UNIVERSITÉ AIX MARSEILLE **UFR SCIENCES**

Correction de l'examen partiel du 21 mars 2018
Licence Mathématiques 3 : Géométrie différentielle

Exercice 1 (**6p**) (questions proches du cours)

1. (**2p**) Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée régulière. Démontrer qu'il existe un changement de variable $\varphi : J \to I$ qui préserve l'orientation tel que $\gamma \circ \varphi$ soit une courbe normale.
2. (**1p**) Écrire les équations de Frenet pour une courbe birégulière $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$.
3. (**3p**) Écrire et démontrer les formules directes pour le calcul de la courbure et de la torsion d'une courbe birégulière $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$.

Solution : Voir le cours.

Exercice 2 (**9p**) Soit $E \subset \mathbb{R}^2$ l'ellipse d'équation $\frac{(x_1-a_1)^2}{\alpha_1^2} + \frac{(x_2-a_2)^2}{\alpha_2^2} = 1$, où $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}_+^*$.

1. (**1p**) Donner une paramétrisation régulière $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ de E.
2. (**2p**) Pour tout $t \in \mathbb{R}$ préciser la droite tangente $\tau_t(\gamma)$ et la droite normale $\nu_t(\gamma)$. Écrire une équation paramétrique et une équation implicite pour chacune de ces droites.
3. (**1p**) Déterminer le repère mobile de Frenet $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$ de γ au point $t \in \mathbb{R}$.
4. (**2p**) Calculer la courbure $\kappa_\gamma(t)$ avec deux méthode différentes (en utilisant le repère mobile de Frenet et avec la formule directe).
5. (**2p**) Préciser la valeur maximale et la valeur minimale de $\kappa_\gamma(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$, et préciser les points $t \in \mathbb{R}$ où ces valeurs sont atteintes. *Indication : discussion selon les trois cas* $\alpha_1 < \alpha_2$, $\alpha_2 < \alpha_1$, $\alpha_1 = \alpha_2$.
6. (**1p**) Déterminer le rayon de courbure et le cercle osculateur de γ au point t.

Solution :

1. La plus simple paramétrisation régulière de E est $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ donnée par

$$\gamma(t) := \begin{pmatrix} a_1 + \alpha_1 \cos(t) \\ a_2 + \alpha_2 \sin(t) \end{pmatrix} .$$

Il s'agit bien d'une paramétrisation de E parce que

$$\frac{(\gamma_1(t) - a_1)^2}{\alpha_1^2} + \frac{(\gamma_2(t) - a_2)^2}{\alpha_2^2} = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1 .$$

Cette paramétrisation est bien régulière parce que

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\alpha_1 \sin(t) \\ \alpha_2 \cos(t) \end{pmatrix} \neq 0_{\mathbb{R}^2}\ \ \forall t \in \mathbb{R} .$$

En effet, puisque $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, la condition $\gamma'(t) = 0_{\mathbb{R}^2}$ implique $\sin(t) = \cos(t) = 0$, ce qui est impossible (parce que $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$).

2. La droite tangente au point $t \in \mathbb{R}$ est

$$\tau_t(\gamma) = \gamma(t) + \mathbb{R}\gamma'(t) = \begin{pmatrix} a_1 + \alpha_1 \cos(t) \\ a_2 + \alpha_2 \sin(t) \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -\alpha_1 \sin(t) \\ \alpha_2 \cos(t) \end{pmatrix} ,$$

donc la droite d'équation paramétrique

$$x(s)=\gamma(t)+s\gamma'(t)=\begin{pmatrix} a_1+\alpha_1\cos(t) \\ a_2+\alpha_2\sin(t)\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix} -\alpha_1\sin(t) \\ \alpha_2\cos(t)\end{pmatrix},$$

soit

$$\left\{\begin{array}{lll} x_1(s) & = & a_1+\alpha_1(\cos(t)-s\sin(t) \\ x_2(s) & = & a_2+\alpha_2(\sin(t)+s\cos(t)) \end{array}\right. .$$

