GROSSISSEMENT D'UNE FILTRATION
ET RETOURNEMENT DU TEMPS D'UNE DIFFUSION

E.PARDOUX

1. Introduction .

Soit $\{ X_t, 0 \leqslant t \leqslant 1 \}$ un processus de diffusion dans $\mathbb{R}^d$ solution de l'E.D.S:

$$dX_t = b(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dW_t$$

où $\{W_t, 0 \leqslant t \leqslant 1 \}$ est un mouvement brownien standard dans $\mathbb{R}^\ell$. Continuant le travail de [2], nous nous posons la question suivante: existe-t-il un brownien standard dans $\mathbb{R}^\ell$ $\{\overline{W}_t, 0 \leqslant t \leqslant 1 \}$ et des coefficients $\{ \overline{b}(t,x), \overline{\sigma}(t,x); 0 \leqslant t \leqslant 1, x \in \mathbb{R}^d \}$ tels que le processus $\overline{X}_t = X_{1-t}, 0 \leqslant t \leqslant 1$, soit solution de :

$$d\overline{X}_t = \overline{b}(t,\overline{X}_t)dt + \overline{\sigma}(t,\overline{X}_t)\, d\overline{W}_t$$

Notre méthode consiste à identifier $\{\overline{W}_t\}$,en résolvant un problème de grossissement de filtration . On pourrait probablement déduire le résultat ci-dessous de ceux de Jeulin [4] et de Jacod [3] , mais cela ne semble pas possible de façon directe sans faire des hypothèses plus fortes que celles que nous utilisons ici. En outre, il nous paraît intéressant de donner une démonstration "directe" du résultat. On trouvera dans l'introduction de[2] une bibliographie sur le retournement du temps des diffusions .

2. Le résultat.

On suppose définis sur un espace de probabilité(Ω,F,P) un vecteur aléatoire X_o à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et un mouvement brownien standard $\{W_t, 0 \leqslant t \leqslant 1 \}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^\ell$ indépendant de X_o . Soit b, $\sigma^i (i = 1,\dots,\ell)$ des applications mesurables de $[0,1] \times \mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ qui satisfont :

$$(\text{H1}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \exists\, K > 0 \text{ t.q. } \forall (t,x,y) \in [0,1] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \\ |b(t,x)-b(t,y)| + \sum_1^\ell |\sigma^i(t,x) - \sigma^i(t,y)| \leqslant K|x-y| \\ |b(t,x)| + \sum_1^\ell |\sigma^i(t,x)| \leqslant K(1 + |x|) \end{array} \right.$$

Soit $\{X_t, t \in [0,1] \}$ le processus de Markov solution de l'E.D.S. au sens de Ito :

$$(1) \qquad X_t = X_o + \int_o^t b(s,X_s)ds + \int_o^t \sigma^i(s,X_s)dW_s^i \ , 0 \leq t \leq 1$$

Ici et dans la suite, nous utilisons la convention de sommation sur indices répétés .

Pour $t \in [0,1]$, on pose :

$$\overset{\circ}{G}^t \triangleq \sigma \{ W_s - W_t, \quad t \leq s \leq 1 \}$$

G^t désignera la tribu obtenue en complétant $\overset{\circ}{G}^t$ par les ensembles de P-mesure nulle de F , et :

$$H^t \triangleq G^t \vee \sigma(X_1) = G^t \vee \sigma(X_t)$$

$\{G^t\}$ et $\{H^t\}$ sont des " filtrations rétrogrades ", i.e. des suites décroissantes de tribus . Il est clair que $\{W_t - W_1, t \in [0,1]\}$ est un "G^t-mouvement brownien rétrograde ",i.e. $\forall\ 0 \leq s \leq t \leq 1$, $W_s - W_t$ est un vecteur aléatoire gaussien de loi $N(0,(t-s)I)$, indépendant de G^t. La question posée est : $\{W_t - W_1\}$ est-il une " H^t-semimartingale rétrograde " ? Et si oui , quelle est sa décomposition de Doob-Meyer ?

Pour pouvoir donner une réponse à ces questions , formulons tout d'abord une seconde hypothèse :

(H2)
- (i) la loi de X_o admet une densité $p_o \in L^2(\mathbb{R}^d ; \dfrac{dx}{1+|x|^k})$; pour un certain $k \in \mathbb{N}$
- (ii) $\dfrac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \in L^\infty(]0,1[\times \mathbb{R}^d)$,où $a(t,x) \triangleq \sigma(t,x)\ \sigma^*(t,x)$, et σ désigne la matrice $d \times \ell$, de colonnes $\sigma^i, i=1..\ell$.

