice de la forme bilinéaire φ par rapport aux bases B, C est la matrice formée avec ces coefficients, donc la matrice $M_{BC}(\varphi) \coloneqq (\varphi(e_i, f_j))_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m, \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$. Si $E = F$ et $B = C$, on va écrire $M_B(\varphi)$ au lieu de $M_{BB}(\varphi)$.

Si on connait la matrice de la forme φ dans la une B, on peut reconstituer la forme. En effet, soient $u = \sum_{i=1}^m u_i e_i \in E$, $v = \sum_{j=1}^n v_j f_j \in F$ décomposés par rapport aux bases B, C. En utilisant la propriété de bilinéarité on obtient

$$\varphi(u,v) = \varphi(\sum_{i=1}^m u_i e_i, \sum_{j=1}^n v_j f_j) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n u_i v_j \varphi(e_i, f_j) = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \varphi_{ij} u_i v_j. \tag{1}$$

Donc les scalaires φ_{ij} apparaissent comme coefficients dans l'expression de $\varphi(u,v)$ obtenue en décomposant u, v en coordonnées (obtenue en décomposant u, v dans les bases choisies). En regardant la somme $\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \varphi_{ij} u_i v_j$ comme une matrice avec une ligne et une colonne, on peut l'écrire sous la forme

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \varphi_{ij} u_i v_j = (u_1 \ \dots \ u_m)\, \Phi \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{u}\Phi\ \mathrm{v},$$

où $\Phi \coloneqq M_{BC}(\varphi)$ et $\mathrm{u} \in \mathbb{K}^m$, $\mathrm{v} \in \mathbb{K}^n$ sont les vecteurs de $\mathbb{K}^m$, $\mathbb{K}^n$ formés avec les coordonnées de u et v respectivement.

Réciproquement, pour toute matrice

$$\Phi = (\varphi_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in M_{n,n}(\mathbb{K})$$

la formule (1) définit une forme bilinéaire sur $E \times F$.

Remarque 2.2.3 *Nous avons $M_{BC}(\varphi) = {}^{\mathrm{t}}M_{BC^*}(\tilde\varphi)$, donc la matrice d'une forme bilinéaire $\varphi : E \times F \to \mathbb{K}$ par rapport aux bases B, C coïncide avec la transposée de la matrice de l'application linéaire associée $\tilde\varphi$ par rapport aux bases B, C^*, où C^* est la base duale de C.*

Démonstration: Posons $\tilde\Phi = M_{BC^*}(\tilde\varphi)$. Alors

$$\tilde\varphi(e_j) = \sum_{s=1}^n \tilde\varphi_{sj} f_s^*,$$

donc $\varphi_{ji} = \varphi(e_j, f_i) = \tilde\varphi(e_j)(f_i) = \sum_{s=1}^n \tilde\varphi_{sj} f_s^*(f_i) = \sum_{s=1}^n \tilde\varphi_{sj}\delta_{si} = \tilde\varphi_{ij}$. ■

Si on passe du couple de bases (B, C) au couple $(B' = BP, C' = CQ)$, où $P \in \mathrm{GL}(m,\mathbb{K})$, $Q \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ sont les matrices de passage, alors les coefficients de φ par rapport aux nouvelles bases seront

$$\varphi'_{ij} = \varphi(e'_i, f'_j) = \varphi(\sum_{s=1}^m p_{si} e_s, \sum_{t=1}^n q_{tj} f_t) = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}} p_{si}\varphi_{st} q_{tj} = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}} {}^{\mathrm{t}}p_{is}\varphi_{st} q_{tj}$$

et donc la matrice Φ' associée à φ dans les nouvelles base sera $\Phi' = P^T \Phi Q$. Donc

Remarque 2.2.4 *Soient B, C bases de E, F respectivement. Alors l'application $\varphi \mapsto M_{BC}(\varphi)$ est un isomorphisme d'espace vectoriels $L^2(E, F; \mathbb{K}) \to M_{m,n}(\mathbb{K})$. La formule de changement de bases est $M_{B'C'}(\varphi) = P^T M_{BC}(\varphi) Q$, où $B' = BP$, $C' = CQ$.*

Remarque 2.2.5 *Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base fixée de E. La donnée d'une forme bilinéaire $\varphi \in L^2(E, \mathbb{K})$, comme la donnée d'un endomorphisme $\phi \in \mathrm{End}(E)$, est équivalente à la donnée d'une matrice carrée d'ordre n à éléments dans $\mathbb{K}$, mais les lois de transformation pour un changement de base sont différentes :*

$$M_{B'}(\varphi) = {}^{\mathrm{t}}P M_B(\varphi) P,\ \ M_{B'}(\phi) = P^{-1} M_B(\phi) P.$$

Dans les exemples concrets on a d'habitude $E = F = \mathbb{K}^n$ et une forme bilinéaire $\varphi : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ sera donnée par une formule du type

$$\varphi(x,y) = \sum_{i,j=1}^n \varphi_{ij} x_i y_j$$

dans la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{K}^n$.

Exemples : 1. Le produit scalaire canonique $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^n$ est donné par $\varphi(x,y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, donc les coefficients de cette forme bilinéaire sont $\varphi_{ij} = \delta_{ij}$ $(1 \leqslant i,j \leqslant n)$, donc la matrice de φ dans la base canonique coïncide avec la matrice unité I_n.

2. Considérons la forme bilinéaire $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x,y) = 2x_1y_1 + 5x_1y_2 - 6x_1y_3 + 4x_2y_1 + 5x_2y_2 - 7x_2y_3 - 3x_3y_1 + 3x_3y_2 - x_3y_3.$$

La matrice des coefficients de cette forme dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) est

$$\Phi = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 4 & 5 & -7 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pour calculer la matrice Ψ de φ dans une autre base, par exemple $B = (f_1, f_2, f_3) := (e_1 + e_2, e_1 - e_2, e_3)$, on a deux méthodes :

(i) on utilise la définition de la matrice des coefficients, par exemple le coefficient ψ_{11} sera

$$\psi_{11} = \varphi(f_1, f_1) = \varphi(e_1 + e_2, e_1 + e_2) = \varphi(e_1, e_1) + \varphi(e_1, e_2) + \varphi(e_2, e_1) + \varphi(e_2, e_2) = \varphi_{11} + \varphi_{12} + \varphi_{21} + \varphi_{22} = 16,$$

(ii) on détermine la matrice de passage P de la base canonique à la base B et on utilise la formule $\Psi = P^T \Phi P$.

Remarque 2.2.6 *Soit B une base de E. Une forme bilinéaire $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ est symétrique (respectivement anti-symétrique) si et seulement si sa matrice $M_B(\varphi)$ est symétrique (respectivement anti-symétrique).*

Démonstration: Exercice. ■

Définition 2.2.7 *Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire symétrique. Le noyau de φ est le sous-espace vectoriel de E défini par*

$$N(\varphi) \coloneqq \ker(\tilde{\varphi}) = \{u \in E |\ \forall v \in E \text{ on a } \varphi(u,v) = 0\}.$$

Le rang de φ est défini par

$$\mathrm{rang}(\varphi) \coloneqq \mathrm{rang}(\tilde{\varphi}) = \dim(E) - \dim(N(\varphi)).$$

Comment on détermine explicitement le noyau et le rang d'une forme bilinéaire symétrique ? La remarque 2.2.3 et la définition 2.2.7 montrent que

Remarque 2.2.8 *Dans une base fixée $B = (f_1, \ldots, f_n)$ de E, le noyau $N(\varphi)$ s'identifie à l'espace des solutions du système linéaire homogène associé à la matrice $\Phi = M_B(\varphi)$ de φ dans la base B. En plus, le rang* $\mathrm{rang}(\varphi)$ *coïncide avec* $\mathrm{rang}(\Phi)$.

Donc, comme pour les applications linéaires, le calcul du noyau d'une forme bilinéaire symétrique se réduit à la résolution d'un système linéaire homogène.

Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire symétrique. On utilise souvent la notation $\langle u, v \rangle_\varphi$ au lieu de $\varphi(u,v)$, mais il ne faut pas croire qu'il s'agit nécessairement d'un produit scalaire.

Deux vecteurs $u, v \in E$ sont dits φ-orthogonaux (orthogonaux par rapport à φ), et on écrit $u \perp_\varphi v$ si $\varphi(u,v) = 0$. Le sous-espace φ-orthogonal d'un vecteur $v \in E$ est défini par

$$v^{\perp_\varphi} := \{u \in E |\ \varphi(u,v) = 0\}.$$

Le sous-espace φ-orthogonal d'un sous-ensemble $S \subset E$ est défini par

$$S^{\perp_\varphi} := \{u \in E |\ \forall w \in S\ \varphi(u,w) = 0\} = \bigcap_{v \in S} v^{\perp_\varphi}.$$

Remarque 2.2.9 *Soit $S \subset E$ un sous-ensemble. Alors $S^{\perp_\varphi} = (\mathrm{Vect}(S))^{\perp_\varphi}$. En particulier, si $(w_1, \ldots, w_k)$ est un système de générateurs d'un sous-espace vectoriel $F \subset E$, on a*

$$F^{\perp_\varphi} = \{w_1, \ldots, w_k\}^{\perp_\varphi} = \bigcap_{i=1}^k w_i^{\perp_\varphi}.$$

Soit $B = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de E ; le sous-espace $v^{\perp_\varphi}$ s'identifie à l'espace des solutions de l'équation linéaire

$$^{\mathrm{t}}\mathrm{v}\,\Phi\,\mathrm{u} = 0, \tag{2}$$

où $\mathrm{v} \in \mathbb{K}^n$ est le système des coordonnées de v par rapport à B. Pour un sous-espace $F = \mathrm{Vect}(w_1, \ldots, w_k)$, le sous-espace orthogonal $F^{\perp_\varphi} = \{w_1, \ldots, w_k\}^{\perp_\varphi}$ s'identifie à l'espace des solutions du système linéaire homogène

$$^{\mathrm{t}}\mathrm{w}_i\,\Phi\,\mathrm{u} = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant k.$$

Notons aussi que

$$N(\varphi) = E^{\perp_\varphi}, \tag{3}$$

donc le noyau de φ coïncide avec le sous-espace φ-orthogonal a tout l'espace vectoriel E.