La droite normale est la droite

$$\nu_t(\gamma)=\gamma(t)+\mathbb{R}R_{\frac{\pi}{2}}\gamma'(t)=\gamma(t)+\mathbb{R}\begin{pmatrix} -\alpha_2\cos(t) \\ -\alpha_1\sin(t)\end{pmatrix},$$

donc la droite d'équation paramétrique

$$x(s)=\begin{pmatrix} a_1+\alpha_1\cos(t) \\ a_2+\alpha_2\sin(t)\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix} -\alpha_2\cos(t) \\ -\alpha_1\sin(t)\end{pmatrix},$$

soit

$$\left\{\begin{array}{lll} x_1(s) & = & a_1+\alpha_1\cos(t)-s\alpha_2\cos(t) \\ x_2(s) & = & a_2+\alpha_2\sin(t)-s\alpha_1\sin(t) \end{array}\right. .$$

L'équation implicite de la tangente $\tau_t(\gamma)$ est

$$\left\langle R_{\frac{\pi}{2}}\gamma'(t),x-\gamma(t)\right\rangle=0\,,$$

et l'équation implicite de la normale $\nu_t(\gamma)$ est

$$\langle\gamma'(t),x-\gamma(t)\rangle=0\,.$$

3. On a

$$f_1(t)=\frac{1}{\|\gamma'(t)\|}\gamma'(t)=\frac{1}{\sqrt{\alpha_1^2\sin^2(t)+\alpha_2^2\cos^2(t)}}\begin{pmatrix} -\alpha_1\sin(t) \\ \alpha_2\cos(t)\end{pmatrix},$$

$$f_2(t)=R_{\frac{\pi}{2}}f_1(t)=\frac{1}{\sqrt{\alpha_1^2\sin^2(t)+\alpha_2^2\cos^2(t)}}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\alpha_1\sin(t) \\ \alpha_2\cos(t)\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{\alpha_1^2\sin^2(t)+\alpha_2^2\cos^2(t)}}\begin{pmatrix} -\alpha_2\cos(t) \\ -\alpha_1\sin(t)\end{pmatrix},$$

donc

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{\alpha_1^2\sin^2(t)+\alpha_2^2\cos^2(t)}}\begin{pmatrix} -\alpha_1\sin(t) & -\alpha_2\cos(t) \\ \alpha_2\cos(t) & -\alpha_1\sin(t)\end{pmatrix}.$$

4. On a

$$\kappa_\gamma(t)=\frac{1}{\|\gamma'(t)\|}\langle f_2(t),f_1'(t)\rangle=\frac{1}{\|\gamma'(t)\|^3}\det(\gamma'(t),\gamma''(t))=\frac{1}{(\alpha_1^2\sin^2(t)+\alpha_2^2\cos^2(t))^{\frac{3}{2}}}\begin{vmatrix} -\alpha_1\sin(t) & -\alpha_1\cos(t) \\ \alpha_2\cos(t) & -\alpha_2\sin(t)\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{\alpha_1\alpha_2(\sin^2(t)+\cos^2(t))}{(\alpha_1^2\sin^2(t)+\alpha_2^2\cos^2(t))^{\frac{3}{2}}}=\frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1^2\sin^2(t)+\alpha_2^2\cos^2(t))^{\frac{3}{2}}}\ .$$

En utilisant la formule directe on obtient

$$\kappa_\gamma(t)=\frac{\det(\gamma'(t),\gamma''(t))}{\|\gamma'(t)\|^3}\frac{1}{(\alpha_1^2\sin^2(t)+\alpha_2^2\cos^2(t))^{\frac{3}{2}}}\det\begin{pmatrix} -\alpha_1\sin(t) & -\alpha_1\cos(t) \\ \alpha_2\cos(t) & -\alpha_2\sin(t)\end{pmatrix}=\frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1^2\sin^2(t)+\alpha_2^2\cos^2(t))^{\frac{3}{2}}}\,.$$