On trouvera dans [2] la démonstration (purement analytique) du :

<u>Lemme 2.1</u>. Si (H1) et (H2) sont satisfaites, alors pour presque tout t dans [0,1], la loi de X_t possède une densité $p(t,x)$, et $\exists m \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\int_o^1 \int_{\mathbb{R}^d} (1+|x|^m)^{-1} (p^2(t,x) + \sum_1^\ell (\sigma^i . \nabla p)^2(t,x))dx\ dt < \infty$$

où ∇ désigne le gradient par rapport à x, et . le produit scalaire dans $\mathbb{R}^d$.

□

Notons que dans l'énoncé ci-dessus ∇p est pris au sens des distributions. Grâce à (H1), on peut multiplier cette distribution par σ^i,et le résultat du lemme signifie en particulier que les distributions $\sigma^i . \nabla p$, $i = 1 \ldots \ell$, sont des fonctions de $L^2_{loc}(]0,1[\times \mathbb{R}^d)$.

On a le :

Théorème 2.2. Supposons (H1) et (H2) satisfaites . Alors le processus $\{\hat{W}_t, t \in [0,1]\}$,dont la i-ème composante est donnée par :

$$\hat{W}_t^i = W_t^i - W_1^i - \int_t^1 p(s,X_s)^{-1} \operatorname{div}(\sigma^i p)(s,X_s)ds$$

est un $H^{\underline{t}}$ mouvement brownien rétrograde (ici et dans toute la suite, chaque terme contenant p^{-1} est remplacé par zéro lorsque p est nul).

Ce résultat sera démontré au § 4 .

Remarque 2.3. Il est clair que si l'on remplace X_o dans (H2) par X_{t_o} $(t_o > 0)$, on a le théorème 2.2. avec 0 remplacé par t_o . En particulier ,si (H2) est vraie avec X_o remplacé par X_{t_o}, $\forall\, t_o > 0$, alors $\{\hat{W}_t, t \in]0,1]\}$ est un $H^{\underline{t}}$ mouvement brownien rétrograde . Signalons en outre que (ii) dans (H2) peut être remplacée par l'hypothèse :

$\exists\, \alpha > 0$ t.q. $a(t,x) \geqslant \alpha I, \quad \forall (t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R}^d$.

□

Remarque 2.4. Il est clair que $\{t ; p(t,X_t) = 0\}$ est p.s. de mesure de Lebesgue nulle. Donc le choix d'une valeur à donner à l'expression contenant p^{-1}, lorsque p est nul, est arbitraire . Signalons que Zheng [7] a montré que sous certaines conditions supplémentaires de régularité sur p , le processus (t,X_t) ne rencontre p.s. jamais l'ensemble $\{(t,x) ; p(t,x) = 0\}$.

□

Définissons ce que nous appellerons " intégrale de Ito rétrograde ". Si $\{\hat{W}_t, t \in [0,1]\}$ est un $H^{\underline{t}}$ mouvement brownien rétrograde, et $\{\varphi_t, t \in [0,1]\}$ un processus $H^{\underline{t}}$ adapté à trajectoires continues, on pose :

$$\int_t^1 \varphi_s \oplus d\hat{W}_s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_{t_{i+1}^n} (\hat{W}_{t_{i+1}^n} - \hat{W}_{t_i^n})$$

où $t = t_o^n < t_1^n < \ldots < t_n^n = 1$, et $\delta_n = \sup_i t_{i+1}^n - t_i^n \to 0$, quand $n \to \infty$

On déduit alors du théorème 2.2. le :

Corollaire 2.4. (i) $\{X_t, t \in [0,1]\}$ est solution de l'E.D.S.rétrograde:

$$dX_t = \hat{b}(t,X_t)dt + \sigma^i(t,X_t) \oplus d\hat{W}_t^i$$

où : $\hat{b}_i(t,x) \triangleq b_i(t,x) - (p(t,x))^{-1} \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij}p)(t,x)$

(ii) $\{\bar{X}_t, t \in [0,1]\}$ est solution de l'E.D.S :

$$d\bar{X}_t = \bar{b}(t,\bar{X}_t)dt + \bar{\sigma}^i(t,\bar{X}_t)d\bar{W}_t^i$$

où : $\bar{b}(t,x) = -\hat{b}(1-t,x)$, $\bar{\sigma}(t,x) = -\sigma(1-t,x)$, et $\bar{W}_t = W_{1-t}$.

