Stochastics and Stochastics Reports, Vol. 57, pp. 111–128
Reprints available directly from the publisher
Photocopying permitted by license only

EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES STOCHASTIQUES RÉTROGRADES RÉFLÉCHIES DANS UN CONVEXE

A. GEGOUT-PETIT and E. PARDOUX

L. A. T. P. URA CNRS 225, C. M. I. Université de Provence
39, rue Joliot Curie 13453 MARSEILLE Cedex 13 FRANCE

(*Received 22 July 1995; in final form 6 November 1995*)

We give an existence and uniqueness theorem for the solution of a Backward Stochastic Differential Equation reflected in a convex domain without regularity assumption on the domain. First we give sufficient conditions for the solution of a classical Backward Stochastic Equation to stay in a given convex set. We then prove that, if the solution of the reflected problem exists, it is unique and the reflection process is absolutely continuous if the convex set is somewhat regular. Finally we prove existence using a penalisation method.

KEY WORDS: Backward SDE, penalisation method, reflection.

AMS Classification: 60H05, 60H30

1 INTRODUCTION

La théorie des Equations Différentielles Stochastiques Rétrogrades (E.D.S.R.) est apparue récemment. Elle a été introduite par Pardoux-Peng [9]. Cette théorie trouve des applications en mathématiques financières (voir Duffie, Epstein [3] [4], El Karoui, Peng, Quenez [5]), pour la construction des Gamma-martingales sur les variétés (Darling [2]). Elle permet aussi de donner une interprétation probabiliste de systèmes d'équations aux dérivées partielles quasi–linéaires (Pardoux, Peng [9]). Dans le cas scalaire, N. El Karoui et al. [6] ont étudié le cas où la solution de l'E.D.S.R. est réfléchie afin de rester toujours au dessus d'un processus donné. Dans ce travail, nous étudions l'existence et l'unicité de la solution d'une E.D.S.R Réfléchie au bord d'un convexe de $\mathbb{R}^k$.

On a bien évidemment des similarités avec les diffusions classiques réfléchies dans un domaine D de $\mathbb{R}^k$. Elles ont été étudiées par exemple par Menaldi [8] et Tanaka [11] dans le cas où D est un convexe borné et par Lions et Sznitman [7] sans hypothése de convexité sur D. Cependant, comme nous le verrons plus loin, le probléme de reflexion semble plus naturel dans le cas rétrograde que dans le cas progressif et lorsque le domaine est convexe régulier, on montre que le processus de réflexion K est absolument continu.

Ce travail se présente comme suit: dans la section 2, nous rassemblons les propriétés de convexité utilisées tout au long de notre travail. A la section 3, nous donnons une condition suffisante pour que la solution d'une E.D.S.R. au sens classique reste dans un convexe donné de $\mathbb{R}^k$. A la section 4, nous donnons la définition de la solution d'une E.D.S.R. réfléchie et nous montrons que si le domaine de réflexion est régulier, le processus de réflexion est absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue. A la section 5, nous montrons l'existence d'une solution par une méthode de pénalisation.

2 PROPRIÉTÉS DE CONVEXITÉ

Soit D un domaine convexe non vide de $\mathbb{R}^k$. Nous rassemblons ici toutes les propriétés liées à la convexité de D et utilisées tout au long de notre travail.

2.1 *Projection, vecteur normal*

Notons $\pi(x)$ la projection sur D du point x de $\mathbb{R}^k$. Nous allons utiliser les propriétés de convexité suivantes (utilisées par Ménaldi [8]):

$$(x' - x)^*(x - \pi(x)) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^k \ \forall x' \in \bar{D} \tag{1}$$

$$(x' - x)^*(x - \pi(x)) \leq (x' - \pi(x'))^*(x - \pi(x)) \quad \forall x, x' \in \mathbb{R}^k \tag{2}$$

$$\exists a \in D,\ \gamma > 0 \quad \text{tel que } (x - a)^*(x - \pi(x)) \geq \gamma|x - \pi(x)| \quad \forall x \in \mathbb{R}^k \tag{3}$$

La propriété (2) découle facilement de (1) et le γ de (3) dépend de la distance de a à la frontière de D.

Vecteur normal:

Pour $x \in \partial D$, on note $\nu(x)$ l'ensemble des vecteurs normaux unitaires sortant de D au point x. Par abus de notation, si $x \notin D$, on note $\nu(x) = \nu(\pi(x))$ et lorsque le domaine D est régulier (et donc que le vecteur normal est unique), on note celui–ci $\nu(x)$.

Nous montrons aussi le résultat suivant qui nous servira à donner un critère de minimalité pour le processus de réflexion de l'E.D.S.R. réfléchie:

LEMME 2.1 *Soit y_t une fonction continue de $[0, T]$ à valeurs dans $\bar{D}$ et k_t une fonction à variation bornée de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}^k$ qui vérifient pour tout z_t continu et à valeurs dans $\bar{D}$:*

$$\int_0^T (y_t - z_t)^* dk_t \leq 0 \tag{4}$$

alors nous avons: $\int_0^T \mathbf{1}_{\{y_t \in D\}} dk_t = 0$ et il existe une fonction v_t à valeurs dans $\mathbb{R}^K$ tel que $k_t = \int_0^t v_s d|k|_s$ avec $-v_s \in \nu(y_s)$.

DÉMONSTRATION DU LEMME 2.1 Supposons qu'il existe $t_0 \in [0, T]$ tel que $y_{t_0} \in D$. Fixons w un vecteur non nul de $\mathbb{R}^k$. Alors par continuité de y_t, il existe $\varepsilon > 0$ et $h > 0$ tel que simultanément $y_t + \varepsilon w \in D$ et $y_t - \varepsilon w \in D$ $\forall t \in [t_0, t_0 + h]$ D'après (4), nous avons donc $0 \leq \int_{t_0}^{t_0+h} w^* dk_t \leq 0$ ce qui entraîne la première partie de la propriété.

Nous savons donc maintenant que $k_t = \int_0^t v_s \mathbf{1}_{\{y_s \in \partial D\}} d|k|_s$, où v_s est un vecteur unitaire, pour montrer que v_s est normal rentrant à D en y_s, il suffit que pour $y \in \partial D$, si v vérifie $(y-z)^* v \leq 0 \ \forall z \in D$, alors $\frac{-v}{\|v\|} \in \nu(y)$

En effet, soit le point x définit par: $y - x = v$ alors

$$\forall z \in D, \quad |x-z|^2 = |x-y|^2 + |y-z|^2 + 2(x-y)^*(y-z)$$

On en déduit que $\forall z \in D, |x-z|^2 \geq |x-y|^2$ ce qui impliqe $y = \pi(x)$. On obtient le résultat.