5. Le cercle osculateur de γ au point t est le cercle de rayon

$$R_\gamma(t) = \frac{1}{|\kappa_\gamma(t)|} = \frac{(\alpha_1^2 \sin^2(t) + \alpha_2^2 \cos^2(t))^{\frac{3}{2}}}{\alpha_1\alpha_2}$$

et centre

$$q_\gamma(t) = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa_\gamma(t)} f_2(t) = \begin{pmatrix} a_1 + \alpha_1 \cos(t) \\ a_2 + \alpha_2 \sin(t) \end{pmatrix} + \frac{(\alpha_1^2 \sin^2(t) + \alpha_2^2 \cos^2(t))^{\frac{3}{2}}}{\alpha_1\alpha_2} \frac{1}{\sqrt{\alpha_1^2 \sin^2(t) + \alpha_2^2 \cos^2(t)}} \begin{pmatrix} -\alpha_2 \cos(t) \\ -\alpha_1 \sin(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 + \alpha_1 \cos(t) \\ a_2 + \alpha_2 \sin(t) \end{pmatrix} + \frac{\alpha_1^2 \sin^2(t) + \alpha_2^2 \cos^2(t)}{\alpha_1\alpha_2} \begin{pmatrix} -\alpha_2 \cos(t) \\ -\alpha_1 \sin(t) \end{pmatrix} .$$

6. En posant $u := \cos^2(t)$ (avec $u \in [0,1]$), on obtient $\sin^2(t) = 1 - u$, donc

$$k_\gamma(t) = \frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1^2 \sin^2(t) + \alpha_2^2 \cos^2(t))^{\frac{3}{2}}} = \frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1^2(1-u) + \alpha_2^2 u)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\alpha_1\alpha_2}{(u(\alpha_2^2 - \alpha_1^2) + \alpha_1^2)^{\frac{3}{2}}} .$$

Si $\alpha_2 = \alpha_1$ (donc si E est un cercle), alors $k_\gamma(t)$ sera indépendantz de u (donc de t), donc k_γ sera une fonction constante. Dans ce cas *tout* point $t \in \mathbb{R}$ est point critique de k_γ, et la valeur (constante) de cette fonction est $\frac{1}{\alpha_1} = \frac{1}{\alpha_2}$.
Si $\alpha_2 > \alpha_1 > 0$, alors $\alpha_2^2 - \alpha_1^2 > 0$, donc le maximum de $k_\gamma(t)$ sera atteint pour $u = 0$ (soit pour $t \in \frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi$) et le minimum de $k_\gamma(t)$ sera atteint pour $u = 1$ (soit pour $t \in \mathbb{Z}\pi$). Dans ce cas les valeurs extrémales de $k_\gamma(t)$ sont $\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}$ (la valeur maximale) et $\frac{\alpha_1}{\alpha_2^2}$ (la valeur minimale).
Si $\alpha_1 > \alpha_2 > 0$, alors $\alpha_2^2 - \alpha_1^2 > 0$, donc le minimum de $k_\gamma(t)$ sera atteint pour $u = 0$ (soit pour $t \in \frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi$) et le maximum de $k_\gamma(t)$ sera atteint pour $u = 1$ (soit pour $t \in \mathbb{Z}\pi$). Dans ce cas les valeurs extrémales de $k_\gamma(t)$ sont $\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}$ (la valeur minimale) et $\frac{\alpha_1}{\alpha_2^2}$ (la valeur maximale).
Les points de E qui correspondent aux valeurs critiques sont les quatre points d'intersection de E avec les droites parallèles aux axes de coordonnées qui passent par le centre (a_1, a_2), c'est à dire les points $(a_1 \pm \alpha_1, a_2)$, $(a_1, a_2 \pm \alpha_2)$. Il s'agit donc des 4 "sommets" de l'ellipse.

Exercice 3 (**7p**) On considère la courbe gauche $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, définie par $\gamma(t) := \begin{pmatrix} \exp(t) \\ \exp(-t) \\ \sqrt{2}t \end{pmatrix}$.