Définition 2.2.10 *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Une forme bilinéaire symétrique $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ s'appelle*

1. *positive, si pour tout $v \in E$ on a $\varphi(v, v) \geqslant 0$.*
2. *négative, si pour tout $v \in E$ on a $\varphi(v, v) \leqslant 0$.*
3. *définie, si pour tout $v \in E$ la relation $\varphi(v, v) = 0$ implique $v = 0_E$.*
4. *définie positive, si elle est positive et définie, c'est à dire si pour tout $v \in E\backslash\{0\}$ on a $\varphi(v, v) > 0$.*
5. *définie négative, si elle est négative et définie, c'est à dire si pour tout $v \in E\backslash\{0\}$ on a $\varphi(v, v) < 0$.*

La notion de forme bilinéaire symétrique définie positive est très importante : on va voir qu'une telle forme s'appelle produit scalaire sur E. Pour décider si une forme bilinéaire symétrique est définie positive, nous avons un critère très simple.

Proposition 2.2.11 *(le critère de positivité de Sylvester) Soit $\varphi \in L^2_{\mathrm{sym}}(E, \mathbb{R})$ une forme bilinéaire symétrique sur $E \times E$, $B = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de E et $\Phi \coloneqq M_B(\varphi)$ la matrice de φ dans cette base. Alors φ est définie positive si et seulement si les n déterminants $\Delta_k = \mathrm{dét}((\varphi_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant k})$ sont tous strictement positifs.*

Les déterminants $\Delta_k = \mathrm{dét}((\varphi_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant k})$ s'appellent *les mineurs principaux dominants* de la matrice Φ. Donc une forme $\varphi \in L^2_{\mathrm{sym}}(E, \mathbb{R})$ est définie positive si et seulement si les n mineurs principaux dominants de la matrice de φ sont strictement positifs.

Exemple : La matrice de la forme bilinéaire symétrique $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x, y) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 - 3x_1y_3 + 5x_2y_2 - 7x_2y_3 - 3x_3y_1 - 7x_3y_2 - x_3y_3$$

dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) est

$$\Phi = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -7 \\ -3 & -7 & -1 \end{pmatrix},$$

et les déterminants Δ_k qui nous intéressent sont :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 \end{vmatrix} = 2 > 0\ ,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 9 > 0\ ,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -7 \\ -3 & -7 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -9 & 11 \\ 1 & 5 & -7 \\ 0 & 8 & -22 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -9 & 11 \\ 8 & -22 \end{vmatrix} = -110 < 0\ ,$$

donc φ n'est pas définie positive, parce que $\Delta_3 < 0$.

2.3 Formes quadratiques

Définition 2.3.1 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Une forme quadratique sur E est une application $q : E \to \mathbb{K}$ telle qu'il existe une forme bilinéaire $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ telle que pour tout $v \in E$ on a $q(v) = \varphi(v, v)$. Dans ce cas on va dire que $q : E \to \mathbb{K}$ est la forme quadratique associée à la forme bilinéaire $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ et on va la noter q_φ.*

Remarquer donc qu'une forme quadratique est une application d'une seule variable vectorielle, tandis qu'une forme bilinéaire est une fonction de deux variables vectorielles. Le sous-espace $\{(v, v) |\ v \in E\} \subset E \times E\}$ s'identifie à E et s'appelle la *la diagonale* du produit cartésien $E \times E$. On peut donc dire qu'une forme quadratique est donnée par *la restriction à la diagonale d'une forme bilinéaire.*

En coordonnées : si dans une base $B = (f_1, \dots, f_n)$ de E la forme bilinéaire φ est donnée par

$$\varphi(\sum_{i=1}^{n} u_i f_i, \sum_{j=1}^{n} v_j f_j) = \sum_{i,j=1}^{n} \varphi_{ij} u_i v_j$$

alors la forme quadratique q_φ associée à φ sera donnée par

$$q_\varphi(\sum_{i=1}^{n} u_i f_i) = \sum_{i,j=1}^{n} \varphi_{ij} u_i u_j = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{ii} u_i^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\varphi_{ij} + \varphi_{ji}) u_i u_j \ , \tag{4}$$

donc par *un polynôme homogène du 2me degré* en $(u_1, \dots, u_n)$. Réciproquement, en présence d'une base $B = (f_1, \dots, f_n)$ de E, toute application $q : E \to \mathbb{K}$ qui est donnée par une fonction polynomiale homogène du 2me degré des coordonnées $(u_1, \dots, u_n)$ associée à cette base, est une forme quadratique. La forme générale en coordonnées d'une forme quadratique est donc

$$q(\sum u_i f_i) = \sum_{i \leqslant j} a_{ij} u_i u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} u_i^2 + \sum_{i<j} a_{ij} u_i u_j.$$

Exemple : Considérons de nouveau la forme bilinéaire symétrique $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ donnée par

$$\varphi(x,y) = 2x_1y_1 + 5x_1y_2 - 6x_1y_3 + 4x_2y_1 + 5x_2y_2 - 7x_2y_3 - 3x_3y_1 + 3x_3y_2 - x_3y_3 \ .$$

La forme quadratique associée sera

$$q_\varphi(x) = 2x_1^2 + 5x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_1 + 5x_2^2 - 7x_2x_3 - 3x_3x_1 + 3x_3x_2 - x_3^2 = 2x_1^2 + 9x_1x_2 - 9x_1x_3 + 5x_2^2 - 4x_2x_3 - x_3^2.$$

Remarquer que q_φ est bien donnée par un polynôme homogène du 2me degré de $(x_1, \dots x_n)$.

2.3.1 La polaire d'une forme quadratique

Soit $Q(E)$ l'espace des formes quadratiques sur E, muni de sa structure naturelle de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Nous avons donc défini une application linéaire surjective (donc un épimorphisme)

$$Q : L^2(E, \mathbb{K}) \to Q(E)$$

donnée par $Q(\varphi) := q_\varphi$. Cette application n'est pas injective.

Exercice : En utilisant la formule (4) montrer que $\ker(Q) = L^2_{\mathrm{alt}}(E, \mathbb{K})$.

Par contre, la restriction $Q\big|_{L^2_{\mathrm{sym}}(E,\mathbb{K})} : L^2_{\mathrm{sym}}(E, \mathbb{K}) \to Q(E)$ est à la fois injective et surjective, donc est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Plus précisément :

Proposition 2.3.2 *Pour toute forme quadratique $q : E \to \mathbb{K}$ sur E il existe une unique forme bilinéaire symétrique $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ dont la forme quadratique associée est q (i.e. telle que $q = q_\varphi$). Cette forme bilinéaire est donnée par la formule*

$$\varphi(u,v) = \frac{1}{2}(q(u+v) - q(u) - q(v)) \tag{5}$$

et s'appelle la forme polaire de q et sera notée φ_q.

L'isomorphisme réciproque $P : Q(E) \to L^2_{\mathrm{sym}}(E, \mathbb{K})$ de l'isomorphisme $Q\big|_{L^2_{\mathrm{sym}}(E,\mathbb{K})} : L^2_{\mathrm{sym}}(E, \mathbb{K}) \to Q(E)$ est donné donc par la formule $q \mapsto \varphi_q$ qui associe à une forme quadratique $q \in Q(E)$ sa forme polaire $\varphi_q \in L^2_{\mathrm{sym}}(E, \mathbb{K})$.

Démonstration: (de la Proposition)
Existence : Soit $q : E \to \mathbb{K}$ une forme quadratique sur E. Par définition, il existe une forme bilinéaire $\psi : E \times E \to \mathbb{K}$ t.q. $q = q_\psi$. Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ la forme bilinéaire définie par $\varphi(u,v) = \frac{1}{2}(\psi(u,v) + \psi(v,u))$. Il suffit de remarquer que $q_\varphi = q_\psi = q$ et que φ est symétrique.

Unicité : Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ bilinéaire symétrique t.q. $q = q_\varphi$. Pour tout $(u,v) \in E \times E$ on a

$$\frac{1}{2}(q(u+v) - q(u) - q(v)) = \frac{1}{2}\big(\varphi(u+v, u+v) - \varphi(u,u) - \varphi(v,v)\big) =$$

$$= \frac{1}{2}\big(\varphi(u,u) + \varphi(u,v) + \varphi(v,u) + \varphi(v,v) - \varphi(u,u) - \varphi(v,v)\big) = \varphi(u,v).$$

Cette égalité montre que l'unique forme bilinéaire symétrique φ t.q. $q_\varphi = q$ est donnée par la formule (5). ■

Pour le calcul de la polaire d'une forme quadratique nous avons deux méthodes :

1. En appliquant la formule donnée par la proposition 2.3.2 :

$$\varphi(u,v) = \frac{1}{2}(q(u+v) - q(u) - q(v)) \ ,$$

2. Par la méthode du dédoublement : Si $q : E \to \mathbb{K}$ est donnée dans une base $B = (f_1, \dots, f_n)$ par

$$q(\sum u_i f_i) = \sum_{i \leqslant j} a_{ij} u_i u_j = \sum_{i=1}^n a_{ii} u_i^2 + \sum_{i<j} a_{ij} u_i u_j,$$

alors on remplace formellement chaque carré u_i^2 par $u_i v_i$ et chaque produit $u_i u_j$ $(i \neq j)$ par $\frac{1}{2}(u_i v_j + u_j v_i)$. Ainsi on obtient une formule explicite pour $\varphi_q(u,v) = \varphi_q(\sum u_i f_i, \sum v_j f_j)$:

$$\varphi_q(u,v) = \sum_{i=1}^n a_{ii} u_i v_i + \frac{1}{2} \sum_{i<j} a_{ij}(u_i v_j + u_j v_i) \ .$$

Exemple : Considérons la forme quadratique $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ donnée par

$$q(x) = 2x_1^2 + 9x_1x_2 - 9x_1x_3 + 5x_2^2 - 4x_2x_3 - x_3^2.$$

En appliquant la première méthode on obtient :

$$\varphi_q(x,y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y)) = \frac{1}{2}\Big[2(x_1+y_1)^2 + 9(x_1+y_1)(x_2+y_2) - 9(x_1+y_1)(x_3+y_3) + 5(x_2+y_2)^2$$

$$-4(x_2+y_2)(x_3+y_3) - (x_3+y_3)^2 - (2x_1^2 + 9x_1x_2 - 9x_1x_3 + 5x_2^2 - 4x_2x_3 - x_3^2) - (2y_1^2 + 9y_1y_2 - 9y_1y_3 + 5y_2^2 - 4y_2y_3 - y_3^2)\Big].$$

En réduisant cette expression et en remarquant que tous les carrées se détruisent on obtient

$$\varphi_q(x,y) = 2x_1y_1 + \frac{9}{2}(x_1y_2 + x_2y_1) - \frac{9}{2}(x_1y_3 + x_3y_1) + 5x_2y_2 - 2(x_2y_3 + x_3y_2) - x_3y_3.$$

qui coïncide avec l'expression obtenue plus rapidement par la méthode du dédoublement.

