**UNIVERSITÉ AIX MARSEILLE** **UFR SCIENCES**

# Licence Mathématiques 3 : Géométrie différentielle

Examen partiel du 21 mars 2018
durée : 2h
Aucun document autorisé, calculatrices et téléphones interdits.

**Exercice 1** (**6p**) (questions proches du cours)

1. (**2p**) Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée régulière. Démontrer qu'il existe un changement de variable $\varphi : J \to I$ qui préserve l'orientation tel que $\gamma \circ \varphi$ soit une courbe normale.
2. (**1p**) Écrire les équations de Frenet pour une courbe birégulière $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$.
3. (**3p**) Écrire et démontrer les formules directes pour le calcul de la courbure et de la torsion d'une courbe birégulière $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$.

**Exercice 2** (**9p**) Soit $E \subset \mathbb{R}^2$ l'ellipse d'équation $\frac{(x_1-a_1)^2}{\alpha_1^2} + \frac{(x_2-a_2)^2}{\alpha_2^2} = 1$, où $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}_+^*$.

1. (**1p**) Donner une paramétrisation régulière $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ de $E$.
2. (**2p**) Pour tout $t \in \mathbb{R}$ préciser la droite tangente $\tau_t(\gamma)$ et la droite normale $\nu_t(\gamma)$. Écrire une équation paramétrique et une équation implicite pour chacune de ces droites.
3. (**1p**) Déterminer le repère mobile de Frenet $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$ de $\gamma$ au point $t \in \mathbb{R}$.
4. (**2p**) Calculer la courbure $\kappa_\gamma(t)$ avec deux méthode différentes (en utilisant le repère mobile de Frenet et avec la formule directe).
5. (**2p**) Préciser la valeur maximale et la valeur minimale de $\kappa_\gamma(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$, et préciser les points $t \in \mathbb{R}$ où ces valeurs sont atteintes. *Indication : discussion selon les trois cas* $\alpha_1 < \alpha_2$, $\alpha_2 < \alpha_1$, $\alpha_1 = \alpha_2$.
6. (**1p**) Déterminer le rayon de courbure et le cercle osculateur de $\gamma$ au point $t$.

**Exercice 3** (**7p**) On considère la courbe gauche $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, définie par $\gamma(t) := \begin{pmatrix} \exp(t) \\ \exp(-t) \\ \sqrt{2}t \end{pmatrix}$.

1. (**1p**) Calculer $\gamma'(t)$, $\gamma''(t)$, $\gamma'''(t)$, et montrer que la courbe $\gamma$ est trirégulière.
2. (**3p**) Déterminer le repère mobile de Frenet $f = (f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R} \to \mathrm{SO}(3)$ de $\gamma$.
3. (**2p**) Déterminer la courbure $\kappa_\gamma$ et la torsion $\tau_\gamma$ de $\gamma$.
4. (**1p**) Déterminer le rapport $\frac{\tau_\gamma(t)}{\kappa_\gamma(t)}$ et montrer que l'application $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par $v(t) := \frac{\tau_\gamma(t)}{\kappa_\gamma(t)} f_1(t) + f_3(t)$ est constante.

**Exercice 4** (**6p**) Soient $\kappa_0 \in \mathbb{R}$, $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée normale telle que $\kappa_\gamma(t) = \kappa_0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R} \to M_{2,2}(\mathbb{R})$ son repère mobile de Frenet.

1. (**1p**) En utilisant les équations de Frenet montrer que $f$ est une solution d'une equation différentielle de la forme
$$f'(t) = f(t)A\,,$$
en précisant la matrice $A$.
2. (**2p**) Préciser $\exp(A)$ et écrire $f(t)$ explicitement en supposant que la valeur initiale $f(0) =: B_0 \in \mathrm{SO}(2)$ est connue.
3. (**3p**) Montrer que $\gamma$ est soit la paramétrisation d'un circle de rayon $\frac{1}{|\kappa_0|}$ si $\kappa_0 \neq 0$, soit la paramétrisation d'une droite si $\kappa_0 = 0$.