2.2 *Approximation de D*

Nous aurons besoin ci-dessous de la distance d'un processus au domaine convexe D. Comme D n'est pas régulier, nous allons approcher D par une suite de convexes réguliers qui tendent uniformément vers D. En effet, prenons la fonction $h(x) = d(x, D)$. h est convexe et uniformément continue sur tout $\mathbb{R}^k$. Or, si $(g_\delta)_{0<\delta\leq\delta_0}$ est une approximation de l'unité à support compact dont le support est inclus dans la boule de centre 0 et de rayon δ, alors la suite $h_\delta = g_\delta * h$ est une suite de fonctions réguliéres convexes qui tendent uniformément vers h quand δ tend vers 0. Pour $\eta > 0$ fixé, les ensembles $\{x, h_\delta(x) < \eta\}$ sont des domaines convexes réguliers qui convergent uniformément vers $\{x, d(x,D) < \eta\}$ quand δ tend vers 0. En faisant tendre η vers 0, on voit alors que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un convexe régulier D_ε tel que

$$\sup_{x \in D} d(x, D_\varepsilon) < \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \sup_{x \in D_\varepsilon} d(x, D) < \varepsilon \tag{5}$$

Pour un tel D_ε qui approche D, nous pourrons utiliser le

LEMME 2.2 *Si D_ε est un convexe qui vérifie (5), alors $\exists c > 0$ tel que $\forall \varepsilon < 1$, $\forall x \in \mathbb{R}^k$:*

$$|\pi(x) - \pi_\varepsilon(x)| < c\sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon d(x, D_\varepsilon)} \quad \textit{et} \quad |\pi(x) - \pi_\varepsilon(x)| < c\sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon d(x, D)}$$

où $\pi_\varepsilon(x)$ est la projection de x sur le convexe D_ε.

De ce lemme, on déduit immédiatemment le

COROLLAIRE 2.3

$$\exists c > 0 \text{ tel que } \forall \varepsilon < 1, \forall x \in \mathbb{R}^k \ |\pi(x) - \pi_\varepsilon(x)| < c\sqrt{\varepsilon}(1 + d(x, D_\varepsilon))$$

$$\exists c > 0 \text{ tel que } \forall \varepsilon < 1, \forall x \in \mathbb{R}^k : \ |\pi(x) - \pi_\varepsilon(x)|\mathbf{1}_{\{d(x,D_\varepsilon)>\varepsilon)\}}$$
$$< c\sqrt{\varepsilon}\sqrt{d(x, D_\varepsilon)}\mathbf{1}_{\{d(x,D_\varepsilon)>\varepsilon)\}}$$

DÉMONSTRATION DU LEMME 2.2 Si $x \in \bar{D} \cup \bar{D}_\varepsilon$ la démonstration est immédiate. Sinon, comme D_ε et D ont des propriétés symétriques l'un par rapport à l'autre, on peut supposer $d(x, D) \leq d(x, D_\varepsilon)$, et l'on a alors que $\pi(x) \notin D_\varepsilon$.

La projection de $\pi(x)$ sur D_ε vérifie en outre: $|\pi_\varepsilon(\pi(x)) - \pi(x)| \leq \varepsilon$ ce qui entraîne:

$$|\pi_\varepsilon(x) - x| \leq |\pi_\varepsilon(\pi(x)) - x| \leq d(x, D) + \varepsilon$$

Nous avons d'autre part que: $(\pi_\varepsilon(\pi(x)) - x)^*(x - \pi(x)) \leq \varepsilon d(x, D) - d^2(x, D)$. On déduit de ces trois inégalités:

$$\begin{aligned}|\pi_\varepsilon(x) - \pi(x)|^2 &\leq |\pi_\varepsilon(x) - x|^2 + |x - \pi(x)|^2 + 2(\pi_\varepsilon(x) - x)^*(x - \pi(x)) \\ &\leq |\pi_\varepsilon(x) - x|^2 + |x - \pi(x)|^2 \\ &\quad + 2(\pi_\varepsilon(x) - \pi_\varepsilon(\pi(x)))^*(x - \pi(x)) + 2(\pi_\varepsilon(\pi(x)) - x)^*(x - \pi(x)) \\ &\leq d^2(x, D_\varepsilon) + d^2(x, D) + 2\varepsilon d(x, D) + 2\varepsilon d(x, D) - 2d^2(x, D) \\ &\leq 6\varepsilon d(x, D) + \varepsilon^2\end{aligned}$$

Comme D_ε a été choisi tel que: $|d(x, D_\varepsilon) - d(x, D)| < \varepsilon$, on en déduit les deux inégalités du lemme. □

2.3 *Fonction distance au convexe D, Formules d'Itô associées*

Bien entendu, lorsque D est convexe, la fonction $x \to d(x, D)$, de $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, est une fonction convexe. Nous pouvons donc lui appliquer le résultat de Bouleau [1] qui donne une formule d'Itô pour les fonctions convexes.

THÉORÈME 2.4 *Pour toute section borélienne F° du sous–différentiel de F et pour toute semi martingale continue*[1] *Y à valeur dans $\mathbb{R}^d$, on a*

$$d(Y_t, D) = F(Y_0) + \int_0^t (d^0(Y_s, D))^* dY_s + C_t \tag{6}$$

où $C_t = C_t(d, d^\circ, Y)$ est un processus croissant continu.

On rappelle que si l'on note $\delta d(y)$, le sous-différentiel de la fonction convexe d au point y alors:

$$\delta d(y) = \{\zeta \in \mathbb{R}^d, \forall z \in \mathbb{R}^d, \quad (z - y)^* \zeta \leq d(z) - d(y)\}$$

Bien entendu cette fonction est identiquement nulle lorsque $y \in D$. Pour $y \notin D$, la définition du sous-différentiel nous montre que si $\zeta \in \delta d(y)$, alors ζ est un vecteur normal sortant en $\pi(y)$ et $|\zeta| \leq 1$.

2.4 *Différentielles lorsque D est C^2*

Posons maintenant $\varphi(x) \stackrel{\Delta}{=} (d, (x, D))^2 = |x - \pi(x)|^2$. Si D est convexe, cette fonction est convexe. Si D est un domaine régulier, la fonction φ est deux fois différentiable

[1] dans [1] le résultat est étendu aux semi-martingales discontinues

sur le complémentaire de D. Nous avons:

$$\forall x \notin D \quad \nabla\varphi(x) = 2(x - \pi(x)) \tag{7}$$

De cette expression du gradient ∇, il s' ensuit que dans une base orthogonale de $\mathbb{R}^k$, dont le premier vecteur est le vecteur normal unitaire $\nu(x)$ (la base dépend donc de x), la matrice hessienne Hess $\varphi(x)$ est de la forme:

$$Hess\,\varphi(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & (\mathbf{M}) & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Le premier terme $a_{11} = 2$ s'obtient sans problème à partir de l'expression du ∇ et la "sous-matrice" M est semi-définie positive car la convexité de φ est équivalente à la positivité de sa différentielle seconde. On en déduit

$$\forall z \in \mathbb{R}^{k\times d} \quad \text{trace}\ [zz^* Hess\ \varphi(x)] \geq 0 \tag{8}$$

La positivité de Hess et l'équivalence des normes donnent aussi

$$\begin{aligned} |z\nu^*(x)|^2 &\leq C\frac{1}{2}\text{trace}\left[zz^*\begin{pmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & (0) & \\ 0 & & & \end{pmatrix}\right] \\ &\leq C\,\text{trace}[zz^* Hess\varphi(x)] \end{aligned} \tag{9}$$

Formule d'Itô classique
Nous utiliserons la formule d'Itô pour la fonction $\varphi(Y_t)$ où Y_t est une semimartingale. Or la dérivée seconde de φ n'est pas continue à la frontière de D. Cependant, comme le domaine D est supposé ici régulier, alors il existe un voisinage V de ∂D tel que, pour $x \in V \cap \bar{D}$, il existe un couple unique $(\zeta, t) \in (\partial D, \mathbb{R}^+)$ qui vérifie $x = \zeta + t\nu(\zeta)$ (Lions, Sznitman [7]). Cette propriété est bien sûr vraie pour $x \in \mathbb{R}^k \backslash D$ où $x = \pi(x) + d(x, D)\nu(x)$. On alors $\zeta = \pi(x)$ et $t = d(x, D)$.

