

Chaînes de Markov, Algorithmes
Stochastiques, Réseaux et Finance

É. Pardoux

20 septembre 2004

Table des matières

1	Simulation et méthode de Monte Carlo	7
1.1	Description de la méthode de Monte Carlo	8
1.2	Théorèmes de convergence	9
1.3	Simulation de variables aléatoires	14
1.4	Méthodes de réduction de variance	18
1.5	Exercices	23
2	Chaînes de Markov	29
2.1	Définition et propriétés élémentaires.	29
2.2	Exemples	33
2.2.1	Marche aléatoire sur $E = \mathbf{Z}^d$	33
2.2.2	Processus de Galton–Watson	34
2.2.3	File d’attente en temps discret	34
2.3	Propriété de Markov forte	35
2.4	Etats récurrents et transitoires	37
2.5	Chaînes de Markov récurrentes irréductibles	40
2.6	Le cas irréductible, récurrent positif et apériodique	48
2.7	Chaîne de Markov réversible	53
2.8	Chaînes semi–markoviennes	55
2.9	Annexe : La formule de Black–Scholes en temps discret	56
2.10	Exercices	59
3	Quelques algorithmes stochastiques	65
3.1	Méthode de Monte Carlo par chaîne de Markov	65
3.1.1	Le modèle d’Ising	68
3.1.2	Analyse bayésienne d’images	70
3.2	Simulation de la probabilité invariante	71
3.2.1	Simulation parfaite	72

3.2.2	Couplage depuis le passé (“Coupling from the past”)	75
3.3	Le recuit simulé	78
3.4	Algorithmes génétiques	80
3.4.1	Maximisation d’une fonction sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^d$	81
3.4.2	Le problème du voyageur de commerce	82
3.4.3	Un formalisme général	84
3.4.4	Comportement des algorithmes génétiques	86
3.5	Exercices	88
4	Statistique et Chaînes de Markov	91
4.1	Statistique des chaînes de Markov	91
4.2	Chaînes de Markov cachées	92
4.3	Chaînes de Markov cachées : filtrage	103
4.4	Le cas linéaire gaussien : le filtre de Kalman	105
5	Contrôle optimal des Chaînes de Markov	109
5.1	Contrôle optimal déterministe	109
5.2	Contrôle des chaînes de Markov	111
5.3	Contrôle optimal linéaire quadratique	112
5.4	Contrôle optimal linéaire quadratique avec observation partielle	114
6	Le processus de Poisson	117
6.1	Processus ponctuels et f.a. de comptage	117
6.2	Le processus de Poisson	119
6.3	Propriété de Markov	122
6.4	Comportement asymptotique	125
6.5	Exercices	128
7	Processus markoviens de saut	131
7.1	Généralités	131
7.2	Générateur infinitésimal	135
7.3	Propriété de Markov forte	138
7.4	Chaîne de Markov incluse	141
7.5	Classification des états	142
7.6	Comportement asymptotique	143
7.7	Réversibilité	146
7.8	Processus semi-markovien de saut	148
7.9	Application aux EDP discrétisées	151

7.10	Le recuit simulé (suite)	152
7.11	Exercices	158
8	Processus de renouvellement et processus semi-markoviens	163
9	Files d'attente et réseaux	165
9.1	File d'attente M/M/1	165
9.2	File d'attente M/M/1/K	168
9.3	File d'attente M/M/s	169
9.4	File d'attente M/M/s/s : Central téléphonique	171
9.5	Atelier de réparation	172
9.6	Files d'attente en série	173
9.7	File d'attente M/G/ ∞	174
9.8	File d'attente M/G/1	174
9.9	Réseau de Jackson ouvert	177
9.10	Réseau de Jackson fermé	182
9.11	Réseau téléphonique	185
9.12	Réseau de Kelly	188
9.12.1	Une seule file d'attente	189
9.12.2	Réseau de files d'attente multi-classe	191
9.13	Exercices	193
10	Introduction aux Mathématiques Financières	195
10.1	Les concepts de base	195
10.1.1	Option	195
10.1.2	Arbitrage	196
10.1.3	Marchés viables et complets	197
10.2	Options européennes dans le modèle discret	197
10.2.1	Le modèle	197
10.2.2	Stratégie admissible	198
10.2.3	Martingales	200
10.2.4	Le marché est viable et complet	200
10.2.5	Prix du call et du put	203
10.2.6	La formule de Black-Scholes	204
10.3	Le modèle et la formule de Black-Scholes	206
10.3.1	Introduction au calcul stochastique	207
10.3.2	Équations différentielles stochastiques	214
10.3.3	Formule de Feynman-Kac	216

10.3.4	L'EDP de Black–Scholes	217
10.3.5	La formule de Black–Scholes (2ème dérivation)	219
10.3.6	Une généralisation du modèle de Black–Scholes	220
10.3.7	3ème dérivation de la formule de Black–Scholes	221
10.3.8	Le théorème de Girsanov	224
10.3.9	Propriété de Markov et EDP	225
10.3.10	Option portant sur plusieurs sous-jacent	228
10.3.11	Viabilité et Complétude	230
10.3.12	Remarques sur les points de vue probabiliste/EDP, et sur le calcul effectif des primes	231
10.3.13	Volatilité historique - Volatilité implicite	232
10.4	Options américaines dans le modèle discret	233
10.4.1	Enveloppe de Snell	234
10.4.2	Décomposition de Doob	237
10.4.3	Enveloppe de Snell et chaînes de Markov	238
10.4.4	Retour aux options américaines	239
10.4.5	Options américaines et options européennes	239
10.4.6	Options américaines et modèle markovien	240
10.5	Options américaines dans le modèle de Black–Scholes	240
10.6	Taux d'intérêt et obligations	242
10.6.1	Courbe de taux en avenir certain	242
10.6.2	Courbes de taux en avenir incertain et obligations	243
10.6.3	Option sur obligation	245
10.6.4	Un modèle de taux d'intérêt	247
10.7	Exercices	248
11	Problèmes de révision	251
11.1	Examen du 17 décembre 1998	251
11.2	Corrigé de l'examen du 17 décembre 1998	254
11.3	Examen du 4 janvier 2000	257
11.4	Corrigé de l'examen du 4 janvier 2000	259
11.5	Examen du 31 janvier 2001	262
11.6	Corrigé de l'examen du 31 janvier 2001	264
11.7	Examen du 28 novembre 2001	268
11.8	Corrigé de l'examen du 28 novembre 2001	270
11.9	Examen du 4 décembre 2002	272

