Corrigé de l'examen partiel du 31/10/2007

Exercice

1. – a. Puisque $y \geq 0$, $x - y \leq x$, et aussi $0 \leq x$ Donc $(x-y)^+ = \sup(x-y, 0) \leq x$.
   – b. En additionnant ls deux formules de l'énoncé pour x et $|x|$, on obtient $|x| + x = 2x^+$.
2. – a. **Première preuve** Il faut montrer que $\mathbb{P}(X < 0) = 0$. Mais $\{X < 0\} = \cup_{k=1}^{\infty}\{X < -1/k\}$, et par la continuité monotone séquentielle des probabilités, $\mathbb{P}(X < -1/k) \to \mathbb{P}(X < 0)$, quand $k \to \infty$. Donc il suffit de montrer que $\mathbb{P}(X < -1/k) = 0$, $\forall k \geq 1$, soit $\mathbb{P}(X < -\varepsilon) = 0$, $\forall \varepsilon > 0$. Mais puisque $X_n \geq 0$ p. s., $\{X < -\varepsilon\} \subset \{|X - X_n| \geq \varepsilon\}$. Or $\mathbb{P}(|X - X_n| \geq \varepsilon) \to 0$, quand $n \to \infty$. Donc $\mathbb{P}(X < -\varepsilon) = 0$.
   Seconde preuve Il existe une sous–suite $\{X_{n_k}\}$ telle que $X_{n_k} \to X$ p. s. quand $k \to \infty$. Pour $\mathbb{P}$ presque tout ω, $X(\omega) = \lim_k X_{n_k}(\omega) \geq 0$.
   – b. On vérifie aisément que $(X - X_n)^+ \to 0$ en probabilité (en utilisant la définition). En outre, par la question 1a, $0 \leq (X - X_n)^+ \leq X$, et on a supposé X intégrable. Donc le résultat découle du Corallaire 6.2.7 (convergence dominée).
   – c. On utilise la question 1b.

$$\mathbb{E}|X - X_n| = 2\mathbb{E}(X - X_n)^+ - \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X_n).$$

   Le résultat découle alors de 2b et de l'hypothèse $\mathbb{E}(X_n) \to \mathbb{E}(X)$.

Problème

1. Le changement de variable $y = x/c$ dans le calcul de $\int f_c(x)dx$ permet de déduire que cette intégrale vaut 1.
2. Si X suit la loi de Cauchy de paramètre c,

$$\mathbb{E}[(X)^+] = \mathbb{E}[(X)^-] = \int_0^{\infty} \frac{cx}{\pi(x^2 + c^2)}dx = +\infty,$$

   puisque l'intégrand se comporte comme c/x quand $x \to \infty$. Donc X non seulement n'est pas intégrable, mais n'est pas quasi–intégrable. On ne peut pas définir son intégrale (donc il est interdit d'écrire $\mathbb{E}(X)$, ça ne veut rien dire !). A fortiori,

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{cx^2}{\pi(x^2 + c^2)}dx = +\infty,$$

   puisque l'intégrand tend vers la constante strictement positive c/π quand $x \to -\infty$ et quand $x \to +\infty$.
3. $$\mathrm{Var}\left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\mathrm{Var}(X+Y)}{2} = \frac{\mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)}{2} = \mathrm{Var}(X),$$

   où on a utilisé successivement $\mathrm{Var}(aZ) = a^2\mathrm{Var}(Z)$, la formule pour la variance d'une somme de v. a. indépendantes, et $\mathrm{Var}(X)$=$\mathrm{Var}(Y)$ (puisqu'elles ont même loi).
4. Pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
\varphi_Z(u) &= \frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\lambda|x| + iux)dx \\
&= \frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^{0} \exp(\lambda x + iux)dx + \frac{\lambda}{2}\int_{0}^{+\infty} \exp(-\lambda x + iux)dx \\
&= \frac{\lambda}{2(\lambda + iu)} - \frac{\lambda}{2(-\lambda + iu)} \\
&= \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + u^2}.
\end{aligned}
$$

On a utilisé à la troisième égalité $\lim_{x\to-\infty} \exp(\lambda x + iux) = \lim_{x\to+\infty} \exp(-\lambda x + iux) = 0$.