Prenons ϕ une fonction de $\mathscr{C}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ telle que:

$$\begin{cases} \phi(x) = t & \text{si } x \in (\mathbb{R}^k \backslash D) \cup (V \cap \bar{D}) \\ \phi(x) < 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{10}$$

$\bar{D}$ et la frontière ∂D sont caractérisés par ϕ:

$$D = \{x \in \mathbb{R}^k,\ \phi(x) < 0\} \quad \partial D = \{x \in \mathbb{R}^k, \phi(x) = 0\}$$

On a alors que $\varphi(Y_t) = (\phi(Y_t)^{+})^2$. Si Y_t est une semimartingale telle que $dY_t = f_t dt + \sigma_t dB_t$($B$ est un brownien), en approchant la fonction $g(x) = (x^+)^2$ par une suite $(g_n)_{n\geq 0}$ croissante de fonctions $\mathscr{C}$, on voit que l'on peut aussi écrire une formule d'Itô pour $\varphi(Y_t) = f(\phi(Y_t))$:

$$d\varphi(Y_s) = (\nabla\varphi(Y_s))^*[f_s ds + \sigma_s dB_s] + \frac{1}{2}\operatorname{trace}[\sigma_s\sigma_s^* \text{Hess } \varphi(Y_s)] 1_{\{Y_s \notin D\}} ds \tag{11}$$

3 EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES STOCHASTIQUES RÉTROGRADES

Soit $\{B_t, 0 \leq t \leq T\}$ un mouvement brownien de dimension l défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, P)$. On note $(\mathscr{F}_t, 0 \leq t \leq T)$ la filtration naturelle de B_t complétée par les ensembles de mesure nulle de $\mathscr{F}$.

Si $z \in \mathbb{R}^{k\times l}$, alors $|z|^2 = \operatorname{trace}(z^* z)$. Si k est une fonction de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}^k$, alors $||k||_{VT}$ désigne la variation totale de k, $||k||_{VT} = \int_0^T d|k|_s$.

Dans toute la suite de ce travail, il est bien entendu que la notation C utilisée dans les majorations désigne une constante finie dont la valeur peut varier de ligne en ligne.

3.1 Définition

On se donne les objets suivants:

– une variable aléatoire terminale ξ de $L^2(\Omega, \mathscr{F}_T, P, \mathbb{R}^k)$

– une fonction $f : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times l} \to \mathbb{R}^k$ telle que:

(i) $\forall (y, z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times l}, (\omega, t) \to f(\omega, t, y, z)$ est $\mathscr{F}_t$-progressivement mesurable

(ii) $E\int_0^T |f(t, 0, 0)|^2 dt < \infty$

(iii) pour $\forall \omega \in \Omega,\ \forall t \in [0, T],\ \forall y, y' \in \mathbb{R}^k, z, z' \in \mathbb{R}^{k\times l}$

$$|f(t, y, z) - f(t, y', z')| \leq k(|y - y'| + |z - z'|)$$

On appelle solution de l'Equation Différentielle Stochastique Rétrograde (E.D.S.R.) associée à (ξ, f) tout couple $\{(Y_t, Z_t), 0 \leq t \leq T\}$ de processus $\mathscr{F}_t$-progressivement mesurables à valeurs $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times l}$ et qui vérifie:

$$E\left[\int_0^T |Z_t|^2 dt\right] < \infty \tag{12}$$

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dB_s \quad 0 \leq t \leq T \tag{13}$$

Pardoux–Peng [10] ont montré l'existence et l'unicité de la solution de cette E.D.S.R. et cette solution vérifie en outre (voir [6]):

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t|^2\right] < \infty \tag{14}$$

3.2 Cas où la solution reste dans le convexe D

Lorsque ζ appartient presque sûrement à l'adhérence d'un domaine convexe D de $\mathbb{R}^k$, on peut se poser le prolème de savoir s'il existe des cas où la solution de (12) reste dans $\bar{D}$. C'est le cas exemple lorsque f est la fonction nulle. En effet, l'E.D.S.R. (12) devient

$$Y_t = \xi - \int_t^T Z_s \, ds$$

et l'existence d'une solution est obtenue par le théorème de représentation. En effet, il existe un processus $(Z_t)_{(0 \leq t \leq T)} \mathscr{F}_t$-progressivement mesurable qui vérifie:

$$Y_t = E[\xi/\mathscr{F}_t] = E[\xi] + \int_0^t Z_s \, dB_s$$

Or, si $\xi \in \bar{D}$ p.s. et si l'on prend la fonction convexe $\varphi = d^2(x, D)$, alors $\bar{D} = \{x; \varphi(x) = 0\}$, et par l'inégalité de Jensen appliquée à la fonction φ on trouve que la solution Y_t de l' E.D.S.R. reste dans $\bar{D}$ presque sûrement. Plus généralement, nous allons montrer que si $f(t, y, z)$ est "rentrante" dès que $y \notin \bar{D}$, alors la solution de l'E.D.S.R. associée à $\xi \in \bar{D}$ et f, reste dans D presque sûrement.

Lemme 3.1 *Soit D un domaine convexe de $\mathbb{R}^k$, on suppose que le couple (ξ, f) satisfait les hypothéses (i), (ii), (iii) et que $\xi \in \bar{D}$. De plus, on suppose que*

$$\forall y \notin D,\ \forall 0 \leq t \leq T,\ \forall z \in \mathbb{R}^{k \times d} \quad \forall v \in \nu(y),\ v^* f(t, y, z) \leq 0$$

alors la solution (Y, Z) de l'E.D.S.R. (13) vérifie $\forall t \in [0, T]$, $Y_t \in \bar{D}$ p.s..

Démonstration: La démonstration se déduit immédiatement de la formule d'Itô pour $d(Y_t, D)$ (voir paragraphe 2.3) écrite dans le sens rétrograde. □

Remarque 3.2 Lorsque la fonction f est nulle, nous venons de voir que la solution d'une E.D.S.R. reste naturellemnt dans un convexe. Ce n'est donc pas le terme en intégrale stochastique qui va faire sortir la solution du convexe mais le terme $\int f(\ldots) ds$.