2.3.2 Le cône isotrope d'une forme quadratique

Définition 2.3.3 *Le cône isotrope d'une forme quadratique $q : E \to \mathbb{K}$ est défini par*

$$C(q) := \{v \in E |\ q(v) = 0\} \ .$$

La terminologie "cône" utilisée ici ne correspond pas à la notion élémentaire de cône. On va voir que $C(q)$ peut se réduire au singleton $\{0_E\}$, à une réunion de deux droites, à une réunion de deux plans, etc. On utilise la notion de "cône" pour mettre en évidence la propriété générale suivante de $C(q)$: si $v \in C(q) \setminus \{0_E\}$, alors toute la droite $\mathbb{K}v$ est contenue en $C(q)$. Donc soit $C(q)$ se réduit à $\{0_E\}$, soit est une réunion de droites vectorielles.

Exemples :

1. (le cas $n = 2$) Soit $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $q(x) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$ une forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$. Supposons $c \neq 0$.

Puisque $c \neq 0$ on constate que le seul point $x \in C(q)$ avec $x_1 = 0$ est l'origine $0_{\mathbb{R}^2}$. On va déterminer donc les points $x = (x_1, x_2) \in C(q)$ avec $x_1 \neq 0$. En divisant l'equation $q(x) = 0$ par $x_1^2 \neq 0$ on obtient

$$a + b\frac{x_2}{x_1} + c\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 = 0 \ .$$

En posant $p := \frac{x_2}{x_1}$ (la pente de la droite vectorielle $\mathbb{R}x$) on obtient $a + bp + cp^2 = 0$, qui est une équation du 2me degré pour p, dont le discriminant Δ est $\Delta = b^2 - 4ac$.

a) $\Delta < 0$. Dans ce cas l'équation $a + bp + cp^2 = 0$ obtenue pour la pente $p = \frac{x_2}{x_1}$ n'admet pas de solution réelles, donc $C(q) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$.

b) $\Delta = 0$. Dans ce cas notre equation a une seule solution, disons p_0, et le cône isotrope $C(q)$ se réduit à la droite vectorielle d'équation $x_2 = p_0 x_1$ (soit, en utilisant la notation traditionnelle pour les coordonnées dans le plan, $y = p_0 x$).

c) $\Delta > 0$. Dans ce cas notre equation a deux solutions distinctes p_1, p_2 et le cône isotrope $C(q)$ se réduit à la réunion de deux droites vectorielles :

$$C(q) = d_1 \cup d_2,$$

où $d_i \subset \mathbb{R}^2$ est la droite vectorielle d'équation $x_2 = p_i x_1$, $i = 1, 2$.

2. Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ le forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2.$$

Pour décrire le cône isotrope $C(q)$ de cette forme quadratique, on étudie l'intersection de ce cône avec :

1. le plan "du tableau", à savoir le plan d'équation $x_1 = 0$ (donc le plan de coordonnées $x_2 O x_3$).
2. les plans "horizontaux", donc les plans d'équation $x_3 = c$, $c \in \mathbb{R}$.

Dans notre cas, l'intersection $C(q) \cap (x_2 O x_3)$ est donnée par l'équation $x_2^2 - x_3^2 = 0$, soit $(x_2 + x_3)(x_2 - x_3) = 0$, donc cette intersection coïncide avec la réunion $d_1 \cup d_2$ des deux droites

$$d_1 : \; x_3 = x_2, \; d_2 : \; x_3 = -x_2.$$

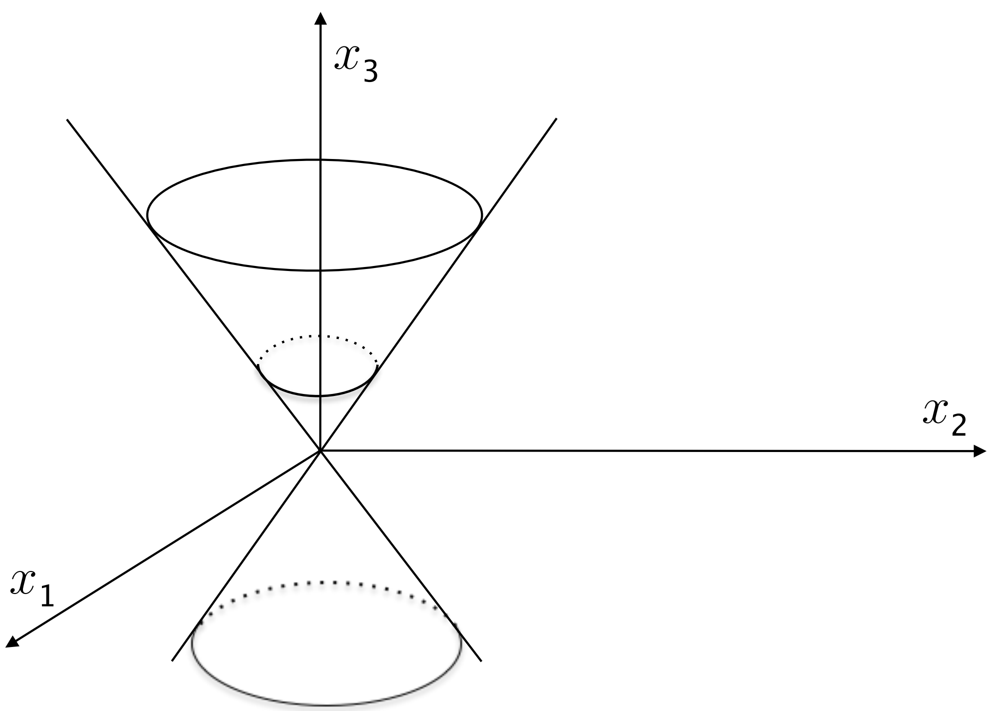

Figure 1 – Le cône isotrope de $q(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$

L'intersection de $C(q)$ avec le plan $x_3 = c$ (le plan horizontal d'altitude $x_3 = c$) est la courbe d'équation $x_1^2 + x_2^2 - c^2$ située dans de plan. La projection de cette courbe sur le plan $x_1 O x_2$ est le circle d'équation $x_1^2 + x_2^2 = c^2$, donc le circle de centre $0_{\mathbb{R}^2}$ et de rayon $|c|$ (attention, c peut être négatif !). On obtient donc un vrai cône avec deux nappes, dont le sommet est l'origine $0_{\mathbb{R}^3}$, dont l'axe de symétrie est la droite Ox_3, et dont la base est un circle.

Remarquer que le cône isotrope

1. de la forme quadratique $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, se réduit au singleton $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$,
2. de la forme quadratique $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $q(x) = x_1^2 + x_2^2$, se réduit à la droite vectorielle $\mathbb{R} e_3$,
3. de la forme quadratique $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $q(x) = x_1^2$, se réduit au plan d'équation $x_1 = 0$.

2.3.3 La loi d'inertie de Sylvester. La réduction de Gauss d'une forme quadratique

Le théorème important suivant concerne la classification des formes quadratiques.

Théorème 2.3.4 *(loi d'inertie de Sylvester, cas réel) Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n et $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique sur E. Alors*

1. *Il existe une base $B = (f_1, \ldots, f_n)$ de E par rapport à laquelle q s'écrit sous la forme :*

$$q\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i f_i\Big) = \sum_{i=1}^{s} x_i^2 - \sum_{j=s+1}^{s+t} x_j^2. \tag{6}$$

2. *Une telle base n'est pas unique, mais le couple $(s,t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dépend seulement de q, donc est indépendant de la base B.*

Donc le théorème de Sylvester affirme qu'il existe une base B de E dans laquelle q est réduite à une somme de carrés avec les coefficients ± 1.

Définition 2.3.5 *Le couple $(s,t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ s'appelle la signature de q, le nombre t de termes à coefficient négatif s'appelle l'indice de q et la somme $r := s + t$ s'appelle la rang de q.*

Remarque 2.3.6 *Le rang $r = s + t$ d'une forme quadratique $q : E \to \mathbb{R}$ coïncide avec le rang $\mathrm{rang}(\varphi_q)$ de la forme polaire $\varphi_q : E \times E \to \mathbb{R}$, donc avec le rang de la matrice de φ_q dans une base arbitraire de E.*

Réduire une forme quadratique $q : E \to \mathbb{R}$ signifie trouver sa forme réduite, en particulier spécifier sa signature et son rang. On demande parfois aussi de spécifier une base B dans laquelle q s'écrit sous forme réduite.