Chapitre 1

Simulation et méthode de Monte Carlo

Pour donner une première idée de la méthode de Monte Carlo, nous allons considérer un problème d'intégration numérique. Il existe de très nombreuses méthodes d'approximation de l'intégrale :

$$\int_{[0,1]} f(x)dx$$

par des formules du type $\sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$, avec les w_i qui sont des nombres positifs dont la somme vaut 1 et les x_i sont des points de l'intervalle $[0, 1]$. Par exemple, lorsque $w_0 = w_n = 2/n$, $w_i = 1/n$ sinon, les points $x_i = i/n$ étant régulièrement répartis, on a affaire à la méthode des trapèzes. Mais il existe bien d'autres méthodes comme la méthode de Gauss ou de Simpson. Une méthode de Monte Carlo est du même type : on choisit $w_i = 1/n$ et l'on tire les x_i "au hasard" (mais pas n'importe comment, il faut tirer les points selon la loi uniforme sur $[0, 1]$). Cette méthode converge avec une vitesse de l'ordre de K/\sqrt{n} . Evidemment cette vitesse de convergence peut paraître faible si on la compare aux autres méthodes d'intégration en dimension 1. Mais toutes ces méthodes numériques s'effondrent lorsque la dimension augmente (il faut typiquement avoir n^d points, où d est la dimension, pour avoir une erreur constante). Le gros avantage de la méthode de Monte Carlo est d'être absolument insensible à la dimension.

Historiquement la méthode remonte au comte de Buffon qui, en 1777, a décrit une méthode de calcul de π basée sur la réalisation d'expériences répétées. Mais la vraie naissance de la méthode de Monte Carlo est liée à

l'apparition des premiers ordinateurs et à leurs utilisations dans le cadre des projets secrets du département de la défense des États Unis dans les années 40 – 45. Les premiers articles décrivant ce type de méthodes datent de la fin des années 40 et du début des années 50. Les précurseurs de ces méthodes s'appellent Ulam, Von Neumann, Metropolis,

1.1 Description de la méthode de Monte Carlo

Pour utiliser une méthode de Monte Carlo on doit tout d'abord mettre sous forme d'une espérance la quantité que l'on cherche à calculer. C'est souvent simple, comme pour le cas d'un calcul d'intégrale, mais ça peut être plus compliqué, comme lorsque l'on cherche à résoudre une équation parabolique, elliptique ou même un système linéaire. Nous reviendrons longuement par la suite sur cette étape dans des cas particuliers.

A l'issue de cette étape il nous reste à calculer une quantité de la forme $\mathbb{E}(X)$, où X est une variable aléatoire. Pour pouvoir calculer $\mathbb{E}(X)$ il convient de savoir simuler une variable aléatoire selon la loi de X . Mathématiquement, cela signifie que l'on veut pouvoir supposer que $(X_i, i \geq 1)$ est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de X . Informatiquement, on se ramène à l'utilisation d'une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. Ce genre de suite aléatoire est couramment fourni dans tous les langages de programmation (`rand` en C, `g05caf` et autres dans NAG). Il ne reste plus alors qu'à approximer $\mathbb{E}(X)$ par :

$$\mathbb{E}(X) \approx \frac{1}{N}(X_1 + \dots + X_N).$$

On va donner un exemple d'application de la méthode de Monte Carlo, au cas du calcul d'une intégrale, en détaillant les deux étapes citées : mise sous forme d'espérance et simulation de la variable aléatoire.

Imaginons que l'on cherche à calculer une intégrale de la forme :

$$I = \int_{[0,1]^d} f(u_1, \dots, u_d) du_1 \dots du_d.$$

On pose, $X = f(U_1, \dots, U_d)$, où les U_1, \dots, U_d sont des variables aléatoires

indépendantes suivant une loi uniforme sur le cube $[0, 1]^d$. On a :

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(f(U_1, \dots, U_d)) = \int_{[0,1]^d} f(u_1, \dots, u_d) du_1 \dots du_d,$$

par définition de la loi du n -uplet, (U_1, \dots, U_d) . On vient de réaliser la première étape (mise sous forme d'espérance).

Pour la simulation, supposons que $(U_i, i \geq 1)$ est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$ (obtenue par des appels successifs à une fonction random) et posons $X_1 = f(U_1, \dots, U_d)$, $X_2 = f(U_{d+1}, \dots, U_{2d})$, etc. Alors la suite $(X_i, i \geq 1)$ est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de X . On est en mesure d'appliquer une méthode de Monte Carlo.

Une remarque importante est la très grande facilité de programmation de la méthode. Il est à noter aussi que cette méthode ne dépend pas de la régularité de f , qui peut être simplement mesurable.

Souvent, on cherche à évaluer une intégrale dans \mathbb{R}^n , plus générale, du type :

$$I = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(x_1, \dots, x_n)f(x_1, \dots, x_n)dx_1 \dots dx_n,$$

avec $f(x)$ positive et $\int f(x)dx = 1$. Alors I s'écrit sous la forme $\mathbb{E}(g(X))$ si X est une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^n de loi $f(x)dx$. Le problème est alors de savoir comment simuler une variable aléatoire selon cette loi. Pour beaucoup de lois usuelles, c'est simple (loi gaussienne, loi exponentielle, ...).

Nous allons maintenant répondre à deux questions :

- Quand et pourquoi cet algorithme converge-t-il ?
- Quelle idée peut on se faire de la précision de l'approximation ?