Lorsque f risque de faire sortir le processus Y_t de D, nous allons contraindre Y à rester dans D en le réfléchissant sur la frontière de D.

4 EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES STOCHASTIQUES RÉTROGRADES RÉFLÉCHIES

4.1 Définition

On se donne
- une variable aléatoire terminale ξ de $L^2(\Omega, \mathscr{F}_T, P, \mathbb{R}^k)$
- un domaine D de $\mathbb{R}^k$ convexe tel que $\xi \in \bar{D}$ p.s.

– une fonction $f : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{K\times l} \to \mathbb{R}^k$ qui vérifie les propriétés (i), (ii), (iii) du paragraphe 3.1

On se pose le problème de l'existence et de l'unicité de la solution de l'Equation Différentielle Stochastique Rétrograde Réfléchie (E.D.S.R.R), c'est-à-dire de l' existence et l'unicité d'un triplet $\mathcal{F}_t$-progressivement mesurable $\{(Y_t, Z_t, K_t), 0 \leq t \leq T\}$ de processus à valeurs dans $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times l} \times \mathbb{R}^k$ et qui vérifie:

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t|^2\right] < \infty \tag{15}$$

$$E\int_0^T |Z_t|^2 dt < \infty, \tag{16}$$

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)ds + K_T - K_t - \int_t^T Z_s dB_s \quad 0 \leq t \leq T \tag{17}$$

$$Y_t \in \bar{D}, \quad 0 \leq t \leq T \tag{18}$$

K_t est continu, $K_0 = 0$, et pour tout processus continu et progressivement z_t

$$\text{mesurable a valeurs dans } \bar{D} \int_0^T (Y_t - z_t)^* dK_t \leq 0 \tag{19}$$

L' hypothèse (19) nous assure que K est minimal dans le sens où il ne croît que lorsque Y est à la frontière de D et que lorsqu'il croît, il est normal rentrant à D en Y. En effet, l'intégrale $\int_0^T (Y_t - z_t)^* dK_t \leq 0$ est une intégrale de Stieljes. On peut donc raisonner ω par ω et l'on conclut avec le lemme 2.1.

Les hypothèses d'intégrabilité (15) et (16) permettent de montrer facilement que le processus de reflexion K_t vérifie: $E[\sup_{0\leq t\leq T}]|K_t|^2] < \infty$ et elles assurent l'unicité de la solution:

Lemme 4.1 *Sous les hypothèses* (15)(16)(18)(19), *il existe au plus une solution à l'équation (17).*

Démonstration Supposons que (Y^1, Z^1, K^1) et (Y^2, Z^2, K^2) soient deux solutions à l'E.D.S.R.R, par la formule d'Itô, nous avons:

$$\begin{aligned}
&|Y_t^1 - Y_t^2|^2 + \int_t^T |Z_s^1 - Z_s^2|^2 ds \\
&= 2\int_t^T (Y_s^1 - Y_s^2)^* (f(s, Y_s^1, Z_s^1) - f(s, Y_s^2, Z_s^2))ds \\
&\quad + 2\int_t^T (T_s^1 - Y_s^2)(Z_s^1 - Z_s^2)dB_s + 2\int_t^T (Y_s^1 - Y_s^2)^* (dK_s^1 - dK_s^2)
\end{aligned}$$

D'après la propriété (19), la dernière intégrale du membre de droite est négative presque sûrement. D'après (15) et (16), l'espérance de l'intégrale stochastique est nulle. En utilisant le caractère lipschitz de la fonction f, on obtient $\forall\alpha > 0$:

$$E|Y_t^1 - Y_t^2|^2 + E\int_t^T |Z_s^1 - Z_s^2|^2 ds \leq CE\int_t^T \left(\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)|Y_s^1 - Y_s^2|^2 + \alpha|Z_s^1 - Z_s^2|^2\right)ds$$

Pour α bien choisi, on peut conclure avec le lemme de Gronwall. □

D'après la remarque heuristique 3.2, le processus K_t ne contre que le terme $\int_0^t f(s, Y_s, Z_s)ds$. On s'attend donc à ce que K_t soit plus régulier que dans le cas progressif.

4.2 *Absolue continuité du processus K_t lorsque D est $\mathscr{C}^2$*

THÉORÈME 4.2 *Si D est un domaine convexe C^2 et s'il existe une solution à l'E.D.S.R.R. (17) satisfaisant (15), (16), (18) et (19), alors le processus K est absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue.*

DÉMONSTRATION Dans cette section, nous supposons que le domaine D est régulier. Si l'on pose $\psi(x) = -\phi(x)$, où $\phi(x)$ a été définie en (10), alors $\bar{D}$ et la frontière ∂D sont caractérisés par ψ:

$$D = \{x \in \mathbb{R}^k,\ \psi(x) > 0\} \quad \partial D = \{x \in \mathbb{R}^k, \psi(x) = 0\}$$

On écrit la formule d'Itô pour $\psi(Y_t)$:

$$\psi(Y_t) + \frac{1}{2}\int_t^T \mathrm{trace}\big[Z_s Z_s^* \ \mathrm{Hess}\,\psi(Y_s)\big]ds$$

$$= \psi(\xi) + \int_t^T (\nabla\psi(Y_s))^* f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T (\nabla\psi(Y_s))^* Z_s dB_s + \int_t^T (\nabla\psi(Y_s))^* dK_s \tag{20}$$

Si l'on note $(L_t)_{(0\leq t\leq T)}$ le temps local en 0 de la semi-martingale $\psi(Y_t)$, la formule d'Itô-Tanaka nous donne:

$$\psi^+(Y_t) + \frac{1}{2}\int_t^T \mathrm{trace}[Z_s Z_s^* Hess\ \psi(Y_s)]1_{\{\psi(Y_s)>0\}}ds + \frac{1}{2}(L_T^0 - L_t^0)$$

$$= \psi(\xi) + \int_t^T (\nabla\psi(Y_s))^* f(s, Y_s, Z_s)1_{\{\psi(Y_s)>0\}}ds - \int_t^T (\nabla\psi(Y_s))^* Z_s 1_{\{\psi(Y_s)>0\}}dB_s$$

$$+ \int_t^T (\nabla\psi(Y_s))^* \underbrace{1_{\{\psi(Y_s)>0\}}dK_s}_{=0}$$

Or, $\psi(Y_t) = \psi^+(y_t)$. En faisant la différence entre (20) et (21) et en identifiant partie martingale et partie à variation borné e, on obtient:

$$\int_t^T (\nabla\psi(Y_s))^* Z_s 1_{\{\psi(Y_s)=0\}} dB_s = 0$$

$$\frac{1}{2}\int_t^T \operatorname{trace}[Z_s Z_s^* \text{ Hess } \psi(Y_s)] 1_{\{\psi(Y_s)=0\}} ds - \int_t^T (\nabla\psi(Y_s))^* f(s, Y_s, Z_s) 1_{\{\psi(Y_s)=0\}} ds$$

$$= \frac{1}{2}(L_T^0 - L_t^0) + \int_t^T d|K|_s \tag{22}$$

On voit que les deux membres de droites de (22) sont tout deux des processus décroissants en t et que leur somme est absolument continue. On en déduit que le processus K_t est absolument continu[2]. □

5 APPROXIMATION PAR PÉNALISATION

Nous allons maintenant montrer l'existence d'une solution de l'E.D.S.R.R. par une méthode de pénalisation. Considérons le couple (Y_t^n, Z_t^n) solution de l'E.D.S.R. au sens classique:

$$Y_t^n = \xi + \int_t^T f(s, Y_s^n, Z_s^n) ds - n\int_t^T (Y_s^n - \pi(Y_s^n)) ds - \int_t^T Z_s^n dB_s \quad 0 \le t \le T \tag{23}$$

On note

$$K_0^n = 0 \quad K_T^n - K_t^n = -n\int_t^T (Y_s^n - \pi(Y_s^n)) ds$$

Le terme K^n va pénaliser la solution lorsqu'elle sort de D et la contraindre de plus en plus fortement à rentrer dans D. On va montrer que le triplet (Y^n, Z^n, K^n) converge quand n tend vers l'infini vers la solution de (17).