Notons que, pour réduire une forme quadratique, il suffit de la réduire au sens de Gauss (la *diagonaliser*) c'est à dire l'écrire (dans une base B convenable) sous la forme

$$q\Big(\sum x_i f_i\Big) = \sum_{i=1}^{r} a_{ii} x_i^2, \quad a_{ii} \neq 0. \tag{7}$$

En effet, en utilisant le changement de coordonnées

$$y_i := \begin{cases} \sqrt{|a_{ii}|}\; x_i & \text{si} \quad i \leqslant r \\ x_i & \text{si} \quad i > r \end{cases},$$

qui correspond au changement de base :

$$g_i := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|a_{ii}|}}\; f_i & \text{si} \quad i \leqslant r \\ f_i & \text{si} \quad i > r \end{cases},$$

on arrive à une expression de la forme (10) dans une nouvelle base $(g_1, \ldots, g_n)$. Ecrire une forme quadratique q sous la forme (7) s'appelle réduction de Gauss (ou diagonalisation) de q. En utilisant une telle réduction, la signature de q s'obtient facilement en comptant le nombre des coefficients a_{ii} positifs et le nombre des coefficients a_{ii} négatifs.

L'algorithme de Gauss fournit une méthode pour réduire une forme quadratique q à la forme diagonale (7). Nous expliquons cette méthode en détail :

Supposons que q est donnée dans une base $(f_1, \ldots, f_n)$ par

$$q\Big(\sum x_i f_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij} x_i x_j.$$

L'algorithme de réduction de Gauss consiste en l'application successive, dans un certain ordre, des deux opérations fondamentales :

I. Cette opération s'applique dès que dans l'expression de q il existe i tel que $a_{ii} \neq 0$, i.e. dès qu'il existe un carré à coefficient non-nul. Supposons pour simplicité que $a_{11} \neq 0$. Dans l'expression de q nous écrivons d'abord la somme de *tous* les termes contenant la variable x_1. En utilisant l'identité $x^2+2xy=(x+y)^2-y^2$ on obtient :

$$q(\sum x_i f_i) = a_{11}\Big(x_1^2 + 2x_1 \underbrace{\sum_{i=2}^{n} \frac{a_{1i}}{2a_{11}} x_i}_{L(x_2,\dots,x_n)}\Big) + \sum_{j=2}^{n} a_{jj}x_j^2 + \sum_{2\leqslant j<k\leqslant n} a_{jk}x_jx_k =$$

$$= a_{11}\Big(x_1 + L(x_2,\dots,x_n)\Big)^2 + \underbrace{\Big[-a_{11}L(x_2,\dots,x_n)^2 + \sum_{j=2}^{n} a_{jj}x_j^2 + \sum_{2\leqslant j<k\leqslant n} a_{jk}x_jx_k\Big]}_{Q(x_2,\dots,x_n)},$$

où L est une forme linéaire et Q est une forme quadratique des $n-1$ variables $x_2,\dots,x_n$. Les formules

$$\begin{cases} y_1 &= & x_1 + L(x_2,\dots,x_n) \\ y_j &= & x_j \text{ pour } 2\leqslant j\leqslant n\ , \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\\ \vdots\\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{2a_{11}} & \frac{a_{13}}{2a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}}{2a_{11}}\\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ \vdots\\ x_n \end{pmatrix}$$

définissent un nouveau système de coordonnées, qui correspond à une nouvelle base $(g_1,\dots,g_n)$ de E. Pour trouver explicitement cette base on utilise la formule de passage

$$(g_1,\dots,g_n) = (f_1,\dots,f_n)P,$$

où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{2a_{11}} & \frac{a_{13}}{2a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}}{2a_{11}}\\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}^{-1} .$$

Dans cette base q aura la forme

$$q(\sum y_i g_i) = a_{11}y_1^2 + Q(y_2,\dots,y_n)\ ,\ Q(y_2,\dots,y_n) = \sum_{j=2} b_{jj}y_j^2 + \sum_{2\leqslant j<k\leqslant n} b_{jk}y_jy_k$$

et le problème se réduit à la diagonalisation de la forme quadratique de $n-1$ variables définie par Q. On continue, en appliquant à cette forme l'une des opérations I, II.

II. Cette opération s'applique *seulement* si $q\neq 0$ et dans l'expression de q *tous* les coefficients a_{ii} sont nuls. Dans ce cas il existe dans l'expression de q un terme de la forme $a_{ij}x_ix_j$ où $i<j$ et $a_{ij}\neq 0$. Supposons pour simplicité que $i=1$, $j=2$. Dans l'expression de q on écrit *tous* les termes contenant x_1 et x_2 et on utilise les identités :

$$x_1x_2 + Ax_1 + Bx_2 = (x_1+B)(x_2+A) - AB,\ UV = \frac{1}{4}((U+V)^2 - (U-V)^2).$$

On obtient :

$$q(\sum x_i f_i) = a_{12}x_1x_2 + x_1\sum_{k\geqslant 3} a_{1k}x_k + x_2\sum_{k\geqslant 3} a_{2k}x_k + \sum_{3\leqslant k<l\leqslant n} a_{kl}x_kx_l =$$

$$a_{12}\big(x_1x_2 + x_1 \underbrace{\sum_{k\geqslant 3}\frac{a_{1k}}{a_{12}}x_k}_{L_1(x_3,\dots,x_n)} + x_2 \underbrace{\sum_{k\geqslant 3}\frac{a_{2k}}{a_{12}}x_k}_{L_2(x_3,\dots,x_n)}\ \big) + \sum_{3\leqslant k<l\leqslant n} a_{kl}x_kx_l =$$

$$a_{12}(x_1 + L_2(x_3,\dots,x_n))(x_2 + L_1(x_3,\dots,x_n)) + \underbrace{\Big[-a_{12}L_1(x_3,\dots,x_n)L_2(x_3,\dots,x_n) + \sum_{3\leqslant k<l\leqslant n} a_{kl}x_kx_l\Big]}_{Q(x_3,\dots,x_n)}$$

$$= \frac{a_{12}}{4}\Big[\Big(x_1 + x_2 + L_1(x_3,\dots,x_n) + L_2(x_3,\dots,x_n)\Big)^2 - \Big(x_1 - x_2 - L_1(x_3,\dots,x_n) + L_2(x_3,\dots,x_n)\Big)^2\Big] +$$

$$+Q(x_3,\dots,x_n),$$

où L_1, L_2 sont des formes linéaires et Q une forme quadratique de $x_3, \dots, x_n$.

Les formules

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_1 & = & x_1 + x_2 + L_1(x_3, \dots, x_n) + L_2(x_3, \dots, x_n) \\ y_2 & = & x_1 - x_2 - L_1(x_3, \dots, x_n) + L_2(x_3, \dots, x_n) \\ y_j & = & \qquad\qquad x_j \text{ pour } 3 \leqslant j \leqslant n, \end{array}\right. \text{ soit } \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{a_{13}+a_{23}}{a_{12}} & \frac{a_{14}+a_{24}}{a_{12}} & \dots & \frac{a_{1n}+a_{2n}}{a_{12}} \\ 1 & -1 & \frac{a_{23}-a_{13}}{a_{12}} & \frac{a_{24}-a_{14}}{a_{12}} & \dots & \frac{a_{2n}-a_{1n}}{a_{12}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

définissent un nouveau système de coordonnées, qui correspond à une nouvelle base $(g_1, \dots, g_n)$ de E. Pour trouver explicitement cette base on utilise la formule de passage

$$(g_1, \dots, g_n) = (f_1, \dots, f_n)P,$$

où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{a_{13}+a_{23}}{a_{12}} & \frac{a_{14}+a_{24}}{a_{12}} & \dots & \frac{a_{1n}+a_{2n}}{a_{12}} \\ 1 & -1 & \frac{a_{23}-a_{13}}{a_{12}} & \frac{a_{24}-a_{14}}{a_{12}} & \dots & \frac{a_{2n}-a_{1n}}{a_{12}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Dans cette base q aura la forme

$$q(\sum y_i g_i) = \frac{a_{12}}{4} y_1^2 - \frac{a_{12}}{4} y_2^2 + Q(y_3, \dots, y_n), \quad \text{où } Q(y_3, \dots, y_n) = \sum_{k=3}^{n} b_{kk} y_j^2 + \sum_{3 \leqslant k < l \leqslant n} b_{kl} y_k y_l$$

et le problème se réduit à la diagonalisation de la forme quadratique de $n-2$ variables définie par Q. On continue en appliquant à cette forme l'une des opérations I, II.

Attention : L'opération II doit être appliquée seulement si dans l'expression de la forme quadratique considérée il n'existe aucun carré à coefficient non-nul. Autrement dit : L'opération I est prioritaire, donc on est obligé de l'appliquer si c'est possible de l'appliquer.

Exemple : Réduire la forme quadratique $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $q(x) = 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_1x_3$. Spécifier sa signature et son rang.

La formule donnée exprime q dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$, qui est notre base de départ. Puisque l'expression de q ne contient aucun carré à coefficient non-nul, on est obligé d'appliquer l'opération II :

$$q(x) = q(\sum_{i=1}^{3} x_i e_i) = 2(x_1 - x_3)(x_2 - x_3) - 2x_3^2 = \frac{1}{2}\Big[(x_1 - x_3 + x_2 - x_3)^2 - (x_1 - x_3 - x_2 + x_3)^2\Big] - 2x_3^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[(x_1 + x_2 - 2x_3)^2 - (x_1 - x_2)^2\Big] - 2x_3^2.$$

Nous introduisons un nouveau système de coordonnées dans $\mathbb{R}^3$

$$\left\{\begin{array}{lcllll} y_1 & = & x_1 & +x_2 & -2x_3 \\ y_2 & = & x_1 & -x_2 & \\ y_3 & = & & & x_3, \end{array}\right.$$

qui correspond à une nouvelle base (f_1, f_2, f_3) de $\mathbb{R}^3$. (*Exercice : Déterminer cette base.*) On obtient

$$q(\sum y_i f_i) = \frac{1}{2} y_1^2 - \frac{1}{2} y_2^2 - 2y_3^2 .$$

Donc $\mathrm{rang}(q) = 3$ et $\mathrm{sign}(q) = (1, 2)$. Notre forme quadratique n'est ni positive, ni négative.