Preuve : (i) résulte du théorème 2.2., en tenant compte de la correction intégrale de Ito progressive-intégrale de Ito rétrograde .(ii) résulte de (i) en changeant t en 1-t .

□

3. Deux Lemmes.

Nous rappelons tout d'abord un résultat qui est démontré dans [2] :

Lemme 3.1 . Supposons (H1) et (H2) satisfaites . Alors $(\sigma^i.\nabla p)(t,x)= 0$ $dt \times dx$ p.p. sur l'ensemble $\{(t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R}^d \,;\, p(t,x)= 0\}$, $i= 1,..,\ell$

□

Lemme 3.2. Supposons (H1)satisfaite. Soit g mesurable bornée , de $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, à support compact . Fixons $t \in [0,1]$. Pour $(s,x)\in [0,t]\times \mathbb{R}^d$, on pose :

$$v(s,x) = E\,[g(X_t)/\, X_s = x]$$

Alors , $\forall$ n $\in \mathbb{N}$,

$$\sup_{0\leq s\leq t} \int_{\mathbb{R}^d} (1+|x|^n)\; v^2(s,x)\, dx < \infty$$

Preuve : Soit $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^d)$, t.q. $\varphi(x) = \rho(|x|)$, avec $\rho : \mathbb{R}_+ \to [1,+\infty[$ fonction strictement croissante, telle que $\rho(u) = u$, pour $u \geq 2$. On pose $\psi(x)= \mathrm{Log}\, \varphi(x)$, et on note P_{sx} la loi de $\{X_u, u \in [s,1]\}$, sachant que $X_s = x$. Sous P_{sx},

$$\psi(X_t)= \psi(x)+ \int_s^t (b(X_u).\nabla\psi(X_u)+ \frac{1}{2}\, \mathrm{Tr}\, [a(X_u)\partial^2\psi(X_u)]\,)du\, +$$

$$+ \int_s^t \nabla\, \psi(X_u)\;\; \sigma(X_u)dW_u$$

Il résulte du choix de φ que les intégrands sous les intégrales par rapport à du et à dW_u sont des processus bornés . Donc $\exists$ c t.q. :

$$|\psi(X_t)- \psi(x)| \leq c(t-s) + |M_t^s|$$

où $\{M_u^s,\ u \in[s,1]\}$ est une martingale continue avec $M_s^s= 0$ et $\langle M^s\rangle_t \leq c(t-s)$.

Soit $k \in \mathbb{R}_+ - \{0\}$ et $x \in \mathbb{R}^d$,t.q. $|x| > k$.

$$\begin{aligned} P_{sx}(\,|X_t| \leq k) &= P_{sx}(\,\psi(X_t)\leq \psi(k)) \\ &\leq P_{sx}(|\,\psi(X_t)- \psi(x)|\geq \psi(x) - \psi(k)) \\ &\leq P_{sx}(\,|M_t^s| \geq \psi(x)- \psi(k)- c(t-s)) \\ &\leq 2\, \exp\left[-\, \frac{(\psi(x)- \psi(k)- c(t-s))^2}{2\,c\,(t-s)}\right] \end{aligned}$$

pourvu que $\psi(x) \geqslant \psi(k)+c(t-s)$. La dernière inégalité est bien connue (cf.par ex. [6,page 87]).

Posons $A = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |g(x)|$ et $B = \sup_{x\in \mathrm{Sup}(g)} |x|$.

$$v^2(s,x) \leqslant A^2 \; P_{sx}(X_t \leqslant B)$$
$$\leqslant 2\,A^2 \exp\left(-\frac{[\psi(x)-\psi(B)-c(t-s)]^2}{2\,ct}\right)$$

$\forall\, s\in[0,t\,]$, $\forall\, x$ t.q. $\psi(x) \geqslant \psi(B)+ct$. Soit $D \geqslant 2$ tel que $\psi(x) \geqslant \psi(B)+ct$, dès que $|x| \geqslant D$.

$$\int_{\mathbb{R}^d} (1+|x|^n)v^2(s,x)dx \leqslant A^2 \int_{\{|x|\leqslant D\}} (1+|x|^n)dx + 2A^2 \int_{\{|x|\geqslant D\}} (1+|x|^n)\exp\left(\frac{-(\psi(x)-\alpha)^2}{2\,ct}\right)dx$$

Il reste donc à montrer :

$$\int_{\{|x|\geqslant D\}} (1+|x|^n)\exp\left(\frac{-(\mathrm{Log}|x|-\alpha)^2}{\beta}\right)dx < \infty\ ,\quad \forall\alpha,\beta>0\,;\ D\geqslant 2$$