Remarque 5.1 D'après la théorie des E.D.S Rétrogrades au sens classique, nous avons

$$\forall n \ge 0, \quad \exists C_n, \quad \text{tel que } E\left[\sup_{0\le t\le T} |Y_t^n|^2\right] \le C_n$$

[2]Nous avons aussi montré que le temps local de $\psi(Y_t)$ en 0 est absolument continu.

5.1 Estimations a priori

Avant de montrer la convergence de la suite, nous allons établir des estimations uniformes en n sur les processus (Y^n, Z^n, K^n).

Prenons a le point de D qui vérifie la condition (3). Alors par la formule d'Itô on a

$$|Y_t^n - a|^2 + \int_t^T |Z_s^n|^2 ds = |\xi - a|^2 + 2\int_t^T (Y_s^n - a)^* f(s, Y_s^n, Z_s^n) ds$$
$$- 2\int_t^T (Y_s^n - a)^* Z_s^n dB_s$$
$$- 2n\int_t^T \underbrace{(Y_s^n - a)^*(Y_s^n - \pi(Y_s^n))}_{\geq 0 \text{ grace } a(3)} ds \tag{24}$$

Compte tenu de (12) et de la remarque 5.1 l'espérance de l'intégrale stochastique est nulle et nous avons $\forall \alpha > 0$:

$$E\left[|Y_t^n - a|^2\right] + E\left[\int_t^T |Z_s^n|^2\right]$$
$$\leq C\left(1 + E\left[\int_t^T \left(|f(s,a,0)|^2 + |Y_s^n - a|^2 + \frac{\alpha}{2}|Y_s^n - a|^2 + \frac{1}{2\alpha}|Z_s^n|^2\right) ds\right]\right) \tag{25}$$

Si $\frac{C}{2\alpha} < \frac{1}{2}$, on obtient: $E[|Y_t^n - a|^2] + \frac{1}{2}E[\int_t^T |Z_s^n|^2] \leq C(1 + E[\int_t^T |Y_s^n - a|^2 ds])$. Et d'après le lemme de Gronwall: $\sup_{0\leq t\leq T} E[|Y_t^n - a|^2] \leq Ce^{CT}$, où C est une constante indépendante de n. On en déduit:

$$\sup_{0\leq t\leq T} E\left[|Y_t^n|^2\right] < C(T) \quad \text{et } E\left[\int_0^T |Z_s^n|^2 ds\right] < C(T) \tag{26}$$

Compte tenu de ces estimations, lorsque l'on prend le sup dans l'équation (24), par l'inégalité de Burkholder–Davis–Gundy, on obtient

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t^n - a|^2\right] < C(T) \quad \textit{et} \quad E\left[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t^n|^2\right] < C(T) \tag{27}$$

Or, la propriété (3) et l'équation (24) nous donnent:

$$2n\int_t^T \gamma\, |Y_s^n - \pi(Y_s^n)| ds \leq |\xi - a|^2 + 2\int_t^T (Y_s^n - a)^* f(s, Y_s^n, Z_s^n) ds$$
$$- 2\int_t^T (Y_s^n - a)^* Z_s^n dB_s, \tag{28}$$

et $n\int_t^T |Y_s^n - \pi(Y_s^n)|ds = \int_t^T d|K^n|_s$. Les estimations précédentes nous permettent donc d'obtenir:

LEMME 5.2 *La variation totale de K_n est bornée dans L^1 par une constante indépendante de n*

$$E\left[\, \|K^n\|_{VT}\right] = E\left[n\int_0^T |Y_s^n - \pi(Y_s^n)|ds\right] \leq C \quad \forall n \geq 0 \tag{29}$$

5.2 *Convergence de la suite (Y^n, Z^n, K^n)*

Nous allons tout d'abord montrer que la distance de Y^n à D tend vers 0.

LEMME 5.3 *Quand n tend vers l'infini la distance de Y^n a D tend vers 0 de la manière suivante:*

$$\exists C > 0 \text{ tel que} \qquad E\left[\sup_{0\leq t\leq T}(d(Y_t^n, D))^2\right] \leq \frac{C}{n} \tag{30}$$

DÉMONSTRATION Pour montrer la convergence (30), nous allons utiliser la suite D_ε de convexes réguliers qui tendent vers D (voir (5)). Dans la suite, on notera $\varphi_\varepsilon(x) = d(x, D_\varepsilon)$.

LEMME 5.4

$$\exists \varepsilon_0 > 0,\ \exists C > 0 \text{ tel que } \forall \varepsilon < \varepsilon_0, \forall_n\ E\left[\sup_{0\leq t\leq T}(d(Y_t^n, D_\varepsilon))^2\right] \leq C\left(\frac{1}{n} + \varepsilon + n\varepsilon^2\right)$$

Supposons un instant ce lemme démontré. Comme D_ε a été choisi tel que $|d(x,D) - d(x, D_\varepsilon)| < \varepsilon$, alors $d^2(Y_n, D) \leq 2(d^2(Y_n, D_\varepsilon) + \varepsilon^2)$ et si l'on fait tendre ε vers 0, le lemme 5.3 est démontré. □

DÉMONSTRATION DU LEMME 5.4 *On écrit la formule d'Itô pour* $\varphi_\varepsilon(Y_t^n) = d^2(Y_t^n, D_\varepsilon)$:

$$\begin{aligned}
&\varphi_\varepsilon(Y_t^n) + \frac{1}{2}\int_t^T \text{trace } [Z_s^n Z_s^{n\,*} \text{Hess } \varphi_\varepsilon(Y_s^n)]ds \\
&= \varphi_\varepsilon(\xi) + \int_t^T (\nabla\varphi_\varepsilon(Y_s^n))^* f(s, Y_s^n, Z_s^n)ds - \int_t^T (\nabla\varphi_\varepsilon(Y_s^n))^* Z_s^n dB_s \\
&\quad - 2n\int_t^T (Y_s^n - \pi_\varepsilon(Y_s^n))^*(Y_s^n - \pi(Y_s^n))ds
\end{aligned} \tag{31}$$

Premièrement, comme $\xi \in D$ p.s. et compte tenu de la définition de D_ε par rapport à D (cf (5)) on a $\varphi_\varepsilon(\xi) < \varepsilon^2$ p.s..