Exemple : Soit $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ donnée par

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 5x_4^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_1x_4.$$

On regroupe tous les termes qui contiennent x et on applique l'opération I :

$$q(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^2+2x_1(-x_2+2x_3+2x_4)+3x_2^2+5x_3^2+5x_4^2 = (x_1-x_2+2x_3+4x_4)^2-(-x_2+2x_3+2x_4)^2+3x_2^2+5x_3^2+5x_4^2$$
$$= (x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4)^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 4x_2x_3 + 4x_2x_4 - 8x_3x_4.$$

On pose

$$u_1 = x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4\ ,\ u_2 = x_2\ ,\ u_3 = x_3\ , u_4 = x_4\ .$$

Dans la base (f_1, f_2, f_3, f_4) qui correspond à ce nouveau système de coordonnées on a

$$q(u_1f_1+u_2f_2+u_3f_3+u_4f_4) = u_1^2+2u_2^2+u_3^2+u_4^2+4u_2u_3+4u_2u_4-8u_3u_4 = u_1^2+2(u_2^2+2u_2(u_3+u_4))+u_3^2+u_4^2-8u_3u_4 =$$
$$= u_1^2 + 2(u_2 + u_3 + u_4)^2 - 2(u_3 + u_4)^2 + u_3^2 + u_4^2 - 8u_3u_4 = u_1^2 + 2(u_2 + u_3 + u_4)^2 - u_3^2 - u_4^2 - 12u_3u_4.$$

En posant $\alpha_1 = u_1$, $\alpha_2 = u_2 + u_3 + u_4$, $\alpha_3 = u_3$, $\alpha_4 = u_4$ on obtient dans la base correspondante :

$$q(\alpha_1g_1 + \alpha_2g_2 + \alpha_3g_3 + \alpha_4g_4) = \alpha_1^2 + 2\alpha_2^2 - (\alpha_3 + 6\alpha_4)^2 + 35\alpha_4^2.$$

Avec une dernière transformation de coordonnées (laquelle ?) on arrive à

$$q(\beta_1h_1 + \beta_2h_2 + \beta_3h_3 + \beta_4h_4) = \beta_1^2 + 2\beta_2^2 - \beta_3^2 + 35\beta_4^2,$$

donc $\mathrm{rang}(q) = 4$ et $\mathrm{sign}(q) = (3, 1)$.

Définition 2.3.7 *Soit $\varphi \in L^2_{\mathrm{sym}}(E,\mathbb{R})$ une forme bilinéaire symétrique. Une famille $(v_1, \dots, v_k)$ est dite φ-orthogonale si $\varphi(v_i, v_j) = 0$ pour tout couple (i, j) tel que $i \neq j$.*

Remarquons qu'une base $B = (f_1, \dots, f_n)$ de E est φ-orthogonale si et seulement si la matrice $M_B(\varphi)$ est diagonale.

Corollaire 2.3.8 *Soit $\varphi \in L^2_{\mathrm{sym}}(E,\mathbb{R})$ une forme bilinéaire symétrique. Alors E admet une base φ-orthogonale.*

Démonstration: En effet, soit $B = (f_1, \dots, f_n)$ une base qui réduit la forme quadratique q_φ au sens de Gauss. Dans cette base on aura

$$q_\varphi(\sum_{i=1}^n x_if_i) = \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2,$$

(expressions dans laquelle exactement $r = \mathrm{rang}(\varphi)$ coefficients a_{ii} sont non-nuls). Puisque φ est la polaire de q_φ on a

$$\varphi(\sum_{i=1}^n x_if_i, \sum_{j=1}^n y_jf_j) = \sum_{i=1}^n a_{ii}x_iy_j,$$

ce qui montre que $M_B(\varphi)$ est bien diagonale, donc B est φ-orthogonale. ■

D'une manière similaire on peut introduire la notion de base φ-orthonormale. Une base $B = (f_1, \dots, f_n)$ est dite φ-orthonormale si $\varphi(f_i, f_j) = \delta_{ij}$ pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$, i.e. si $M_B(\varphi) = I_n$. Le théorème d'inertie de Sylvester montre que :

Corollaire 2.3.9 *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, et $\varphi \in L^2_{\mathrm{sym}}(E,\mathbb{R})$. E admet une base φ-orthonormale si et seulement si la signature de φ est $(n, 0)$.*

Remarquons que la signature de φ est $(n, 0)$ si est seulement si φ est définie positive. Pourquoi ?

Le version complexe de la loi d'inertie de Sylvester est très simple. Attention, il est important à cet égard qu'il n'y ait pas de confusion entre ce théorème de classification pour les *formes quadratiques complexes*, et le théorème d'inertie de Sylvester pour les *formes hermitiennes* (voir le théorème 3.2.7).

Théorème 2.3.10 *(la classification des formes bilinéaires quadratiques complexes) Soit E un espace vectoriel complexe de dimension finie n, et $q : E \to \mathbb{C}$ une forme quadratique sur E. Alors Il existe une base $B = (f_1, \dots, f_n)$ de E par rapport à laquelle q s'écrit sous la forme :*

$$q(\sum_{i=1}^n z_if_i) = \sum_{i=1}^r z_i^2, \tag{8}$$

où r est le rang de la forme polaire de q.

Pour trouver une base dans laquelle q est donnée par la formule $q(\sum_{i=1}^{n} z_i f_i) = \sum_{i=1}^{r} z_i^2$, on peut utiliser la même méthode que dans le cas réel : dans une première étape on utilise l'algorithme de Gauss pour arriver à une base $(f_1, \dots, f_n)$ dans laquelle q s'écrit sous la forme diagonale

$$q(\sum w_i f_i) = \sum_{i=1}^{r} a_{ii} w_i^2$$

avec $a_{ii} \in \mathbb{C}^*$, puis on choisit une racine carrée $\alpha_i \in \mathbb{C}^*$ de a_{ii} pour $i \leqslant i \leqslant r$ et on pose :

$$z_i := \left\{ \begin{array}{ccc} \alpha_i w_i & \text{si} & i \leqslant r \\ w_i & \text{si} & i > r \end{array} \right. \text{, ce qui correspond au changement de base : } g_i := \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{\alpha_i} f_i & \text{si} & i \leqslant r \\ f_i & \text{si} & i > r \text{ .} \end{array} \right.$$

3 Espaces euclidiens. Espaces hermitiens

3.1 Espaces euclidiens

Remarque 3.1.1 *Soient E un espace vectoriel réel de dimension n et $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *φ est définie positive,*
2. *la forme quadratique associée $q_\varphi : E \to \mathbb{R}$ satisfait*

$$\forall v \in E \backslash \{0\} \text{ on a } q_\varphi(v) > 0,$$

3. *$\mathrm{sign}(q_\varphi) = (n, 0)$, i.e. le rang de q_φ est $n = \dim(E)$ et tous les coefficients d'une forme réduite de q_φ sont strictement positifs.*

Démonstration: Exercice. ■

Nous avons donc deux méthodes pour vérifier si une forme bilinéaire symétrique φ est un produit scalaire : (1) avec le critère donné par la Proposition 2.2.11 (qui utilise les mineurs principaux dominants de la matrice de φ dans une base) ; (2) on réduit la forme quadratique q_φ et on vérifie si sa signature est $(\dim(E), 0)$.

Définition 3.1.2 *Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie. Un produit scalaire sur E est une forme bilinéaire, symétrique, définie positive $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ (voir la définition 2.2.10). Un espace euclidien de dimension n est un espace vectoriel réel de dimension n muni d'un produit scalaire, i.e. un couple (E, φ), où E est un espace vectoriel réel de dimension n et φ est un produit scalaire sur E.*

On va utilise souvent la notation $\langle u, v \rangle_\varphi$ (ou simplement $\langle u, v \rangle$ si φ est fixé) au lieu de $\varphi(u, v)$.

Exemples : 1. Nous avons déjà introduit le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^n$:

$$\langle x, y \rangle_{\mathrm{st}} := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \ , \ \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{st}} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

2. La forme bilinéaire symétrique $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x, y) := x_1 y_1 + \frac{1}{2} x_1 y_2 + \frac{1}{2} x_2 y_1 + x_2 y_2$$

est un produit scalaire, parce que la, forme quadratique associée est donnée par

$$q_\varphi(x) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 = (x_1 + \frac{1}{2} x_2)^2 + \frac{3}{4} x_2^2,$$

et sa signature est bien $(2, 0)$.

Définition 3.1.3 *Soit φ un produit scalaire sur E. La norme associée à φ est définie par*

$$\|v\|_\varphi := \sqrt{\varphi(v, v)} = \sqrt{q_\varphi(v)},$$

et la distance associée à φ est définie par

$$d_\varphi(u, v) := \|v - u\|_\varphi.$$

Une famille de vecteurs $(f_1, \ldots, f_k)$ est dite φ-orthogonale si $\varphi(f_i, f_j) = 0$ (soit $f_i \perp_\varphi f_j$) pour $i \neq j$.

Notons que toute famille φ-orthogonale de vecteurs non-nuls est toujours libre. Une famille $(f_1, \ldots, f_k)$ est dite φ-orthonormée, si elle est φ-orthogonale et pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$ on a $\|f_i\|_\varphi = 1$, i.e. si $(f_1, \ldots, f_k)$ est dite φ-orthonormale si

$$\langle f_i, f_j \rangle = \delta_{ij} \ \forall i,\ j \in \{1, \ldots, k\}.$$

Une base est dite φ-orthogonale (φ-orthonormale) si elle est φ-orthogonale (respectivement φ-orthonormale) en tant que famille. S'il s'agit d'un espace euclidien (E, φ) fixé, on dit simplement "orthogonale" et "orthonormale" au lieu de "φ-orthogonale" et "φ-orthonormale".