1.2 Théorèmes de convergence

La réponse à ces deux questions est donnée par deux des théorèmes les plus importants du calcul des probabilités, la loi forte des grands nombres qui permet de justifier la convergence de la méthode et le théorème de la limite centrale qui précise la vitesse de convergence.

Loi forte des grands nombres et méthode de Monte Carlo

Théorème 1.2.1. Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi qu'une variable aléatoire X . On suppose que $\mathbb{E}(|X|) < +\infty$, alors, pour presque tout ω (cela signifie qu'il existe $N \subset \Omega$, avec $\mathbb{P}(N) = 0$ et que si $\omega \notin N$) :

$$\mathbb{E}(X) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n).$$

Ce théorème impose une limite théorique aux méthodes de Monte Carlo : on ne peut l'utiliser que pour des variables aléatoires intégrables (ce n'est pas vraiment surprenant).

Théorème de la limite centrale et méthode de Monte Carlo Pour avoir une idée de l'intérêt de la méthode il faut être en mesure d'évaluer l'erreur :

$$\varepsilon_n = \mathbb{E}(X) - \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n).$$

Le théorème de la limite centrale donne un asymptotique de l'erreur ε_n mais de nature aléatoire. Il dit que la loi de ε_n finit par ressembler à une loi gaussienne centrée.

Théorème 1.2.2. Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi qu'une variable aléatoire X . On suppose que $\mathbb{E}(X^2) < +\infty$. On note σ^2 la variance de X :

$$\sigma^2 = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2),$$

alors :

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \varepsilon_n \text{ converge en loi vers une gaussienne centrée réduite } Z.$$

Cela signifie que pour tout $a < b$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}a \leq \varepsilon_n \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}}b\right) = \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}.$$

Dans les applications pratiques on a tendance à "oublier la limite" et on remplace ε_n par une gaussienne centrée de variance σ^2/n .

Notons l'importance de la variance de la variable aléatoire X dans l'estimation de l'erreur. Comme on a le choix de la loi de X pourvu que $\mathbb{E}(X)$

reste constant, il est tentant de remplacer la variable aléatoire X par une autre de même espérance mais de variance inférieure. On appelle ce type de technique technique de réduction de variance (voir la section 1.4).

Ce résultat est extrêmement positif, puisqu'il donne presque toujours une vitesse de convergence facilement estimable à l'aide des tirages déjà réalisés.

C'est une grande force de la méthode de donner une approximation fiable de l'erreur, sans pratiquement aucun calcul supplémentaire.

Cependant, le théorème de la limite centrale ne permet jamais de borner l'erreur, puisque le support de la gaussienne est égal à \mathbb{R} en entier. On présente souvent l'erreur de la méthode de Monte Carlo soit en donnant l'écart type de ε_n , c'est à dire σ/\sqrt{n} , soit en donnant un intervalle de confiance à 95% pour le résultat. Ceci signifie que le résultat cherché se trouve avec 95% de chance dans l'intervalle donné (et avec 5% de chance en dehors, ce qui ne rassure pas!). Evidemment, la valeur de 95% peut être remplacée par n'importe quelle autre valeur proche de 1.

Il faut aussi noter la vitesse de convergence de l'erreur en qui n'est pas dans l'absolu excellente. Cependant, il existe des cas où cette méthode lente est malgré tout la meilleure accessible (intégrale en dimension grande de l'ordre de 100, équation parabolique en dimension 50, ...). Il est aussi remarquable que la vitesse de convergence de la méthode, pour des calculs d'intégrale, ne dépende pas de la régularité de f .

Nous allons donner deux exemples d'utilisation du théorème de la limite centrale. Nous verrons que ce résultat impose des limites pratiques à la méthode de Monte Carlo.

Un cas confortable Supposons, que l'on cherche à calculer $p = \mathbb{P}(f(U) \leq \lambda)$. On va poser $X = \mathbf{1}_{\{f(U) \leq \lambda\}}$. Alors $\mathbb{E}(X) = p$, et $\sigma^2 = \text{var}(X) = p(1-p)$. Donc, à l'issue de n tirages indépendants selon la loi de X , X_1, \dots, X_n on a :

$$p_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \approx p + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z.$$

Comme $p(1-p) \leq 1/4$, si l'on veut faire une erreur moyenne $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ de l'ordre de 0.01 sur la valeur de p , il convient de prendre n de l'ordre de 2500. Si l'on choisit, $n = 2500$, l'intervalle de confiance à 95% pour p est alors, en utilisant le théorème de la limite centrale $[p_n - 1.96 * 0.01, p_n + 1.96 * 0.01]$. Si la valeur de p à estimer est de l'ordre 0.50 ceci conduit à une erreur acceptable.

Par contre lorsque la valeur de p à estimer est très faible le nombre de tirages précédent est très nettement insuffisant pour évaluer son ordre de

grandeur par simulation. On doit (et c'est intuitivement évident) prendre un nombre de tirages nettement supérieur à $1/p$.

Un cas difficile Imaginons que l'on cherche à calculer $\mathbb{E}(\exp(\beta Z))$, où Z est une gaussienne centrée réduite. Il est facile de vérifier que :

$$E = \mathbb{E}(e^{\beta Z}) = e^{\frac{\beta^2}{2}}.$$

Si l'on applique dans ce cas une méthode de Monte Carlo, on pose $X = e^{\beta Z}$. La variance de X vaut $\sigma^2 = e^{2\beta^2} - e^{\beta^2}$. Au bout de n tirages selon la loi de X , X_1, \dots, X_n on a :

$$E_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \approx E + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z.$$

L'erreur relative moyenne est de l'ordre de $\frac{\sigma}{E\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{e^{\beta^2}-1}{n}}$. Si l'on se fixe un ordre de grandeur de l'erreur ε à respecter on voit qu'il convient de choisir $n \approx \varepsilon^{-2}(e^{\beta^2} - 1)$. Si $\varepsilon = 1$ et $\beta = 5$, cela donne $n = 7 \times 10^{10}$, ce qui est beaucoup (et même trop!). Voici, par exemple, le résultat donné par un programme qui cherche à estimer cette valeur dans le cas $\beta = 5$.

```
valeur exacte : 268337
100000 tirages, valeur estimee : 854267
intervalle de confiance estime a 95 pourcent :
[-467647,2176181] !
```

Le seul côté rassurant c'est que l'on est au courant que l'approximation est très mauvaise.