D'autre part, comme nous sommes obligés ici de travailler avec une approximation de D, le dernier terme de cette expression n'est pas clairement négatif.

Cependant, comme nous l'avons vu au lemme 2.2, pour tout point x, la distance $|\pi(x)-\pi_\varepsilon(x)|$ est petite. Nous utilisons cette propriété ci–dessous en appliquant les résultats du corollaire 2.3:

$$\begin{aligned}
&-2n\int_t^T (Y_s^n-\pi_\varepsilon(Y_s^n))^*(Y_s^n-\pi(Y_s^n))ds\\
&=-2n\int_t^T (Y_s^n-\pi_\varepsilon(Y_s^n))^*(Y_s^n-\pi(Y_s^n))\mathbf{1}_{\{d(Y_s^n,D_\varepsilon)<\varepsilon\}}ds\\
&\quad-2n\int_t^T (Y_s^n-\pi_\varepsilon(Y_s^n))^*(Y_s^n-\pi_\varepsilon(Y_s^n))\mathbf{1}_{\{d(Y_s^n,D_\varepsilon)>\varepsilon\}}ds\\
&\quad-2n\int_t^T (Y_s^n-\pi_\varepsilon(Y_s^n))^*(\pi_\varepsilon(Y_s^n)-\pi(Y_s^n))\mathbf{1}_{\{d(Y_s^n,D_\varepsilon)>\varepsilon\}}ds\\
&\le C2n\varepsilon^2-2n\int_t^T d^2(Y_s^n,D_\varepsilon)\mathbf{1}_{\{d(Y_s^n,D_\varepsilon)>\varepsilon)\}}ds\\
&\quad+2n\int_t^T c\sqrt{\varepsilon}d^{\frac{3}{2}}(Y_s^n,D_\varepsilon)\mathbf{1}_{\{d(Y_s^n,D_\varepsilon)>\varepsilon)\}}ds \quad \text{corollaire(2.3))}\\
&\le Cn\varepsilon^2-n\int_t^T d^2(Y_s^n,D_\varepsilon)\mathbf{1}_{\{d(Y_s^n,D_\varepsilon)>\varepsilon)\}}ds
\end{aligned}\tag{32}$$

C ne dépend ni de ε ni de n. (On a utilisé $ab\le\frac{3a^{\frac{4}{3}}}{4}+\frac{b^4}{4}$ pour $a=(\frac{2}{3})^{\frac{3}{4}}(d(Y_s^n,D\varepsilon))^{\frac{3}{2}})$.

Compte tenu de ces estimations, d'après l' équation (31) nous avons que presque sûrement:

$$\begin{aligned}
&\varphi_\varepsilon(Y_t^n)+\frac{1}{2}\int_t^T \text{trace } [Z_s^nZ_s^{n\,*}Hess\ \varphi_\varepsilon(Y_s^n)]ds+n\int_t^T \varphi_\varepsilon(Y_s^n)\mathbf{1}_{\{d(Y_s^n,D_\varepsilon)>\varepsilon\}}ds\\
&\le\varepsilon+2\int_t^T(\varphi_\varepsilon(Y_s^n))^{\frac{1}{2}}|f(s,Y_s^n,Z_s^n)|ds-2\int_t^T(Y_s^n-\pi_\varepsilon(Y_s^n))^*Z_s^ndB_s+Cn\varepsilon^2
\end{aligned}$$

On utilise maintenant la propriètè $\forall a>0,b>0\quad 2ab\le a^2+b^2$, avec $a=\sqrt{\frac{n}{2}\varphi_\varepsilon(Y_s^n)}$:

$$\begin{aligned}
(\varphi_\varepsilon(Y_s^n))^{\frac{1}{2}}|f(s,Y_s^n,Z_s^n)|\mathbf{1}_{\{d(Y_s^n,D_\varepsilon)>\varepsilon)\}}&\le\frac{n}{4}\varphi_\varepsilon(Y_s^n)\mathbf{1}_{\{d(Y_s^n,D_\varepsilon)>\varepsilon)\}}\\
&\quad+\frac{1}{n}|f(s,Y_s^n,Z_s^n)|^2\mathbf{1}_{\{d(Y_s^n,D_\varepsilon)\varepsilon)\}ds}
\end{aligned}$$

De la même manière:

$$(\varphi_\varepsilon(Y_s^n))^{\frac{1}{2}}|f(s,Y_s^n,Z_s^n)|1_{\{d(Y_s^n,D_\varepsilon)>\varepsilon\}}\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}|f(s,Y_s^n,Z_s^n)|^2\tag{33}$$

$$\begin{aligned}
&\varphi_\varepsilon(Y_t^n)+\frac{1}{2}\int_t^T \text{trace } [Z_s^nZ_s^n * \text{Hess } \varphi_\varepsilon(Y_s^n)]ds+\frac{n}{2}\int_t^T\varphi_\varepsilon(Y_s^n)\mathbf{1}_{\{d(Y_s^n,D_\varepsilon)>\varepsilon\}}ds\\
&\le 2\int_t^T\left(\frac{1}{n}+\varepsilon\right)|f(s,Y_s^n,Z_s^n)|^2ds-2\int_t^T(Y_s^n-\pi_\varepsilon(Y_s^n))^*Z_s^ndB_s+C(\varepsilon+n\varepsilon^2)
\end{aligned}\tag{34}$$

ce qui donne en prenant l'espèrance et en utilisant le caractère lipschitz de f ((iii)) et les propriétés (26):

$$E[\varphi_\varepsilon(Y_t^n)] + \frac{1}{2}E\int_t^T \operatorname{trace}[Z_s^n Z_s^{n*} \operatorname{Hess} \varphi_\varepsilon(Y_s^n)]ds + \frac{n}{2}E\int_t^T \varphi_\varepsilon(Y_s^n)\mathbf{1}_{\{d(Y_s^n, D_\varepsilon)>\varepsilon)\}}ds \leq C\left(\frac{1}{n} + \varepsilon + n\varepsilon^2\right) \tag{35}$$

La constante C ne dépend ni de ε, ni de n. Comme Hess $\varphi_\varepsilon(Y_s^n)$ est une forme dèfinie positive (propriété (8)), nous avons: $\sup_{0\leq t\leq T} E[\varphi_\varepsilon(Y_t^n)] \leq C(\frac{1}{n} + \varepsilon + n\varepsilon^2)$ et, grâce à (9), nous avons:

$$E\int_t^T \frac{|Z_s^n(Y_s^n - \pi_\varepsilon(Y_s^n))|^2}{|Y_s^n - \pi_\varepsilon(Y_s^n)|^2}\mathbf{1}_{\{Y_s^n \notin D_\varepsilon\}}ds = E\int_t^T |Z_s^n \nu_\varepsilon^*(Y_s^n)|^2 1_{\{Y_s^n \notin D_\varepsilon\}}ds \leq C\left(\frac{1}{n} + \varepsilon + n\varepsilon^2\right) \tag{36}$$