Remarque 3.1.4 *(les coordonnées par rapport à une base orthonormée) Soit $(f_1, \ldots, f_k)$ une base orthonormée de (E, φ). Pour tout $v \in E$ on a*

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle f_i, v \rangle_\varphi f_i,$$

donc les coordonnées par rapport à une base orthonormée $(f_1, \ldots, f_k)$ coïncident avec les produits scalaires $\langle f_i, x \rangle_\varphi$.

Démonstration: Exercice. ∎

Soit (E, φ) un espace euclidien et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. Le sous-espace orthogonal

$$F^{\perp_\varphi} := \{v \in E,\ \forall w \in F \text{ on a } v \perp_\varphi w\}$$

est un supplémentaire de F, donc on a une décomposition en somme directe

$$E = F \oplus F^{\perp_\varphi}.$$

Une telle somme directe s'appelle somme directe orthogonale.

Puisqu'il s'agit d'une décomposition en somme directe, pour tout $v \in E$ il existe un unique couple $(w, w') \in F \times F^{\perp_\varphi}$ telle que $v = w + w'$. L'application $\mathrm{pr}_F : E \to F$ qui associe à tout $v \in E$ le premier terme $w \in F$ de cette somme est linéaire et s'appelle *la projection orthogonale* sur F. Nous avons évidemment

$$\ker(\mathrm{pr}_F) = F^{\perp_\varphi},\ \mathrm{im}(\mathrm{pr}_F) = F,\ \mathrm{pr}_{F\,|F} = \mathrm{id}_F.$$

Proposition 3.1.5 *(la formule de la projection) Soit (E, φ) un espace euclidien, F un sous-espace vectoriel de E et $(f_1, \ldots, f_k)$ une base orthonormée de F. Alors*

$$\mathrm{pr}_F(v) = \sum_{i=1}^{k} \langle f_i, v \rangle f_i.$$

Démonstration: Exercice. ∎

Définition 3.1.6 *Soit (E, φ) un espace euclidien. Un automorphisme $f \in \mathrm{GL}(E)$ est dit orthogonal s'il préserve le produit sclaire φ, i.e. si*

$$\forall (v, w) \in E^2 \text{ on a } \varphi(f(v), f(w)) = \varphi(v, w)\ .$$

Le sous-ensemble $\mathrm{O}(E) \subset \mathrm{GL}(E)$ des automorphismes orthogonaux est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$ qui s'appelle le sous-groupe orthogonal de l'espace euclidien (E, φ).

Proposition 3.1.7 *Soit (E, φ) un espace euclidien, B une base orthonormée de (E, φ) et $f \in \mathrm{GL}(E)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est orthogonal,*
2. *f préserve la norme $\| \cdot \|_\varphi$:*
$$\forall v \in E \text{ on a } \|f(v)\|_\varphi = \|v\|_\varphi.$$
3. *f est une isométrie de l'espace métrique (E, d_φ), c'est à dire f préserve la distance d_φ :*
$$\forall v,\ w \in E \text{ on a } d_\varphi(f(v), f(w)) = d_\varphi(v, w).$$

4. La matrice $M_B(f)$ est orthogonale, c'est à dire $M_B(f)\,{}^tM_B(f) = I_n$.

L'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n est désigné par $\mathrm{O}(n)$. On a donc par définition

$$\mathrm{O}(n) = \{A \in M_{n,n}(\mathbb{R})|\ A\,{}^tA = I_n\} = \{A \in M_{n,n}(\mathbb{R})|\ A \text{ est inversible et } A^{-1} = {}^tA\} = \{A \in M_{n,n}(\mathbb{R})|\ {}^tA\,A = I_n\}.$$

Proposition 3.1.8 *Soit (E, φ) un espace euclidien et $B = (f_1, \ldots, f_n)$ une base orthonormale de (E, φ). Alors*

1. *L'application $f_B : \mathbb{R}^n \to E$ donnée par $f_B(x) := \sum_{i=1}^n x_i f_i$ est un isomorphisme d'espace euclidiens, c'est à dire*
$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \text{ on a } \langle f_B(x), f_B(y)\rangle_\varphi = \langle x, y\rangle_{\mathrm{st}}.$$
2. *L'application $f \mapsto M_B(f)$ définit un isomorphisme de groupes $\mathrm{O}(E) \to \mathrm{O}(n)$.*

Donc, dans la présence d'une base orthonormée, notre espace euclidien (E, φ) s'identifie à l'espace euclidien standard $(\mathbb{R}^n, \langle, \cdot, \cdot\rangle_{\mathrm{st}})$, et le groupe orthogonal $\mathrm{O}(E)$ de E s'identifie au groupe $\mathrm{O}(n)$.

En utilisant le corollaire 2.3.9 on obtient :

Théorème 3.1.9 *(la classification des espaces euclidiens)*

1. *Tout espace euclidien admet une base orthonormale,*
2. *Tout espace euclidien de dimension n est isomorphe (en tant qu'espace euclidien) à l'espace euclidien standard $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot, \cdot\rangle_{\mathrm{st}})$. Plus précisément, pour toute base orthonormale $B = (f_1, \ldots, f_n)$ de (E, φ), l'application $f_B : \mathbb{R}^n \to E$ donnée par $f_B(x) := \sum_{i=1}^n x_i f_i$ est un isomorphisme d'espaces euclidiens.*

L'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Théorème 3.1.10 *Soit (E, φ) un espace euclidien et $(g_1, \ldots, g_n)$ une base arbitraire de E. Alors il existe une unique famille de nombres réels $(a_{ik})_{1\leqslant i<k\leqslant n}$ telle que la base $(f_1, \ldots, f_n)$ donnée par les formules*

$$f_k = g_k + \sum_{i=1}^{k-1} a_{ik} f_i \text{ pour } 1 \leqslant k \leqslant n$$

soit orthogonale.

L'algorithme de Gram-Schmidt fournit par récurrence (par rapport à k) la famille $(a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{k-1,k})$ des coefficients qui interviennent dans la décomposition de f_k. Implicitement on obbtient une démonstration du théorème 3.1.10. Posons $f_1 := g_1$. La condition $f_2 \perp_\varphi f_1$ devient

$$0 = \langle g_2 + a_{12} f_1, f_1\rangle_\varphi = \langle g_2, f_1\rangle_\varphi + a_{12}\langle f_1, f_1\rangle_\varphi \Leftrightarrow a_{12} = -\frac{\langle g_2, f_1\rangle_\varphi}{\langle f_1, f_1\rangle_\varphi} = -\frac{\langle g_2, f_1\rangle_\varphi}{\|f_1\|_\varphi^2}.$$

On obtient une unique solution, donc f_2 est déterminé. Supposons maintenant f_1 et f_2 connus. Les conditions $f_3 \perp_\varphi f_1$, $f_3 \perp_\varphi f_2$ deviennent

$$0 = \langle g_3 + a_{13} f_1 + a_{23} f_2, f_1\rangle_\varphi = \langle g_3, f_1\rangle_\varphi + a_{13}\langle f_1, f_1\rangle_\varphi \Leftrightarrow a_{13} = -\frac{\langle g_3, f_1\rangle_\varphi}{\langle f_1, f_1\rangle_\varphi} = -\frac{\langle g_3, f_1\rangle_\varphi}{\|f_1\|_\varphi^2},$$

$$0 = \langle g_3 + a_{13} f_1 + a_{23} f_2, f_2\rangle_\varphi = \langle g_3, f_2\rangle_\varphi + a_{23}\langle f_2, f_2\rangle_\varphi \Leftrightarrow a_{23} = -\frac{\langle g_3, f_2\rangle_\varphi}{\langle f_2, f_2\rangle_\varphi} = -\frac{\langle g_3, f_2\rangle_\varphi}{\|f_2\|_\varphi^2}.$$

Par récurrence on obtient la formule générale :

$$a_{sk} = -\frac{\langle g_k, f_s\rangle_\varphi}{\|f_s\|_\varphi^2} \text{ pour } 1 \leqslant s \leqslant k-1.$$

Remarque 3.1.11 *Pour obtenir une base orthonormée il suffit d'orthonormaliser la base orthogonale fournit par le théorème 3.1.10, donc de poser $h_i := \frac{1}{\|f_i\|_\varphi} f_i$.*

Version alternative : Nous avons une version alternative équivalente de l'algorithme de orthonormalisation de Gram-Schimidt, méthode qui utilise la formule de la projection (la proposition 3.1.5) : Considérons les sous-espaces vectoriels $F_i \subset E$ donnés par

$$F_k := \mathrm{Vect}(g_1, \dots, g_k).$$

F_i est donc le sous-espace engendré par les premiers k vecteurs de la base donnée. Nous avons évidemment

$$F_1 = \mathbb{R}g_1,\ F_k \subset F_{k+1},\ F_n = E\ .$$

Nous construisons, par récurrence, une base orthogonale $(f_1, \dots, f_k)$ et une base orthonormée $(h_1, \dots, h_k)$ de F_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ de la manière suivante :

Pour $i = 1$: $f_1 := g_1$, $h_1 := \frac{1}{\|f_1\|_\varphi} f_1$.

Pour $i = 2$: $f_2 := g_2 - \mathrm{pr}_{F_1}(g_2) = g_2 - \langle h_1, g_2 \rangle_\varphi h_1$, $h_2 := \frac{1}{\|f_2\|_\varphi} f_2$.

Le cas général (le passage de $k-1$ à k) : $f_k := g_k - \mathrm{pr}_{F_{k-1}}(g_k) = g_k - \sum_{s=1}^{k-1} \langle h_s, g_k \rangle_\varphi h_s$, $h_k := \frac{1}{\|f_k\|_\varphi} f_k$.