Cet exemple montre une des limites pratiques de la méthode de Monte Carlo lorsqu'on utilise des variables aléatoires de variance grande., et donc conduit à formuler une :

Règle : dans tout calcul de Monte Carlo, on doit systématiquement estimer à l'aide des simulations réalisées la variance de la v.a. dont on cherche à approcher l'espérance.

Un exemple plus concret Dans les applications à la finance on est amené à calculer des quantités du type :

$$C = \mathbb{E}\left(\left(e^{\sigma Z} - K\right)_+\right), \quad (1.1)$$

Z étant une gaussienne centrée réduite et $x_+ = \max(0, x)$. Ces quantités représentent le prix d'une option appelée call. Evidemment, dans le cas précis cité on peut trouver une formule explicite (pour l'essentiel c'est la célèbre formule de Black et Scholes) :

$$\mathbb{E} \left((e^{\sigma Z} - K)_+ \right) = e^{-x^2/2} N \left(\sigma - \frac{\log(K)}{\sigma} \right) - K N \left(-\frac{\log(K)}{\sigma} \right),$$

avec $N(x) = \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du$. Mais nous allons ici supposer que l'on cherche à calculer ces quantités par simulation.

Les valeurs pratiques utilisées pour σ sont de l'ordre de l'unité. Dans l'expérimentation numérique nous avons posé $\sigma = 1.0$ ainsi que $\lambda = 1.0$. Voici le résultat de la simulation ainsi qu'une estimation de l'erreur pour divers nombre de tirages.

valeur exacte : 6.720

N = 100, intervalle de confiance a 95% : [0.08,11.39]
 valeur estimée : 5.74

N = 1000, intervalle de confiance a 95% : [4.20,10.01]
 valeur estimée : 7.1

N = 10000, intervalle de confiance a 95% : [6.13,8.43]
 valeur estimée : 7.28

N = 100000, intervalle de confiance a 95% : [6.59,7.69]
 valeur estimée : 7.14

Comparons maintenant les résultats à ceux que l'on obtient lorsque l'on cherche à évaluer un put, c'est à dire :

$$P = \mathbb{E} \left(K - (e^{\sigma Z})_+ \right). \quad (1.2)$$

La formule explicite donne :

$$KN \left(\frac{\log(K)}{\sigma} \right) - xN \left(\frac{\log(K)}{\sigma} - \sigma \right).$$

On obtient alors les résultats suivants.

valeur exacte : 0.238

N = 100, intervalle de confiance estime a 95% : [0.165,0.276]
 valeur estimée : 0.220

N = 1000, intervalle de confiance estime a 95% : [0.221,0.258]
 valeur estimee : 0.240
 N = 10000, intervalle de confiance estime a 95% : [0.232,0.244]
 valeur estimee : 0.238

On constate que l'approximation est bien meilleure dans le cas du put que dans le cas du call. Ceci s'explique sans difficultés par un calcul (ou une estimation) de la variance. Le cas du calcul du call reprend pour l'essentiel les caractéristiques du cas précédent.

Dans la section suivante on passe en revue un certain nombre de méthode de réduction de variance. Nous utiliserons, pour illustrer les méthodes générales l'exemple que nous venons de développer.

1.3 Simulation de variables aléatoires

Pour implémenter la méthode de Monte Carlo sur un ordinateur, on procède de la façon suivante. On suppose que l'on sait construire une suite de nombres $(U_n)_{n \geq 1}$ qui réalise une suite de variables aléatoires uniformes sur l'intervalle $[0, 1]$, indépendantes, et on cherche une fonction

$$(u_1, \dots, u_p) \mapsto F(u_1, \dots, u_p)$$

telle que la loi de la variable aléatoire $F(U_1, \dots, U_p)$ soit la loi cherchée $\mu(dx)$. La suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 1}$ où

$$X_n = F(U_{(n-1)p+1}, \dots, U_{np})$$

est alors une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi voulue μ .

La suite $(U_n)_{n \geq 1}$ est réalisée concrètement par des appels successifs à un générateur de nombres pseudo-aléatoires. La plupart des langages disponibles sur les ordinateurs modernes possèdent une fonction aléatoire, déjà programmée, qui produit soit un nombre pseudo aléatoire compris entre 0 et 1, soit un entier aléatoire dans un intervalle fixé (cette fonction porte le nom `rand` en C ANSI, `random` en Turbo Pascal).

Remarque 1.3.1. *La fonction F peut dans certain cas (en particulier lorsque l'on cherche à simuler des temps d'arrêt), dépendre de toute la suite $(U_n)_{n \geq 1}$,*

et non plus d'un nombre fixe de U_i . La méthode précédente est encore utilisable si l'on sait simuler X à l'aide d'un nombre presque sûrement fini de U_i , ce nombre pouvant dépendre du hasard. C'est le cas, par exemple, de l'algorithme de simulation d'une variable aléatoire poissonnienne (voir page 16).

Simulation d'une loi uniforme sur $[0, 1]$ Nous allons montrer comment l'on peut construire des générateurs de nombres aléatoires au cas où les générateurs de la machine ne donneraient pas entière satisfaction.

La méthode la plus simple et la plus couramment utilisée est la méthode des congruences linéaires. On génère une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ de nombres entiers compris entre 0 et $m - 1$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} x_0 = \text{valeur initiale} \in \{0, 1, \dots, m - 1\} \\ x_{n+1} = ax_n + b \pmod{m} \end{cases}$$

a, b, m étant des entiers qu'il faut choisir soigneusement si l'on veut que les caractéristiques statistiques de la suite soient satisfaisantes. Sedgewick dans [35] préconise le choix suivant :

$$\begin{cases} a = 31415821 \\ b = 1 \\ m = 10^8 \end{cases}$$

Cette méthode permet de simuler des entiers pseudo aléatoires entre 0 et $m - 1$; pour obtenir un nombre réel aléatoire entre 0 et 1 on divise l'entier aléatoire ainsi généré par m .

