Université de Provence **Centre de Mathématiques et d'Informatique**

Master Mathématiques et Applications, 1ère année
Module Mesure, Intégration, Probabilités

Examen du 13/01/2010
Documents autorisés : Notes personnelles, 10 pages maxi.

Exercice 1

Exercice 2

Problème Dans tout ce problème, $X_1, \dots, X_k$ sont des v. a. indépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On pose

$$\Lambda := \min(X_1, \dots, X_k).$$

Partie A On rappelle que la loi de la v. a. X à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ est la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ si et seulement si

$$\mathbb{P}(X > x) = \exp(-\lambda x), \quad \forall x > 0.$$

1. Soit X et Y deux v. a. indépendantes, X de loi exponentielle de paramètre λ, Y de loi exponentielle de paramètre μ. Montrer que la loi de la v. a. $\min(X, Y)$ est la loi exponentielle de paramètre $\lambda + \mu$.
2. Montrer que sous les mêmes hypothèses que ci–dessus, $\mathbb{P}(X = Y) = 0$ et
$$\mathbb{P}(X < Y) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$
3. Montrer que plus généralement si $X_1, \dots, X_k$ sont des v. a. indépendantes, chaque X_i de loi λ_i $(1 \le i \le k)$, alors la loi de la v. a. Λ est la loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k$ et
$$\mathbb{P}(X_i = \Lambda) = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_k}, \ 1 \le i \le k.$$
4. On note I la v. a. à valeurs dans $\{1, \dots, k\}$ qui indique quel X_i est le plus petit. Montrer que cette v. a. est p. s. bien définie, préciser la loi de I, et montrer que les deux v. a. I et Λ sont indépendantes (on calculera pour $1 \le i \le k$ et $x > 0$ quelconques $\mathbb{P}(I = i, \Lambda > x)$).

Partie B On suppose maintenant que pour $1 \le i \le k$, la loi de X_i admet la densité $f_i(x)$. On appelle fonction de survie de la v. a. X_i la fonction $S_i(x) = \mathbb{P}(X_i > x)$, et fonction de risque de la v. a. X_i la fonction $h_i(x) = f_i(x)/S_i(x)$.

1. Calculer $\mathbb{P}(\Lambda > x)$ en fonction des quantités $S_i(x)$, $1 \leq i \leq k$. En déduire une expression pour la densité $f_\Lambda(x)$ de la loi de Λ.
2. Montrer que l'événement $\{X_i = \Lambda\}$ coincide à un ensemble de mesure nulle près avec l'événement $\cap_{1\leq j\neq i\leq k}^k \{X_i < X_j\}$.
3. Soit $\varphi \in C_b(\mathbb{R}_+)$. Montrer que
$$\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{X_i=\Lambda\}}\varphi(\Lambda)\right] = \int_0^\infty \prod_{j=1}^k S_j(x)\varphi(x)h_i(x)dx.$$
4. Déterminer une fonction $H(x)$ (qui s'exprime en fonction des $h_j(x)$)telle que
$$\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{X_i=\Lambda\}}\varphi(\Lambda)\right] = \int_0^\infty H(x)\varphi(x)f_\Lambda(x)dx.$$
5. Montrer que
$$\mathbb{P}(X_i = \Lambda|\Lambda) := \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{X_i=\Lambda\}}|\Lambda\right] = H(\Lambda).$$
6. En déduire que, avec les notations de la partie **A**, les v. a. I et Λ ne sont pas indépendantes, dès que les fonctions $h_j(x)$ ne sont pas constantes.