Donc, à chaque étape, *on soustrait de g_k sa projection sur F_{k-1} et on normalise le résultat.*

Corollaire 3.1.12 *Soient (E, φ) un espace euclidien et $B = (g_1, \dots, g_n)$ une base de E. Alors*

1. *Il existe une unique matrice supérieure triangulaire Θ avec 1 sur la diagonale telle que la base $B\Theta$ soit orthogonale.*
2. *Il existe une unique matrice supérieure triangulaire T à éléments diagonaux strictement positifs telle que la base BT soit orthonormée.*

Démonstration: 1. D'après le théorème 3.1.10, il existe une unique famille de nombres réels $(a_{ik})_{1 \leqslant i < k \leqslant n}$ telle que la base $(f_1, \dots, f_n)$ donnée par les formules

$$f_k = g_k + \sum_{i=1}^{k-1} a_{ik} f_i \text{ pour } 1 \leqslant k \leqslant n \tag{9}$$

soit orthogonale. On obtient les colonnes de Θ par récurrence à partir de la famille $(a_{ik})_{1 \leqslant i < k \leqslant n}$, en exprimant chaque vecteur f_i intervenant à droite dans (9) en fonction des vecteurs g_i, g_{i-1}, g_1 (en utilisant les formules précédentes). L'unicité de Θ résulte de l'unicité de la famille $(a_{ik})_{1 \leqslant i < k \leqslant n}$.

2. Résulté de 1 en posant $t_{ik} = \frac{1}{\|f_k\|} \theta_{ik}$. ■

Exercice (récapitulatif) Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique donnée par $q(x) = 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_1x_3$.

1. Déterminer la forme polaire f_q de q, et la matrice A de f_q dans la base canonique.
2. Déterminer le noyau et le rang de f_q.
3. Soit $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Déterminer le sous-espace orthogonal $\pi = v^{\perp_f} := \{x \in \mathbb{R}^3 |\ f_q(v, x) = 0\}$ de v par rapport à la forme bilinéaire symétrique f_q.
4. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
5. Déterminer les valeurs propres de A, leur multiplicités algébriques.
6. Déterminer les espaces propres de A (associés à chaque valeur propre) et les multiplicités géométriques des valeurs propres. Préciser une base pour chaque espace propre.
7. En appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt orthonormaliser *par rapport au produit scalaire standard* les deux bases obtenues à la question précédente.
8. En déduire une base (f_1, f_2, f_3) de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A, qui sont orthogonaux deux à deux *par rapport au produit scalaire standard de $\mathbb{R}^3$.*
9. Déterminer la matrice de f_q, l'expression de f_q et l'expression de q dans la base (f_1, f_2, f_3) trouvée à la question précédente; remarquer que cette base diagonalise à la fois le produit scalaire standard et la forme bilinéaire symétrique f_q,

10. Déterminer la signature de q. Est-ce que f_q est un produit scalaire ?
11. Préciser la matrice du produit scalaire standard $\langle\cdot,\cdot\rangle$ de $\mathbb{R}^3$ dans la base (f_1, f_2, f_3).
12. Déterminer le cône isotrope de q dans la base (f_1, f_2, f_3),
13. Déterminer une forme diagonale (standard) de q en utilisant l'algorithme de Gauss. Utiliser cette forme pour déterminer la signature de q et comparer le résultat obtenu avec celui trouvé à la question 10.

1. Avec la méthode du dédoublement on obtient :

$$f_q(x,y) = x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_3 - x_3y_2 - x_1y_3 - x_3y_1,$$

et la matrice de cette forme bilinéaire symétrique dans la base canonique est la matrice des coefficients par rapport dans cette base, donc

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Le noyau de f_q est le sous-espace des solution du système linéaire homogène associé à la matrtice A, donc du système

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} & x_2 & -x_3 & = & 0 \\ x_1 & & -x_3 & = & 0 \\ -x_1 & -x_2 & & = & 0 \end{array}\right. \xrightarrow{L_1\leftrightarrow L_2} \left\{\begin{array}{rrrcl} x_1 & & -x_3 & = & 0 \\ & x_2 & -x_3 & = & 0 \\ -x_1 & -x_2 & & = & 0 \end{array}\right. \xrightarrow{L_3\to L_3+L_1} \left\{\begin{array}{rrrcl} x_1 & & -x_3 & = & 0 \\ & x_2 & -x_3 & = & 0 \\ & -x_2 & -x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\xrightarrow{L_3\to L_3+L_2} \left\{\begin{array}{rrrcl} x_1 & & -x_3 & = & 0 \\ & x_2 & -x_3 & = & 0 \\ & & -2x_3 & = & 0 \end{array}\right. ,$$

qui une seule sulution $x = 0$. Donc

$$N(f_q) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}\ ,\ \mathrm{rang}(f_q) = \mathrm{rang}(A) = 3.$$

3. Par la définition de l'orthogonal et en utilisant la formule connue (2), on obtient

$$\pi = v^{\perp_{f_q}} = \{x\in\mathbb{R}^3 |\ f_q(v,x) = 0\} = \left\{x\in\mathbb{R}^3 |\ (1,1,1)\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0\right\} =$$

$$= \left\{x\in\mathbb{R}^3 |\ (0,0,-2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0\right\} = \big\{x\in\mathbb{R}^3 |\ x_3 = 0\big\} = \mathrm{Vect}(e_1, e_2).$$

4. On a

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 & -1 \\ 1 & -X & -1 \\ -1 & -1 & -X \end{vmatrix} \overset{\substack{L_1\to L_1+XL_2 \\ L_3\to L_3+L_2}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1-X^2 & -1-X \\ 1 & -X & -1 \\ 0 & -1-X & -1-X \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1-X^2 & -1-X \\ -1-X & -1-X \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} X^2-1 & X+1 \\ X+1 & X+1 \end{vmatrix} =$$

$$-\big[(X-1)(X+1)^2 - (X+1)^2\big] = -(X+1)^2(X-2).$$

5. Les racines du polynôme caractéristique sont -1 et 2, donc $\mathrm{Spec}(A) = \{-1, 2\}$. On a évidemment $m_a(-1) = 2$, $m_a(2) = 1$.

6. Pour les espaces propres :

$$E_{-1} = \ker(A - (-1)I_3) \text{ qui est l'espace des solutions de } \left\{\begin{array}{rrrcl} x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 0 \\ -x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 0 \end{array}\right. .$$

Les trois équations sont équivalentes, donc on peut garder seulement la première et, en choisissant $x_2 = \alpha$, $x_3 = \beta$ comme inconnues secondaires, on obtient

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha+\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donc $E_{-1} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ et $m_g(-1) = 2 = m_a(-1)$.

$E_2 = \ker(A - 2I_3)$ qui est l'espace des solutions de $\left\{\begin{array}{rrrcl} -2x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 0 \\ x_1 & -2x_2 & -x_3 & = & 0 \\ -x_1 & -x_2 & -2x_3 & = & 0 \end{array}\right. \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2}$

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} x_1 & -2x_2 & -x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 0 \\ -x_1 & -x_2 & -2x_3 & = & 0 \end{array}\right. \xrightarrow[L_3 \to L_3 + L_1]{L_2 \to L_2 + 2L_1} \left\{\begin{array}{rrrcl} x_1 & -2x_2 & -x_3 & = & 0 \\ & -3x_2 & -3x_3 & = & 0 \\ & -3x_2 & -3x_3 & = & 0 \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{rrrcl} x_1 & -2x_2 & -x_3 & = & 0 \\ & x_2 & +x_3 & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}\right. .$$

On prend $x_3 = \alpha$ comme inconnue secondaire, et on obtient

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\alpha\\-\alpha\\\alpha\end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},$$

donc $E_2 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $m_g(2) = 1 = m_a(2)$.

7. Posons

$$g_1 := \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\ g_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

En appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt on pose $f_1 = g_1,\ f_2 = g_2 + \alpha f_1$ et la condition $f_1 \perp f_2$ donne

$$\alpha = -\frac{\langle g_2, f_1\rangle}{\|f_1\|^2} = \frac{1}{2},\ f_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$$

En normalisant les vecteurs $f_1,\ f_2$ on obtient la base orthonormée cherchée (h_1, h_2) de E_{-1} :

$$h_1 := \frac{1}{\|f_1\|} f_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\ h_2 := \frac{1}{\|f_2\|} f_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}.$$

Une base orthonormée de la droite vectorielle E_2 est (h), où $h := \frac{1}{\|g\|} g$ où $g = \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ est le générateur trouvé de cette droite. Donc

$$h = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

8. Les deux espaces propres E_{-1} et E_2 sont orthogonaux par rapport au produit scalaire standard (à vérifier !) et donnent une décomposition en somme directe (orthogonale) de $\mathbb{R}^3$. Nous avons déterminé une base orthonormée de chacun des deux sous-epaces ; la base concaténée $B := (h_1, h_2, h)$ des deux bases ainsi obtenues sera donc une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ par rapport au produit scalaire standard.

9. Notons $h_3 := h$, donc la base trouvée à la question précédente s'écrit $B = (h_1, h_2, h_3)$. La matrice de f_q dans la base B (voir la question 8) est $\Phi = (\varphi_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant 3}$, où $\varphi_{ij} := f_q(h_i, h_j)$. Notons par λ_i la valeur propre qui correspond à h_i, donc $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$. On a

$$f_q(h_i, h_j) = {}^t h_i (A h_j) = \langle h_i, A h_j\rangle = \langle h_i, \lambda_j h_j\rangle = \lambda_j \langle h_i, h_j\rangle = \lambda_j \delta_{ij} = \left\{\begin{array}{ccc} \lambda_i & \text{si} & i = j \\ 0 & \text{si} & i \neq j \end{array}\right. ,$$

donc

$$\Phi = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

10. On a $\operatorname{sign}(q) = (1, 2)$, donc f_q n'est pas un produit scalaire.

11. La base B est orthonormée par rapport au produit scalaire standard, donc la matrice du produit scalaire standard dans cette base est I_3.