1. (**1p**) Calculer $\gamma'(t)$, $\gamma''(t)$, $\gamma'''(t)$, et montrer que la courbe γ est trirégulière.
2. (**3p**) Déterminer le repère mobile de Frenet $f = (f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R} \to \mathrm{SO}(3)$ de γ.
3. (**2p**) Déterminer la courbure κ_γ et la torsion τ_γ de γ.
4. (**1p**) Déterminer le rapport $\frac{\tau_\gamma(t)}{\kappa_\gamma(t)}$ et montrer que l'application $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par $v(t) := \frac{\tau_\gamma(t)}{\kappa_\gamma(t)} f_1(t) + f_3(t)$ est constante.

Solution :

1. On a

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \exp(t) \\ -\exp(-t) \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} , \ \gamma''(t) = \begin{pmatrix} \exp(t) \\ \exp(-t) \\ 0 \end{pmatrix} , \ \gamma'''(t) = \begin{pmatrix} \exp(t) \\ -\exp(-t) \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

$$|\gamma'(t)\ \gamma''(t)\ \gamma'''(t)| = \begin{vmatrix} \exp(t) & \exp(t) & \exp(t) \\ -\exp(-t) & \exp(-t) & -\exp(-t) \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2\sqrt{2}\exp(t)\exp(-t) = -2\sqrt{2} \neq 0 ,$$

ce que montre que la famille $(\gamma'(t)\ \gamma''(t)\ \gamma'''(t))$ est libre, donc γ est trirégulière (en particulier biréguière et régulière).

2. Pour le repère mobile de Frenet $f = (f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R} \to \mathrm{SO}(3)$ de γ, on a

$$f_1(t) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|}\gamma'(t) = \frac{1}{\sqrt{2+\exp(2t)+\exp(-2t)}}\begin{pmatrix} \exp(t) \\ -\exp(-t) \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\exp(t)+\exp(-t)}\begin{pmatrix} \exp(t) \\ -\exp(-t) \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Pour le calcul du vecteur f_2 on utilise la méthode de Gram-Schmidt :

$$\langle f_1(t), \gamma''(t)\rangle = \frac{1}{\exp(t)+\exp(-t)}(\exp(2t)-\exp(-2t)) = \exp(t)-\exp(-t)\ .$$

$$\gamma''(t) - \langle f_1(t), \gamma''(t)\rangle f_1(t) = \begin{pmatrix} \exp(t) \\ \exp(-t) \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\exp(t)-\exp(-t)}{\exp(t)+\exp(-t)}\begin{pmatrix} \exp(t) \\ -\exp(-t) \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2\exp(-t)}{\exp(t)+\exp(-t)}\exp(t) \\ \frac{2\exp(t)}{\exp(t)+\exp(-t)}\exp(-t) \\ -\frac{\exp(t)-\exp(-t)}{\exp(t)+\exp(-t)}\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{\exp(t)+\exp(-t)}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ \exp(-t)-\exp(t) \end{pmatrix}$$

$$\left\|\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ \exp(-t)-\exp(t) \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{2+2+\exp(-2t)+\exp(2t)-2} = \sqrt{2+\exp(-2t)+\exp(2t)} = \exp(-t)+\exp(t)\ ,$$

donc

$$f_2(t) = \frac{1}{\|\gamma''(t) - \langle f_1(t), \gamma''(t)\rangle f_1(t)\|}\left(\gamma''(t) - \langle f_1(t), \gamma''(t)\rangle f_1(t)\right) = \frac{1}{\exp(-t)+\exp(t)}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ \exp(-t)-\exp(t) \end{pmatrix}\ .$$