Or, à un facteur près qui dépend de la dimension d, l'expression ci-dessus vaut :

$$\int_{\mathrm{Log}\,D}^{\infty}[e^{du} + d^{(n+d)u}]\exp\left[-\frac{(u-\alpha)^2}{\beta}\right]du < \infty$$

□

4. Preuve du théorème 2.2

Grâce aux Lemmes 2.1 et 3.1 , le processus :

$$\hat{W}^i_t = W^i_t - W^i_1 - \int_t^1 \frac{\mathrm{div}(\sigma^i p)(u,X_u)}{p(u,X_u)}\,du$$

est bien défini . Posons :

$$T_n = \begin{cases} 0 \text{ si } |X_1| \leqslant n \\ 1 \text{ si } |X_1| > n \end{cases}$$

$\{T_n, n\in\mathbb{N}\}$ est une suite de "H^t-temps d'arrêt rétrogrades". Nous allons montrer que $\forall t\in[0,1\,]; i=1,..,\ell; n\in\mathbb{N}$, $\hat{W}^i_{t\vee T_n}$ est une variable aléatoire intégrable,et que si $0\leqslant s<t\leqslant 1$,

(2) $$E(\hat{W}^i_{t\vee T_n} - \hat{W}^i_{s\vee T_n} / H^t) = 0$$

Ceci suffira à montrer que $\{\hat{W}^i_t,\ t\in[0,1]\}$ est une H^t-martingale locale rétrograde, donc un H^t-mouvement brownien, compte tenu de sa variation quadratique .

$$E(W^i_{t\vee T_n} - W^i_{s\vee T_n}/H^t) = 1_{\{|X_1|\leq n\}}\, E(W^i_t - W^i_s\, /H^t)$$
$$= 1_{\{|X_1|\leq n\}}\, E(W^i_t - W^i_s\, /X_t)$$

v étant défini comme au lemme 3.2, avec g satisfaisant les mêmes conditions, appliquons formellement la formule de Ito pour différentier la martingale $v(u,X_u)$. On obtient formellement (dans ce qui suit , l'indice i est fixé) :

$$E[(W^i_t - W^i_s) g(X_t)] = E[(W^i_t - W^i_s) \int \nabla v\, \sigma^i(u,X_u)\, dW^i_u \,]$$
$$= E \int_s^t (\sigma^i \nabla v)(u,X_u)du$$
$$= \int_s^t \int_{\mathbb{R}^d} p(u,x)\,(\sigma^i \nabla v)(u,x)dx\, du$$

D'où, après intégration par parties :

(3) $$E\,[(W^i_t - W^i_s) g(X_t)] = - \int_s^t \int_{\mathbb{R}^d} \operatorname{div}(\sigma^i p)(u,x) v(u,x) dx\, du$$

Admettons un instant cette égalité . Grâce au lemme 3.1,

(4) $$\int_s^t \int_{\mathbb{R}^d} \operatorname{div}(\sigma^i p)(u,x)v(u,x)dx\, du = E[g(X_t)\int_s^t \frac{\operatorname{div}(\sigma^i p)(u,X_u)}{p(u,X_u)}\, du]$$

D'après(4), il résulte des lemmes 2.1 et 3.2 que la v.a.r. qui apparait sous l'espérance dans le membre de droite de (4) est intégrable , $\forall$ g bornée et à support compact .

Donc $E\left(\left| \int_s^t \frac{\operatorname{div}(\sigma^i p)(u,X_u)}{p(u,X_u)}\, du \right| /H^t\right) < \infty$ p.s.,

et, en choisissant $t = 1$ et $g(x) = 1_{\{|x|\leq n\}}$, on obtient que la v.a.r. $\int_{t\vee T_n}^1 (p(u,X_u))^{-1} \operatorname{div}(\sigma^i p)(u,X_u)du$ est intégrable. Donc $\hat{W}^i_{t\vee T_n}$ est intégrable, et d'après(3)+ (4) :

$$E(W^i_t - W^i_s/H^t) = - E\left(\int_s^t (p(u,X_u))^{-1} \operatorname{div}(\sigma^i p)(u,X_u)du/H^t\right)$$

ce qui entraîne (2).

Il ne nous reste plus qu'à démontrer le :

Lemme 4.1. L'égalité (3) est satisfaite .

Preuve : Supposons tout d'abord , outre (H1) et (H2), que b et σ sont de classe C^2 en x et σ à support compact dans $[0,1] \times \mathbb{R}^d$, et que g est de classe C^∞ .