Prenons maintenant le sup dans l'équation (34) et utilisons à nouveau l'inégalité de Burkholder Davis–Gundy:

$$\begin{aligned}
&E\left[\sup_{0\leq t\leq T} \varphi_\varepsilon(Y_t^n)\right] \\
&\leq E\left[\int_0^T C\left(\frac{1}{n} + \varepsilon\right) |f(s, Y_s^n, Z_s^n)|^2 ds\right] + CE\left(\int_t^T |(Y_s^n - \pi_\varepsilon(Y_s^n))^* Z_s^n|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + C\left(n\varepsilon^2 + \varepsilon\right) \leq C\left(\frac{1}{n} + \varepsilon + n\varepsilon^2\right) \\
&\quad + CE\left(\sup_{0\leq t\leq T} \varphi_\varepsilon(Y_t^n) \int_t^T \frac{|Z_s^n(Y_s^n - \pi_\varepsilon(Y_s^n))|^2}{|Y_s^n - \pi_\varepsilon(Y_s^n)|^2} 1_{\{Y_s^n \notin D_\varepsilon\}} ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \times \frac{1}{2}E\left[\sup_{0\leq t\leq T} \varphi_\varepsilon(Y_t^n)\right] \leq C\left(\frac{1}{n} + \varepsilon + n\varepsilon^2\right) \\
&\quad + \frac{C^2}{2}E\int_t^T \frac{|Z_s^n(Y_s^n - \pi_\varepsilon(Y_s^n))|^2}{|Y_s^n - \pi_\varepsilon(Y_s^n)|^2} 1_{\{Y_s^n \notin D_\varepsilon\}} ds \leq C\left(\frac{1}{n} + \varepsilon + n\varepsilon^2\right)
\end{aligned}$$

On a utilisé (36). Ce qui démontre le lemme 5.4. □

De l'équation (35) de cette démonstration nous pouvons aussi déduire:

$$\exists \varepsilon_0 > 0,\ \exists C > 0 \text{ tel que } \forall \varepsilon < \varepsilon_0,\ \forall n\ E\left[\int_0^t d^2(Y_s^n, D)ds\right] \leq \frac{C}{n^2}$$

$$\exists \varepsilon_0 > 0,\ \exists C > 0 \text{ tel que } \forall \varepsilon < \varepsilon_0,\ \forall n\ E\left[\int_0^t d^2(Y_s^n, D)ds\right] \leq \frac{C}{n^2}$$

Ce qui nous permet d'énoncer le résultat suivant:

LEMME 5.5

$$\forall n\ E\left[\int_0^t d^2(Y_s^n, D)ds\right] \leq \frac{C}{n^2}$$

Ceci va nous permettre de montrer la convergence de la suite (Y^n, Z^n):

LEMME 5.6 *La suite de processus (Y^n, Z^n) est de Cauchy au sens où:*

$$\forall m \geq n \quad E\left[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t^n - Y_t^m|^2 + \int_0^T |Z_t^n - Z_t^m|^2 dt\right] \leq \frac{C}{n}$$

DÉMONSTRATION Grâce á la propriété (2), nous avons:

$$E|Y_t^n - Y_t^m|^2 + E\int_t^T |Z_s^n - Z_s^m|^2 ds \leq 2E\int_t^T C\Big(|Y_s^n - Y_s^m|^2 + |Y_s^n - Y_s^m||Z_s^n - Z_s^m|\Big)ds$$
$$+ 2(n+m)E\int_t^T (Y_s^n - \pi(Y_s^n))^*(Y_s^m - \pi(Y_s^m))ds \tag{37}$$

Or, en utilisant le lemme 5.5:

$$nE\int_t^T (Y_s^n - \pi(Y_s^n))^*(Y_s^m - \pi(Y_s^m))ds \leq \frac{C}{m} \tag{38}$$

(37) et (38) donnent donc:

$$E|Y_t^n - Y_t^m|^2 + (1 - C\alpha)E\int_t^T |Z_s^n - Z_s^m|^2 ds$$
$$\leq C\left(2 + \frac{1}{\alpha}\right)E\int_t^T |Y_s^n - Y_s^m|^2 ds + \frac{C}{n} + \frac{C}{m}$$

Lorsque l'on choisit $C\alpha < 1$, par le lemme de Gronwall, on obtient:

$$\exists C > 0 \quad \text{tel que } \ \forall\, m \geq n \qquad \sup_{0\leq t\leq T} E|Y_t^n - Y_t^m|^2 \leq \frac{C}{n} \tag{39}$$

On en déduit aussi

$$\forall m \geq n\ E\int_0^T |Z_s^n - Z_s^m|^2 ds \leq \frac{C}{n} \tag{40}$$

En écrivant une nouvelles fois la formule d'Itô pour $|Y_t^n - Y_t^m|^2$ et en utilisant une nouvelles fois les inégalités de Burkholder-Davis-Gundy, les inégalités ci-dessus nous permettent d'obtenir:

$$E \sup_{0\le t\le T} |Y_t^n - Y_t^m|^2 \le \frac{C}{n} + C'E\left(\sup_{0\le t\le T} |Y_t^n - Y_t^m|^2 \int_0^T |Z_s^n - Z_s^m|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{2} E \sup_{0\le t\le T} |Y_t^n - Y_t^m|^2 \le \frac{C}{n} + \frac{C'^2}{2} E \int_0^T |Z_s^n - Z_s^m|^2 ds$$

On obtient alors le lemme grâce à (40). □

Finalement, nous pouvons définir les processus

$$Y_t = \lim_{n\to\infty} Y_t^n \tag{41}$$

dans le sens où $E[\sup_{0\le t\le T}|Y_t^n - Y_t|^2] \to 0$ quand $n \to \infty$.

$$Z_t = \lim_{n\to\infty} Z_s^n \tag{42}$$

dans le sens où $E[\int_0^T |Z_t^n - Z_t|^2] \to 0$ quand $n \to \infty$.
Grâce aux équations (17) et (23), il est alors évident que K^n converge et l'on pose:

$$K_t = \lim_{n\to\infty} n \int_t^T (Y_s^n - \pi(Y_s^n))ds \tag{43}$$

dans le sens où $E[\sup_{0\le t\le T}|K_t^n - K_t|^2] \to 0$ quand $n \to \infty$.

5.3 *Propriétés de la limite* (Y, Z, K)

Il est clair que le triplet (Y, Z, K) satisfait l'équation (17) et les propriétés (15), (16). Le lemme 5.3 montre que Y_t reste dans $\bar{D}$. Il nous faut donc montrer que l'équation (19) est vérifiée. Comme la convergence des processus continus $(K_t^n)_{0\le t\le T}$ vers $(K_t)_{0\le t\le T}$ est uniforme, alors le processus K_t est continu en t.

D' après le lemme de Fatou et le lemme 5.2, il est clair que le processus $(K_t)_{(0\le t\le T)}$ est p.s. à variation bornée sur $[0, T]$ car $E[||K||_{VT}] \le C$ où C est la constante qui apparaît dans l'inégalité (29).