Pour le 3ème vecteur du repère mobile de Frenet nous obtenons :

$$f_3(t) = f_1(t) \wedge f_2(t) = \frac{1}{(\exp(-t)+\exp(t))^2}\begin{vmatrix} \exp(t) & \sqrt{2} & e_1 \\ -\exp(-t) & \sqrt{2} & e_2 \\ \sqrt{2} & \exp(-t)-\exp(t) & e_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(\exp(-t)+\exp(t))^2}\begin{pmatrix} -\exp(-2t)-1 \\ \exp(2t)+1 \\ \sqrt{2}(\exp(t)+\exp(-t)) \end{pmatrix} = \frac{1}{(\exp(-t)+\exp(t))^2}\begin{pmatrix} -\exp(-t)(\exp(t)+\exp(-t)) \\ \exp(t)(\exp(t)+\exp(-t)) \\ \sqrt{2}(\exp(t)+\exp(-t)) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\exp(-t)+\exp(t)}\begin{pmatrix} -\exp(-t) \\ \exp(t) \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}\ .$$

Le repère mobile de Frenet de γ est donc

$$(f_1(t), f_2(t), f_3(t)) = \frac{1}{\exp(t)+\exp(-t)}\begin{pmatrix} \exp(t) & \sqrt{2} & -\exp(-t) \\ -\exp(-t) & \sqrt{2} & \exp(t) \\ \sqrt{2} & \exp(-t)-\exp(t) & \sqrt{2} \end{pmatrix}\ .$$

3. Pour la courbure κ_γ et la torsion τ_γ de γ, on a

$$f_1'(t) = -\frac{\exp(t)-\exp(-t)}{(\exp(t)+\exp(-t))^2}\begin{pmatrix} \exp(t) \\ -\exp(-t) \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{\exp(t)+\exp(-t)}\begin{pmatrix} \exp(t) \\ \exp(-t) \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{-\exp(t)+\exp(-t)}{(\exp(t)+\exp(-t))^2}\begin{pmatrix} \exp(t) \\ -\exp(-t) \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + \frac{\exp(t)+\exp(-t)}{(\exp(t)+\exp(-t))^2}\begin{pmatrix} \exp(t) \\ \exp(-t) \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(\exp(t)+\exp(-t))^2}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \sqrt{2}(\exp(-t)-\exp(t)) \end{pmatrix}$$

$$f_2'(t) = \frac{-\exp(t)+\exp(-t)}{(\exp(t)+\exp(-t))^2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ \exp(-t)-\exp(t) \end{pmatrix} + \frac{\exp(t)+\exp(-t)}{(\exp(t)+\exp(-t))^2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\exp(-t)-\exp(t) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(\exp(t)+\exp(-t))^2}\begin{pmatrix} \sqrt{2}(-\exp(t)+\exp(-t)) \\ \sqrt{2}(-\exp(t)+\exp(-t)) \\ -4 \end{pmatrix} .$$

On obtient donc

$$\kappa_\gamma(t) = \frac{1}{\|\gamma'(t))\|}\langle f_1'(t), f_2(t)\rangle = \frac{1}{(\exp(t)+\exp(-t))^4}(2\sqrt{2}+2\sqrt{2}+\sqrt{2}(\exp(-t)-\exp(t))^2)$$

$$= \frac{1}{(\exp(t)+\exp(-t))^4}(\sqrt{2}(\exp(-t)+\exp(t))^2) = \frac{\sqrt{2}}{(\exp(t)+\exp(-t))^2} ,$$

$$\tau_\gamma(t) = \frac{1}{\|\gamma'(t))\|}\langle f_2'(t), f_3(t)\rangle = \frac{1}{(\exp(t)+\exp(-t))^4}\big(\sqrt{2}(1-\exp(-2t))+\sqrt{2}(1-\exp(2t))-4\sqrt{2}\big) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{(\exp(t)+\exp(-t))^4}\big(-(\exp(t)+\exp(-t))^2\big) = -\frac{\sqrt{2}}{(\exp(t)+\exp(-t))^2}$$

4. Déterminer le rapport $\frac{\tau_\gamma(t)}{\kappa_\gamma(t)}$.

   On a évidemment $\frac{\tau_\gamma(t)}{\kappa_\gamma(t)} = -1$.