Ce générateur fournit des résultats acceptables dans les cas courants. Cependant sa période (ici $m = 10^8$) peut se révéler parfois insuffisante. On peut, alors, obtenir des générateurs de nombres aléatoires de période arbitrairement longue en augmentant m . Le lecteur intéressé trouvera des nombreux renseignements sur les générateurs de nombres aléatoires et la façon de les programmer sur un ordinateur dans [20] et [23].

Simulation de variables gaussiennes Une méthode classique pour simuler les variables aléatoires gaussiennes repose sur la constatation que, si (U_1, U_2) sont deux variables aléatoires uniformes sur $[0, 1]$ indépendantes :

$$\sqrt{-2 \log(U_1)} \cos(2\pi U_2)$$

suit une loi gaussienne centrée et réduite (i.e. de moyenne nulle et de variance 1).

Pour simuler des gaussiennes de moyenne m et de variance σ il suffit de poser $X = m + \sigma g$, où g est une gaussienne centrée réduite.

Simulation d'une loi exponentielle Rappelons qu'une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre μ si sa loi vaut :

$$\mathbf{1}_{\{x \geq 0\}} \mu e^{-\mu x} dx$$

On peut simuler X en constatant que, si U suit une loi uniforme sur $[0, 1]$: $\frac{\log(U)}{\mu}$ suit une loi exponentielle de paramètre μ .

Simulation d'une variable aléatoire poissonnienne Une variable aléatoire poissonnienne est une variable à valeurs dans \mathbb{N} telle que :

$$\mathbb{P}(X = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}, \quad \text{si } n \geq 0$$

On peut prouver que si $(T_i)_{i \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires exponentielles de paramètre λ , alors la loi de $N_t = \sum_{n \geq 1} n \mathbf{1}_{\{T_1 + \dots + T_n \leq t < T_1 + \dots + T_{n+1}\}}$ est un loi de Poisson de paramètre λt . N_1 a donc même loi que la variable X que l'on cherche à simuler. D'autre part, on peut toujours mettre les variables exponentielles T_i sous la forme $-\log(U_i)/\lambda$, où les $(U_i)_{i \geq 1}$ sont des variables aléatoires suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$ et indépendantes. N_1 s'écrit alors :

$$N_1 = \sum_{n \geq 1} n \mathbf{1}_{\{U_1 U_2 \dots U_{n+1} \leq e^{-\lambda} < U_1 U_2 \dots U_n\}}.$$

Cela donne un algorithme pour simuler une variable aléatoire de Poisson.

Méthode de rejet On veut simuler une v.a. de loi de densité f (par exemple par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d), et on suppose qu'il existe une loi de densité g simulable facilement telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \quad f(x) \leq k g(x)$$

où k est une constante réelle. On pose $\alpha(x) = \frac{f(x)}{k g(x)}$.

Proposition 1.3.2. Soit (X_1, U_1) un couple de v.a. indépendantes telles que X_1 suive la loi de densité g et U_1 suive une loi uniforme sur $[0, 1]$. Si $U_1 \leq \alpha(X_1)$, on pose $X = X_1$.

Sinon on rejette X_1 et on recommence en générant une suite $(X_n, U_n)_{n \geq 2}$ de v.a. indépendantes de même loi que (X_1, U_1) jusqu'à l'instant p où $U_p \leq \alpha(X_p)$. On pose alors $X = X_p$.

La v.a. X ainsi simulée a pour densité f .

Remarques :

1. La probabilité d'acceptation à l'instant 1 de la v.a. X_1 vaut

$$\begin{aligned} p_1 &= P(U_1 \leq \alpha(X_1)) = \int \mathbf{P}(U_1 \leq \alpha(x)) P_{X_1}(dx) = \int \alpha(x) g(x) dx \\ &= \int \frac{1}{k} f(x) dx = \frac{1}{k} \end{aligned}$$

par indépendance de U_1 et X_1 .

Si on ne veut pas trop de rejets lors de la simulation de X , il faut que cette probabilité d'acceptation p_1 soit la plus grande possible et donc que k soit le plus petit possible. Comme f et g sont des densités et que $f \leq kg$, le réel k est en fait nécessairement ≥ 1 .

Remarquons de plus que les rejets seront limités si $\frac{f(x)}{kg(x)}$ est proche de 1 et donc si la fonction g a une allure similaire à celle de f .

2. L'algorithme ci-dessus est encore valable si la v.a. X à simuler a une densité f par rapport à une mesure positive μ quelconque majorée par kg où g est la densité par rapport à μ d'une variable Y facile à simuler. Ceci se traduit par

$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_A f(x) \mu(dx) \leq \int_A kg(x) \mu(dx) = k \mathbb{P}(Y \in A).$$

Si la v.a. X a une loi portée par un ensemble discret E , on peut choisir pour μ la mesure de comptage sur E et la méthode de rejet est aussi valable pour des lois discrètes, $f(x)$ étant dans ce cas égal à $\mathbb{P}(X = x)$.