Alors - cf. [1] -v est de classe $C^{1,2}$, et satisfait l'équation de Kolmogorov :

$$\frac{\partial v}{\partial u}(u,x) + L\, v(u,x) = 0$$

où L est le générateur infinitésimal de $\{X_t\}$.
Alors les calculs qui mènent ci-dessus à (3) sont justifiés, toutes les intégrabilités découlant aisément du fait que σ est à support compact .

Revenons aux hypothèses du théorème, en supposant encore g de classe C^∞ . On peut construire une suite $\{ b_n, \sigma_n ; n \in \mathbb{N} \}$ de coefficients qui satisfont les conditions ci-dessus, satisfont(H1) et (H2)uniformément en n, et tels que $\forall R > 0$,

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^T \sup_{|x| \leq R} \left(|b(s,x)-b_n(s,x)| + \sum_1^{\ell} |\sigma^i(s,x) - \sigma_n^i(s,x)|\right) ds = 0$$

Alors , $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$(3^n) \qquad E^n [(W_t^i - W_s^i) g(X_t)] = - \int_s^t \int_{\mathbb{R}^d} \operatorname{div}(\sigma_n^i p^n)(u,x) v^n(u,x) dx\, du$$

En outre,d'après [6] ,$P_{ux}^n \Rightarrow P_{ux}$, et $P^n \Rightarrow P$. On peut donc passer à la limite dans le membre de gauche de (3^n), et de plus
$v^n(u,x) \to v(u,x)$, $\forall (u,x)$.

D'autre part, il résulte de la preuve du Lemme 3.2 que $|v^n(s,x)|$ est majorée par une fonction indépendante de n, et qui appartient à $L^2(\,]0,1[\, \times \mathbb{R}^d ; (1+|x|^m)\, dt\, dx)$.
Donc $v^n \to v$ dans $L^2(\,]0,1[\, \times \mathbb{R}^d ; (1+|x|^m) dt\, dx)$.

Il résulte du Lemme 2.1 que $\operatorname{div}(\sigma_n^i p^n)$ reste dans un borné de $L^2(\,]0,1[\, \times \mathbb{R}^d ; (1+|x|^m)^{-1}\, dt\, dx)$ donc, quitte à extraire une sous-suite , $\operatorname{div}(\sigma_n^i p^n)$ converge faiblement dans $L^2(\,]0,1[\, \times \mathbb{R}^d ; (1+|x|^m)^{-1}\, dt\, dx)$. Sa limite ne peut qu'être la limite au sens des distributions de la même suite, qui est $\operatorname{div}(\sigma^i p)$. On peut donc prendre la limite dans le second membre de (3^n). (3) est établi avec g de classe C^∞ . Le passage à g mesurable borné et à support compact quelconque est facile .

□

5. Conclusion .

Avec des hypothèses très proches de celles de [2] ,mais cependant un peu plus rigides , la méthode de grossissement de filtration donne un résultat de retournement du temps plus complet, puisqu'elle permet d'identifier non seulement $\bar{b}$ et $\bar{\sigma}$, mais aussi $\bar{W}$,y compris lorsque σ est dégénéré . Le résultat démontré ici avait été annoncé dans [5] , et utilisé dans l'étude du problème de lissage non linéaire.

Remerciement: Je tiens à remercier J.Jacod , qui m'a suggéré une simplification dans ma démonstration initiale.

Bibliographie :

[1] A.Friedmann : Stochastic differential equations and applications Vol 1,Acad.Press (1975)

[2] U.Haussmann - E.Pardoux : Time reversal of diffusions , Annals of Probability, à paraître (1985)

[3] J. Jacod : Grossissement initial, Hypothèse (H')et Théorème de Girsanov. in Grossissement de filtrations: exemples et applications, T. Jeulin et M.Yor eds, Lecture Notes in Mathematics 1118, 15-35, Springer Verlag (1985).

[4] T.Jeulin : Semi-martingales et grossissement d'une filtration, Lecture Notes in Mathematics 833, Springer Verlag (1980).

[5] E.Pardoux : Time reversal of diffusion processes and non linear smoothing , in Systems and Optimization, A. Bagchi et H. Th. Jongen eds , Lecture Notes in Control and Information Sciences 66, 171 - 181, Springer-Verlag (1985)

[6] D.Stroock-S.Varadhan : Multidimensional diffusion processes, Springer Verlag (1979).

[7] W.Zheng : Semi-martingales with smooth densities-the problem of " nodes". à paraître . Voir aussi la bibliographie de cet article .

U.E.R. de Mathématiques
Université de Provence
3,Place V.Hugo
13331 Marseille Cedex 3