Il reste donc à montrer le

LEMME 5.7 *Pour tout processus Z_t continu et progressivement mesurable à valeurs dans $\bar{D}$ presque sûrement, nous avons:* $\int_0^T (Y_t - z_t)^* dK_t \le 0$.

DÉMONSTRATION DU LEMME 5.7

On va d'abord montrer le lemme déterministe suivant:

LEMME 5.8 *Soit y_n une suite de fonctions de $\mathscr{C}([0, T], \mathbb{R}^k)$ qui converge uniformément vers la fonction y. Soit k_n une suite de fonctions de $\mathscr{C}([0, T], \mathbb{R}^k)$ qui converge* *uniformément vers k et telle que $\exists C$ tel que $||k_n||_{VT} \leq C$. Alors*

$$||k||_{VT} < C \quad \text{et} \quad \int_0^T y_n dk_n \rightarrow_{n\rightarrow\infty} \int_0^T y dk$$

DÉMONSTRATION Par le lemme de Fatou, il est clair que $||k||_{VT} \leq C$. D'autre part,

$$\int_0^T y dk - \int_0^T y_n dk_n = \int_0^T y(dk - dk_n) + \int_0^T (y - y_n) dk_n$$

Or, il existe une suite $(f_p)_{(p\geq 0)}$ de fonctions en escaliers qui convergent uniformément vers y. On a donc:

$$\begin{aligned}\left|\int_0^T y(dk - dk_n)\right| &= \left|\int_0^T (y - f_p)(dk - dk_n) + \int_0^T f_p(dk - dk_n)\right| \\ &\leq ||y - f_p||(||k||_{VT} + ||k||_{VT}) + \sum_{t_i \in \tau_p} \alpha_i^p |k_{t_{i+1}} - k_{t_{i+1}}^n + k_{t_i}^n - k_{t_i}| \\ &\leq 2C||y - f_p|| + c(p)||k - k_n||_\infty \end{aligned} \tag{44}$$

Pour $\varepsilon > 0$ donné, on va donc choisir tout d'abord p tel que: $2C||y - f_p|| < \frac{\varepsilon}{3}$ Ensuite, on choisit n_0 tel que, $\forall n \geq n_0$, on ait à la fois:

$$C||y - y_n|| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ et } c(p)||k - k_n||_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$$

et l'on en déduit que pour tout $n \geq n_o| \int_0^T y dk - \int_0^T y_n dk_n| \leq \varepsilon$. □

La propriété (1) nous assure que

$$\int_0^T (Y_t^n - z_t)^* dK_t^n = -n \int_0^T (Y_t^n - z_t)^* (Y_t^n - \pi(Y_t^n)) dt \leq 0$$

Nous allons montrer que l'on peut extraire une sous-suite de la suite n telle que, le long de cette sous-suite, $\int_0^T (Y_t^n - z_t)^* dK_t^n$ converge p.s. vers $\int_0^T (Y_t - z_t)^* dK_t$. On aura alors le résultat.

On réécrit ici l'équation (28)

$$2\gamma||K^n||_{VT} \leq |\xi - a|^2 + 2\int_0^T (Y_s^n - a) f(s, Y_s^n, Z_s^n) ds - 2\int_0^T (Y_s^n - a) Z_s^n dB_s \tag{45}$$

et l'on voit que le membre de droite de cette équation converge en probabilité vers $|\xi - a|^2 + 2\int_0^T (Y_s - a) f(s, Y_s, Z_s) ds - 2\int_0^T (Y_s - a) Z_s dB_s$. Il existe donc une sous-suite $(\phi(n))_{(n\geq 0)}$ telle que le membre de droite converge p.s. le long de cette sous-suite. On obtient alors que la suite $||K^{\phi(n)}||_{VT}$ est bornée p.s. De même, la convergence dans L^2 de $sup_{0\leq t\leq T}|Y^n - Y|$ vers 0 nous permet d'extraire une sous-suite de la suite $\phi(n)$ telle que presque sûrement la suite $Y^{\phi(\psi(n))}$ converge uniformément vers Y. Le lemme déterministe précédent s'applique donc ω par ω à la suite $\int_0^T (Y^{\phi(\psi(n))} - z_t)^* dk_{\phi(\psi(n))}$

$$\int_0^T \left(Y^{\phi(\psi(n))} - z_t\right)^* dk_{\phi(\psi(n))} \to n \to \infty \int_0^T (Y_t - z_t)^* dK_t \quad p.s.$$

Le lemme (5.7) est démontré[3]. □

Nous avons donc montré l'existence et l'unicité d'une solution de l'Equation Différentielle Rétrograde Réfléchie:

THÉORÈME 5.9 *Sous les hypothèses (i), (ii), (iii), il existe une solution unique de (17) qui vérifie les propriétés (15), (16), (18) et (19).*

Références

[1] N. Bouleau: Formules de changements de variables *Ann. Inst. Henri Poincaré* Vol. 20, **2** (1984), 133–145.

[2] R. Darling: Constructing Gamma-martingales with prescribed limits, using Backward SDE's. *Ann. Prob.*, 1995.

[3] D. Duffie, L. Epstein: Stochastic differential utility. *Econometrica*, **60** (1992), 353–394.

[4] D. Duffie, L. Epstein: A ssset pricing with stochastic differential utility. *The Review of Financial Studies*, 5 (1992), 411–436.

[5] N. El Karoui, S. Peng, M. C. Quenez: Backward Stochastic Differential Equations, Finance and Optimization, *Preprint.*

[6] N. El Karoui, C. Kapoudjian, E. Pardoux, S. Peng, M. C. Quenez: Reflected solutions of backward SDE's and related obstacle problems for PDE's. *Preprint.*

[7] P. L. Lions, A. S. Sznitman: Stochastic Differential Equations with Reflecting Boundary Conditions. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Vol. XXXVII, 511–537, 1984.

[8] J. L. Menaldi: Stochastic Variational Inequality for Reflected Diffusion. Indiana University Mathematical Journal, Vol. 32, No. 5, 1983.

[9] E. Pardoux, S. Peng: Adapted solution of a backward stochastic differential equation. *Systems and Control Letters*, **14** (1990), 55–61.

[10] E. Pardoux, S. Peng: Backward SDE's and quasilinear PDE's. *Stochastic Partial Differential Equations and Their Applications*, B. L. Rozovski, R. B. Sowers Eds., LNCIS 176, Springer 1992.

[11] H. Tanaka: Stochastic Differential Equations with Reflecting Boundary Condition in Convex Regions. *Hiroshima Math. J.* 9 (1979), 163–177.

[3]Si au départ on était parti d'une suite extraite de la suite $\int_0^T (Y_t^n - z_t)^* dK_t^n$, on aurait pu en extraire par la même méthode une sous-suite qui converge presque sûrement vers $\int_0^T (Y_t - z_t) dK_t$. Cette propriété implique la convergence en probabilité de $\int_0^T (Y_t^n - z_t) dK_t^n$ vers $\int_0^T (Y_t - z_t) dK_t$.