Preuve de la proposition 1.3.2 Remarquons tout d'abord qu'au bout d'un nombre d'essais finis, la relation $U_p \leq \alpha(X_p)$ sera vérifiée; en effet

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\forall p \in \mathbb{N}^* X \neq X_p) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{p \leq N} \{X \neq X_p\}\right) \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\bigcap_{p \leq N} \{U_p > \alpha(X_p)\}\right) \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}(U_1 > \alpha(X_1))^N \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} (1 - p_1)^N,
\end{aligned}$$

puisque les v.a. (X_p, U_p) sont indépendantes et de même loi. Par conséquent

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X \in A] &= \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{P}[X = X_n, X \in A] \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{P}\left[\bigcap_{p \leq n-1} \{U_p > \alpha(X_p)\} \cap \{U_n \leq \alpha(X_n)\} \cap \{X_n \in A\}\right] \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (1 - p_1)^{n-1} \mathbb{P}[\{U_1 \leq \alpha(X_1)\} \cap \{X_1 \in A\}] \\
&= \frac{1}{p_1} \mathbb{P}[\{U_1 \leq \alpha(X_1)\} \cap \{X_1 \in A\}] \\
&= \mathbb{P}[X_1 \in A / U_1 \leq \alpha(X_1)].
\end{aligned}$$

La loi de X est donc la loi de X_1 conditionnée par l'ensemble d'acceptation $\{U_1 \leq \alpha(X_1)\}$. Elle satisfait par indépendance de X_1 et U_1 ,

$$\mathbb{P}[X \in A] = \frac{1}{p_1} \int_A \mathbb{P}(U_1 \leq \alpha(x)) P_{X_1}(dx) = k \int_A \alpha(x) g(x) dx = \int_A f(x) dx.$$

Pour la simulation d'autres lois que nous n'avons pas citées, ou pour d'autres méthodes de simulation des lois précédentes, on pourra consulter [2], [11], [4]

1.4 Méthodes de réduction de variance

Nous venons de voir que la vitesse de convergence de la méthode de Monte Carlo est de l'ordre de σ/\sqrt{n} . Pour améliorer cette méthode il existe

de nombreuses techniques, dites de réduction de variance, qui cherchent à diminuer la valeur de σ^2 . Nous allons passer en revue quelques unes de ces méthodes.

Echantillonnage préférentiel Supposons que l'on cherche à calculer $\mathbb{E}(g(X))$ et que la loi de X soit $f(x)dx$ (sur \mathbb{R} pour fixer les idées). On a :

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{\mathbb{R}} g(x)f(x)dx.$$

Mais si \tilde{f} est la densité d'une loi telle que $\tilde{f} > 0$ et $\int \tilde{f}(x)dx = 1$, il est clair que $\mathbb{E}(g(X))$ peut aussi s'écrire :

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{\mathbb{R}} \frac{g(x)f(x)}{\tilde{f}(x)}\tilde{f}(x)dx.$$

Cela signifie que $\mathbb{E}(g(X)) = \mathbb{E}\left(\frac{g(Y)f(Y)}{\tilde{f}(Y)}\right)$, si Y qui suit la loi $\tilde{f}(x)dx$ sous \mathbb{P} . On a donc une autre méthode de calcul de $\mathbb{E}(g(X))$ en utilisant n tirages de Y , Y_1, \dots, Y_n et en approximant $\mathbb{E}(g(X))$ par :

$$\frac{1}{n} \left(\frac{g(Y_1)f(Y_1)}{\tilde{f}(Y_1)} + \dots + \frac{g(Y_n)f(Y_n)}{\tilde{f}(Y_n)} \right).$$

Si l'on pose $Z = g(Y)f(Y)/\tilde{f}(Y)$, on aura amélioré l'algorithme si $\text{var}(Z) < \text{var}(g(X))$. Il est facile de calculer la variance de Z :

$$\text{var}(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - \mathbb{E}(Z)^2 = \int_{\mathbb{R}} \frac{g^2(x)f^2(x)}{\tilde{f}(x)}dx - \mathbb{E}(g(X))^2.$$

Si $g(x) \geq 0$, il est facile de voir que, en prenant $\tilde{f}(x) = g(x)f(x)/\mathbb{E}g(X)$ on annule $\text{var}(Z)$! Il ne faut pas trop donner d'importance à ce résultat car il repose sur le fait que l'on sait calculer $\mathbb{E}(g(X))$ et c'est justement le but de la méthode.

Cela permet cependant de justifier l'heuristique suivante : prendre $\tilde{f}(x)$ aussi proche que possible de $|g(x)f(x)|$ puis la normaliser (diviser par $\int \tilde{f}(x)dx$) de façon à obtenir une densité dont la loi est facilement simulable. Evidemment les contraintes que l'on s'impose sont largement contradictoires.

Donnons un exemple simple pour fixer les idées. Supposons que l'on cherche à calculer :

$$\int_0^1 \cos(\pi x/2) dx.$$

On peut alors remplacer le cos par un polynôme du second degré. Comme le cos est pair, vaut 0 en $x = 1$ et 1 en $x = 0$, il est naturel de prendre $\tilde{f}(x)$ de la forme $\lambda(1 - x^2)$. En normalisant on obtient, $\tilde{f}(x) = (1 - x^2)/3$. En calculant les variances, on peut constater que cette méthode a réduit la variance d'un facteur 100.

Montrons sur le cas du calcul du put (1.2) comment l'on peut appliquer cette méthode. On cherche donc à calculer :

$$P = \mathbb{E} \left((K - e^{\sigma g})_+ \right).$$

La fonction $e^x - 1$ est proche de x lorsque x n'est pas trop grand. Cela suggère de mettre P sous la forme (l'argument heuristique étant que si la fonction varie moins la variance sera inférieure) :

$$P = \int_{\mathbb{R}} \frac{(K - e^{\sigma x})_+}{\sigma|x|} \sigma|x| e^{-x^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}.$$

Un changement de variable permet alors d'écrire P comme :

$$P = \int_0^{+\infty} \frac{(e^{\sigma\sqrt{x}} - 1)_+ + (e^{-\sigma\sqrt{x}} - 1)_+}{\sqrt{2\pi}\sqrt{x}} e^{-x/2} \frac{dx}{2}.$$

Soit encore :

$$P = \mathbb{E} \left(\frac{(e^{\sigma\sqrt{Y}} - 1)_+ + (e^{-\sigma\sqrt{Y}} - 1)_+}{\sqrt{2\pi}\sqrt{Y}} \right),$$

avec Y qui suit une loi exponentielle de paramètre 1/2. On peut alors comparer avec la méthode précédente.

valeur exacte : 0.23842

N = 100, intervalle de confiance estime a 95% : [0.239,0.260]

valeur estimee : 0.249

N = 1000, intervalle de confiance estime a 95% : [0.235,0.243]

valeur estimee : 0.239

N = 10000, intervalle de confiance estime a 95% : [0.237,0.239]

valeur estimee : 0.238

On constate une amélioration sensible de la précision du calcul, ainsi pour 10000 tirages l'erreur relative passe 6% dans la méthode initiale à 1% grâce à l'échantillonnage préférentiel.