5. On remarque que la fonction $u \to \varphi_Z(u)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc on peut appliquer la formule à la fin du rappel de l'énoncé à la variable aléatoire Z, soit, en notant f_Z la densité de la loi de Z,
$$f_Z(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \exp(-iux)\varphi_Z(u)du,$$
autrement dit
$$\frac{\lambda}{2}\exp(-\lambda|x|) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\lambda^2}{\lambda^2+u^2}\exp(-iux)du,$$
soit en multipliant par $2/\lambda$, et en intervertissant u et x,
$$\exp(-\lambda|u|) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\lambda}{\pi(\lambda^2+x^2)}\exp(-iux)dx,$$
ce qui donne la bonne formule pour $\varphi_X(u)$, à condition de poser $c = \lambda$, et de changer x en $-x$.

6. Si X et Y sont deux v. a. r. indépendantes, respectivement de loi de Cauchy de paramètre c, et de loi de Cauchy de paramètre c', alors (Corollaire 5.2.7)
$$\varphi_{X+Y}(u) = \varphi_X(u)\varphi_Y(u) = \exp(-(c+c')|u|),$$
donc la loi de $X+Y$ est bien la loi de Cauchy de paramètre $c+c'$.

7. On a
$$\varphi_{\alpha X}(u) = \varphi_X(\alpha u) = \exp(-c|\alpha| \times |u|).$$

8. Il suffit de combiner les deux questions précédentes, avec $\alpha = 1/2$. Si $\mathbb{E}[X^2] < +\infty$, d'après la question 3, on aurait $\mathrm{Var}[(X+Y)/\sqrt{2}] = \mathrm{Var}(X)$, soit $\mathrm{Var}[(X+Y)/2] = \mathrm{Var}(X)/2$, donc l'égalité en loi que l'on vient d'établir entraînerait que ces variances sont nulles, ce qui n'est pas le cas ici.

9. On a que $\varphi_{-X}(u) = \varphi_X(-u) = \overline{\varphi}_X(u)$. D'où le résultat.

10. Puisque $\varphi_X(u)$ est un nombre rel, on peut poser $\psi(u) = \log \varphi_X(u)$. Donc l'hypothèse de l'énoncé entraîne que $\forall \alpha,\ \beta > 0$, $\psi([\alpha+\beta]u) = \psi(\alpha u) + \psi(\beta u)$. En choisissant $\alpha = 1$ et successivement $\beta = n-1,\ n-2,\ \ldots, 1$ on obtient
$$\psi(nu) = \psi(u) + \psi((n-1)u) = 2\psi(u) + \psi((n-2)u) = \cdots = n\psi(u).$$
En changeant u en u/n et n en m, on obtient $\psi(u/m) = \psi(u)/m$, donc en combinant avec l'identité précédente,
$$\psi\left(\frac{n}{m}u\right) = n\psi\left(\frac{u}{m}\right) = \frac{n}{m}\psi(u),$$
pour tous n, m entiers ≥ 1. Donc pour tout q rationel positif, $u \in \mathbb{R}$, $\psi(qu) = q\psi(u)$. Mais ψ est le log d'une fonction caractéristique, donc est continue. Donc on a $\psi(zu) = z\psi(u)$ pour tout $z \geq 0$, $u \in \mathbb{R}$. Donc si $z > 0$, $\psi(z) = z\psi(1)$, et si $z < 0$, $\psi(z) = |z|\psi(-1)$. En utilisant à nouveau la symérie de la loi de X, on a que $\psi(-1) = \psi(1)$, et ce nombre est négatif (parce que $\varphi_X(1) < 1$), donc en posant $c = -\psi(1)$, et en prenant l'exponentielle, on obtient le résultat souhaité, à savoir qu'il existe $c > 0$ tel que
$$\varphi_X(z) = \exp(-c|z|),\ \forall z \in \mathbb{R}.$$