5. Montrer que l'application $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par $v(t) := \frac{\tau_\gamma(t)}{\kappa_\gamma(t)} f_1(t) + f_3(t)$ est constante.

6. On a

$$v(t) = -f_1(t) + f_3(t) = \frac{1}{\exp(t)+\exp(-t)}\begin{pmatrix} -\exp(t)-\exp(-t) \\ \exp(t)+\exp(-t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (constant par rapport à } t) .$$

Exercice 4 (6p)

Soient $\kappa_0 \in \mathbb{R}$, $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée normale telle que $\kappa_\gamma(t) = \kappa_0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R} \to M_{2,2}(\mathbb{R})$ son repère mobile de Frenet.

1. (**1p**) En utilisant les équations de Frenet montrer que f est une solution d'une equation différentielle de la forme

$$f'(t) = f(t)A ,$$

   en précisant la matrice A.

2. (**2p**) Préciser $\exp(A)$ et écrire $f(t)$ explicitement en supposant que la valeur initiale $f(0) =: B_0 \in \mathrm{SO}(2)$ est connue.

3. (**3p**) Montrer que γ est soit la paramétrisation d'un circle de rayon $\frac{1}{|\kappa_0|}$ si $\kappa_0 \neq 0$, soit la paramétrisation d'une droite si $\kappa_0 = 0$.

Solution :

1. 1. Les formules de Frenet pour une courbe normale s'écrivent
$$\begin{array}{rcl} f_1'(t) & = & \kappa_\gamma(t) f_2(t) \\ f_2'(t) & = & -\kappa_\gamma(t) f_1(t) \end{array} ,$$
donc dans notre cas on obtient
$$(f_1'(t), f_2'(t)) = (f_1(t), f_2(t))A$$
soit
$$f'(t) = f(t)A$$
où
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa_0 \\ \kappa_0 & 0 \end{pmatrix} .$$

2. On a
$$\exp(A) = \begin{pmatrix} \cos(\kappa_0) & -\sin(\kappa_0) \\ \sin(\kappa_0) & \cos(\kappa_0) \end{pmatrix},\ \exp(tA) = \begin{pmatrix} \cos(\kappa_0 t) & -\sin(\kappa_0 t) \\ \sin(\kappa_0 t) & \cos(\kappa_0 t) \end{pmatrix} ,$$
donc
$$f(t) = f(0)\exp(tA) = B_0 \begin{pmatrix} \cos(\kappa_0 t) & -\sin(\kappa_0 t) \\ \sin(\kappa_0 t) & \cos(\kappa_0 t) \end{pmatrix} .$$

3. Posons
La formule
$$(f_1(t), f_2(t)) = f(t) = B_0 \begin{pmatrix} \cos(\kappa_0 t) & -\sin(\kappa_0 t) \\ \sin(\kappa_0 t) & \cos(\kappa_0 t) \end{pmatrix}$$
montre que
$$\gamma'(t) = f_1(t) = B_0 \begin{pmatrix} \cos(\kappa_0 t) \\ \sin(\kappa_0 t) \end{pmatrix}$$
Si $\kappa_0 \neq 0$ on obtient par intégration
$$\gamma(t) = c + B_0 \begin{pmatrix} \frac{1}{\kappa_0}\sin(\kappa_0 t) \\ -\frac{1}{\kappa_0}\cos(\kappa_0 t) \end{pmatrix} = c + B_0 \begin{pmatrix} \frac{1}{\kappa_0}\cos(\kappa_0 t - \frac{\pi}{2}) \\ \frac{1}{\kappa_0}\sin(\kappa_0 t - \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} ,$$
(où $c \in \mathbb{R}^2$ est une constante) qui est l'équation paramétrique d'un cercle de centre c et de rayon $\frac{1}{|\kappa_0|}$. Si $\kappa_0 = 0$ on obtient
$$\gamma'(t) = B_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =: b_0$$
(où b_0 désigne la première colonne de B_0), donc par intégration
$$\gamma(t) = c + tb_0 ,$$
qui est l'équation paramétrique d'une droite.