Variables de contrôle Dans sa version la plus simple, il s'agit d'écrire $\mathbb{E}(f(X))$ sous la forme :

$$\mathbb{E}(f(X)) = \mathbb{E}(f(X) - h(X)) + \mathbb{E}(h(X)),$$

avec $\mathbb{E}(h(X))$ qui peut se calculer explicitement et $\text{var}(f(X) - h(X))$ petit devant $\text{var}(f(X))$. On utilise alors une méthode de Monte Carlo pour $\mathbb{E}(f(X) - h(X))$ et le calcul direct pour $\mathbb{E}(h(X))$.

Commençons par un exemple simple. Supposons que l'on veuille calculer $\int_0^1 e^x dx$. Comme au voisinage de 0, $e^x \approx 1 + x$, on peut écrire :

$$\int_0^1 e^x dx = \int_0^1 (e^x - 1 - x) dx + \frac{3}{2}.$$

Il est facile de vérifier que la variance de la méthode diminue alors sensiblement.

On peut donner un exemple plus convainquant en considérant le problème du calcul du prix call 1.1. Il est facile de vérifier que le prix du put et du call vérifient :

$$C - P = \mathbb{E}(e^{\sigma g} - K) = e^{\sigma^2/2} - K.$$

L'idée est alors d'écrire $C = P + e^{\sigma^2/2} - K$ et de réaliser une méthode de Monte Carlo pour P . On a déjà vu que l'erreur de méthode est alors très sensiblement inférieure.

Variables antithétiques Supposons que l'on cherche à calculer :

$$I = \int_0^1 f(x) dx.$$

Comme $x \rightarrow 1-x$ laisse invariante la mesure dx , $I = \frac{1}{2} \int_0^1 (f(x) + f(1-x)) dx$.

On peut donc calculer I de la façon suivante. On tire n variables aléatoires uniformes sur $[0, 1]$ indépendantes U_1, \dots, U_n , et on approxime I par :

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2}(f(U_1) + f(1 - U_1)) + \dots + \frac{1}{2}(f(U_n) + f(1 - U_n)) \right) \\ &= \frac{1}{2n} (f(U_1) + f(1 - U_1) + \dots + f(U_n) + f(1 - U_n)). \end{aligned}$$

Lorsque l'on compare cette méthode à une méthode de Monte Carlo directe à l'issue de $2n$ tirages, on peut montrer que si la fonction f est continue décroissante la qualité de l'approximation s'améliore.

On peut généraliser ce genre d'idée en dimension supérieure et à d'autres transformations préservant la loi de la variable aléatoire.

Par exemple, si l'on cherche à calculer le prix d'un put 1.2, on peut utiliser le fait que la loi de g est identique à celle de $-g$ et réduire la variance d'un coefficient proche de 2.

Méthode de stratification C'est une méthode bien connue de nos statisticiens sondeurs. Supposons que l'on cherche à calculer I :

$$I = \mathbb{E}(g(X)) = \int g(x)f(x)dx.$$

où X suit la loi $f(x)dx$. On commence par décomposer I en :

$$I = \sum_{i=1}^m I_i = \sum_{i=1}^m \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{X \in D_i\}} g(X))$$

où D_i est une partition de l'ensemble sur lequel on intègre. On utilise alors n_i tirages pour estimer l'intégrale I_i . Si l'on note $\sigma_i^2 = \text{var}(\mathbf{1}_{\{X \in D_i\}} g(X))$, il est facile de voir que la variance de l'approximation est donnée par :

$$\sum_{i=1}^m \frac{\sigma_i^2}{n_i}.$$

Et si on minimise cette erreur à $\sum_{i=1}^m n_i = n$ fixé, on obtient $n_i = n \frac{\sigma_i}{\sum_{i=1}^m \sigma_i}$.

Le minimum vaut alors $\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^m \sigma_i \right)^2$. On peut montrer qu'il est inférieur à

la variance que l'on obtiendrait avec n tirages aléatoires par une méthode de Monte Carlo. Evidemment on ne peut que rarement calculer les σ_i , ce qui limite la portée de cette technique (mais on peut toujours les estimer à l'aide d'une méthode de Monte Carlo!). Pour des considérations approfondies sur cette technique on pourra consulter [9].

Valeur moyenne Supposons que l'on cherche à calculer :

$$\mathbb{E}(g(X, Y)) = \int g(x, y) f(x, y) dx dy,$$

où $f(x, y) dx dy$ est la loi du couple (X, Y) .

Si l'on pose $h(x) = \frac{1}{m(x)} \int g(x, y) f(x, y) dy$, avec $m(x) = \int f(x, y) dy$, il est facile de voir que :

$$\mathbb{E}(g(X, Y)) = \mathbb{E}(h(X)).$$

En effet la loi de X est $m(x) dx$, et donc :

$$\mathbb{E}(h(X)) = \int m(x) h(x) dx = \int dx \int g(x, y) f(x, y) dy = \mathbb{E}(g(X, Y)).$$

On peut d'autre part montrer, en interprétant $h(X)$ comme une espérance conditionnelle, que :

$$\text{var}(h(X)) \leq \text{var}(g(X, Y)).$$

Ainsi, si l'on peut calculer explicitement la fonction $h(x)$, il est préférable d'utiliser une méthode de Monte Carlo pour $h(X)$.

1.5 Exercices

Exercice 1.5.1. Soit X une v.a. de loi géométrique de paramètre p : $\mathbb{P}(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$, $k \geq 1$.

1. Rappeler la méthode classique de simulation à l'aide de tirages à pile ou face.
2. Donner une autre méthode de simulation de cette loi utilisant la fonction de répartition et comparer l'efficacité des 2 méthodes.

Exercice 1.5.2. 1. Rappeler les méthodes classiques de simulation d'une loi $N(0, 1)$.