12. On a
$$q(\sum y_i h_i) = f_q(\sum y_i h_i, \sum y_j h_j) = \sum f_q(h_i, h_j) y_i y_j = \sum \varphi_{ij} y_i y_j = -y_1^2 - y_2^2 + 2y_3^2.$$
Le cône isotrope de q dans cette base peut être décrit avec les mêmes méthodes que pour la forme quadratique donnée par la formule $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ (voir la figure 1), et le résultat sera similaire. La seule différence est que l'intersection de $C(q)$ avec le plan $y_3 = c$ est un circle de rayon $\sqrt{2c^2} = \sqrt{2}|c|$, tandis que pour la forme étudiée avant on a obtenu un cône de rayon $|c|$.

13.

$$q(x) = q(\sum_{i=1}^{3} x_i e_i) = 2(x_1 - x_3)(x_2 - x_3) - 2x_3^2 = \frac{1}{2}\Big[(x_1 - x_3 + x_2 - x_3)^2 - (x_1 - x_3 - x_2 + x_3)^2\Big] - 2x_3^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[(x_1 + x_2 - 2x_3)^2 - (x_1 - x_2)^2\Big] - 2x_3^2.$$

Nous introduisons un nouveau système de coordonnées dans $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} z_1 &= x_1 + x_2 - 2x_3 \\ z_2 &= x_1 - x_2 \\ z_3 &= x_3 \end{cases},$$

qui correspond à une nouvelle base (k_1, k_2, k_3) de $\mathbb{R}^3$. *Exercice : Déterminer cette base.* On obtient

$$q(\sum z_i k_i) = \frac{1}{2} z_1^2 - \frac{1}{2} z_2^2 - 2z_3^2.$$

Donc $\operatorname{rang}(q) = 3$ et $\operatorname{sign}(q) = (1, 2)$, le même résultat que celui obtenu à la question 10.

3.2 Espaces hermitiens

Définition 3.2.1 *Soit E un espace vectoriel complexe de dimension n. Une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{C}$ est dite*

1. *sesquilinéaire, si elle est anti-linéaire par rapport au premier argument et linéaire par rapport au deuxième argument, i.e. si pour tous α, $\beta \in \mathbb{C}$, u, v, $w \in E$ on a*

$$\varphi(\alpha u + \beta v, w) = \bar{\alpha}\varphi(u, w) + \bar{\beta}\varphi(v, w)\ ,\ \varphi(w, \alpha u + \beta v) = \alpha\varphi(w, u) + \beta\varphi(w, v),$$

2. *hermitienne, si elle est sesqilinéaire et pour tous u, $v \in E$ on a $\varphi(v, u) = \overline{\varphi(u, v)}$,*
3. *produit scalaire hermitien, si elle est hermitienne et définie positive, i.e. $\varphi(u, u) > 0$ pour tout $u \in E \backslash \{0\}$.*

Exemple : Le produit hermitien standard sur $\mathbb{C}^n$ est défini par $\langle u, v \rangle_{\mathrm{st}} := \sum_{i=1}^{n} \bar{u}_i v_i$. Vérifier qu'il s'agit bien d'un produit scalaire hermitien.

Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{C}$ une forme sesqulinéaire et $B = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de E. La matrice de φ dans la base B (la matrice des coefficients de φ dans la base B) est définie par

$$M_B(\varphi) = (\varphi_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}\ ,\ \text{où } \varphi_{ij} := \varphi(f_i, f_j).$$

Comme dans le cas des formes bilinéaires, on obtient la formule

$$\varphi(\sum_i u_i f_i, \sum_j v_j f_j) = \sum_{i,j} \varphi_{ij} \bar{u}_i v_j = \bar{\mathrm{u}}^T \Phi \mathrm{v},$$

où $\mathrm{u} \in \mathbb{C}^n$, $\mathrm{v} \in \mathbb{C}^n$ sont les vecteurs formés avec les coordonnées de u et v. Si on passe d'une base B à une base $B' = BP$, les matrices de φ dans les deux bases seront reliées par la formule

$$M_{B'}(\varphi) = \bar{P}^T M_B(\varphi) P.$$

Remarque 3.2.2 *Soit $B = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de E. Une forme sesquilinéaire $\varphi : E \times E \to \mathbb{C}$ est hermitienne si et seulement si la matrice $\Phi := M_B(\varphi)$ est une matrice hermitienne, i.e. satisfait la condition*

$$\Phi^T = \bar{\Phi} \ , \ \textit{soit } \varphi_{ji} = \bar{\varphi}_{ij} \textit{ pour } 1 \leqslant i,\, j \leqslant n.$$

Définition 3.2.3 *Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{C}$ une forme hermitienne. Le noyau et le rang de φ sont définis par*

$$N(\varphi) := \{v \in E | \ \forall x \in E \ \textit{on a } \varphi(v, x) = 0\}, \ \mathrm{rang}(\varphi) := \dim(E) - \dim(N(\varphi)).$$

Comme dans le cas des formes bilinéaires symétriques on a $\mathrm{rang}(\varphi) = \mathrm{rang}(M_B(\varphi))$ pour toute base B de E.

Remarque 3.2.4 *Soit $\varphi = E \times E \to \mathbb{C}$ une forme hermitienne. Alors pour tout $v \in E$ on a $\varphi(v, v) \in \mathbb{R}$.*

En effet, la propriété de symétrie hermitienne $\varphi(v, u) = \overline{\varphi(u, v)}$ donne, pour $u = v$, $\varphi(v, v) = \overline{\varphi(v, v)}$, i.e. $\varphi(v, v) \in \mathbb{R}$.

Définition 3.2.5 *Une forme quadratique hermitienne sur E est une application $q : E \to \mathbb{R}$ telle qu'il existe une forme hermitienne $\varphi : E \times E \to \mathbb{C}$ telle que $q(v) = \varphi(v, v)$ pour tout $v \in E$.*

Pour une forme quadratique hermitienne $q : E \to \mathbb{R}$ il existe *une unique* forme hermitienne $\varphi : E \times E \to \mathbb{C}$ qui satisfait l'identité $q(v) = \varphi(v, v)$. Cette forme hermitienne s'appelle la forme polaire de q, sera notée φ_q et est donnée par la formule

$$\varphi_q(u, v) = \frac{1}{4}\big(q(u + v) - q(x - y) + iq(u - iv) - iq(u + iv)\big).$$

(l'identité polaire pour les formes hermitiennes). Exercice.

Nous avons une version hermitienne du

1. Critère de positivité de Sylvester (voir la proposition 2.2.11) :

Proposition 3.2.6 *(le critère de Sylvester pour les formes hermitiennes) Soit B une base de E. Une forme hermitienne $\varphi : E \times E \to \mathbb{C}$ est définie positive (donc un produit scalaire hermitien sur E) si et seulement si tous les mineurs principaux dominants $\Delta_k = \mathrm{d\acute{e}t}((\varphi_{ij})_{1 \leqslant i, j \leqslant k})$ de la matrice $\Phi = M_B(\varphi)$ sont strictement positifs.*

2. Théorème d'inertie de Sylvester (comparer avec le théorème 2.3.4) :

Théorème 3.2.7 *(loi d'inertie de Sylvester pour les formes quadratiques hermitiennes). Soit E un espace vectoriel complexe de dimension finie n et $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique hermtienne sur E. Alors*

1. *Il existe une base $B = (f_1, \ldots, f_n)$ de E par rapport à laquelle q s'écrit sous la forme :*

$$q(\sum_{i=1}^{n} z_i f_i) = \sum_{i=1}^{s} |z_i|^2 - \sum_{j=s+1}^{s+t} |z_j|^2 \ . \tag{10}$$

2. *Une telle base n'est pas unique, mais la paire (s, t) d'entiers positifs dépend seulement de q, donc est indépendante de la base B.*

Donc le théorème de Sylvester affirme qu'il existe une base B de E dans laquelle q est réduite à une somme (et différence) des carrés des valeurs absolues des coordonnées.

Définition 3.2.8 *La paire $(s, t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ s'appelle la signature de q, le nombre t de termes à coefficient négatif s'appelle l'indice de q, et la somme $r := s + t$ s'appelle la rang de q.*

Remarque 3.2.9 *Le rang $r = s + t$ d'une forme quadratique $q : E \to \mathbb{R}$ coïncide avec le rang $\mathrm{rang}(\varphi_q)$ de la forme polaire $\varphi_q : E \times E \to \mathbb{R}$, donc avec la rang de la matrice de φ_q dans une base arbitraire de E.*

Définition 3.2.10 *Un espace hermitien est un espace vectoriel complexe E de dimension finie muni d'un produit scalaire hermitien.*

Comme dans le cas des espaces euclidiens on introduit les notions de famille orthogonale et famille orthonormale (orthonormée) dans un espace hermitien. En utilisant le théorème d'inertie de Sylvester pour les formes quadratiques hermitiennes on obtient (comme dans le cas euclidien) un théorème d'existence d'une base orthonormée dans tout espace hermitien. Ce théorème d'existence nous permets de classifier les espaces hermitiens à isomorphisme près. Soit (E, φ), (E', φ') deux espaces hermitiens. Un isomorphisme d'espaces hermitiens $f : E \to E'$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels complexes tel que, pour tous $u, v \in E$ on a $\varphi'(f(u), f(v)) = \varphi(u, v)$.

Théorème 3.2.11 *(la classification des espaces hermitiens)*

1. *Tout espace hermitien admet une base orthonormale,*
2. *Tout espace hermitien de dimension n est isomorphe (en tant qu'espace hermitien) à l'espace hermitien standard $(\mathbb{C}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{st}})$. Plus précisément, pour toute base orthonormale $B = (f_1, \dots, f_n)$ de (E, φ), l'application $f_B : \mathbb{C}^n \to E$ donnée par $f_B(z) := \sum_{i=1}^n z_i f_i$ est un isomorphisme d'espaces hermitiens.*