2. Proposer un algorithme de rejet permettant de simuler une variable aléatoire gaussienne à partir de la loi double exponentielle de densité $(\lambda/2) \exp(-\lambda|x|)$.
3. Soit X et Y des variables aléatoires indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre 1.

- (a) Trouver la loi conditionnelle de X sachant que $\{Y > (1 - X)^2/2\}$
- (b) Soit Z une variable aléatoire suivant la loi ci dessus et S une variable aléatoire indépendante de Z prenant les valeurs ± 1 avec la probabilité $1/2$. Trouver la loi de SZ .
- (c) En déduire une méthode de simulation d'une loi $N(0, 1)$.

Exercice 1.5.3. On dit qu'un processus $\{X(t), t \geq 0\}$, est un processus de Lévy s'il possède les deux propriétés :

- P1 :** Pour tout système $(0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n)$ les variables aléatoires $X(t_k) - X(t_{k-1})$ ($1 \leq k \leq n$) sont indépendantes (on dit alors que $X(t)$ est un processus à accroissements indépendants).
- P2 :** La loi de $X(t+h) - X(t)$ est indépendante de t (on dit alors que $X(t)$ est un processus homogène) et de plus $X(0) = 0$.

Dans le cas d'un mouvement brownien c'est à dire dans le cas d'un processus de Lévy tel que $X(t)$ suive une loi $N(0, t)$, trouver la loi de $X(t)$ sachant que $X(t-h) = x$ et $X(t+h) = y$. En déduire une simulation récursive de ce processus.

Même question pour le processus de Cauchy c'est à dire dans le cas où $X(t)$ suit une loi de Cauchy de densité $\frac{t}{\pi(x^2+t^2)}$. (on précisera la méthode de simulation de la loi conditionnelle ci dessus).

Exercice 1.5.4. Soit (X_1, X_2) un couple gaussien de coefficient de corrélation ρ et tel que pour $i = 1, 2$ la variable aléatoire X_i suive une loi $N(\mu_i, \sigma_i^2)$.

1. Montrer que si (Y_1, Y_2) est un couple de variables aléatoires indépendantes de loi $N(0, 1)$ alors le couple $Z_1 = \mu_1 + \sigma_1 Y_1$, $Z_2 = \mu_2 + \sigma_2(\rho Y_1 + \sqrt{1 - \rho^2} Y_2)$ a même loi que (X_1, X_2) . En déduire une méthode de simulation de la loi de ce couple.
2. Généraliser au cas d'une dimension quelconque.

Exercice 1.5.5. Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F . On supposera cette fonction de répartition inversible et l'on note F^{-1} son inverse.

1. Comment simuler la loi de X conditionnellement à $X > m$ à l'aide d'une méthode de rejet ? Évaluer l'efficacité de la méthode ? Que se passe-t-il, en particulier, si m devient très grand ?

2. Si U est une variable aléatoire uniforme sur $[0, 1]$, on pose :

$$Z = F^{-1}(F(m) + (1 - F(m))U).$$

Calculer la fonction de répartition de Z et en déduire une méthode de simulation de X conditionnellement à $X > m$. Comparer l'efficacité de cette méthode à la méthode du rejet.

3. Généraliser la méthode précédente au cas où l'on cherche à simuler X conditionnellement à $a < X < b$.
4. On cherche maintenant à simuler X , de loi normale $N(\mu, \sigma^2)$, conditionnellement à $X > m$. Montrer que l'on peut se ramener au cas centré réduit, avec m arbitraire.
5. Proposer une méthode du rejet basée sur la loi exponentielle translatée de densité donnée par $\theta e^{-\theta(x-m)} \mathbf{1}_{\{x>m\}}$. Comment choisir le paramètre θ ?

Exercice 1.5.6. Echantillonnage préférentiel :

On veut calculer par une méthode de Monte-Carlo :

$$p_\ell = \mathbb{P}(X \in [\ell, \ell + 1]),$$

X étant une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1.

1. Donner l'estimateur classique de p_ℓ ainsi que sa variance.
2. Déterminer une fonction d'importance telle que les nouveaux tirages soient tous dans l'intervalle $[\ell, \ell + 1]$. Calculer la variance de ce nouvel estimateur et conclure pour les grandes valeurs de ℓ .

Exercice 1.5.7. 1. Proposer une méthode de fonction d'importance pour le calcul de

$$I = \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{\xi>0\}} \exp \beta \xi),$$

si ξ est une gaussienne centrée réduite et $\beta = 5$.

2. Proposer une méthode de variable de contrôle pour cette même intégrale.
3. Améliorer votre estimateur à l'aide d'une technique de variables antithétiques.

Exercice 1.5.8. Le but de cet exercice est de prouver que la méthode des variables antithétiques réduit bien la variance lorsque la fonction est monotone en chacune de ses variables.

1. On suppose que f et g sont deux fonctions croissantes bornées de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Montrez que, si X et Y sont deux variables aléatoires réelles, on a :

$$\mathbb{E}(f(X)g(X)) + \mathbb{E}(f(Y)g(Y)) \geq \mathbb{E}(f(X)g(Y)) + \mathbb{E}(f(Y)g(X)).$$

En déduire que si X est une variable aléatoire réelle :

$$\mathbb{E}(f(X)g(X)) \geq \mathbb{E}(f(X))\mathbb{E}(g(X)) \Leftrightarrow \text{Cov}(f(X), g(X)) \geq 0$$

2. Montrez que, si X_1, \dots, X_n sont n variables aléatoires indépendantes :

$$\mathbb{E}(f(X_1, \dots, X_n)g(X_1, \dots, X_n)|X_n) = \Phi(X_n),$$

Φ étant une fonction que l'on explicitera sous forme d'une espérance. En déduire que, si f et g sont deux fonctions croissantes en chacun de leur arguments :

$$\mathbb{E}(f(X_1, \dots, X_n)g(X_1, \dots, X_n)) \geq \mathbb{E}(f(X_1, \dots, X_n))\mathbb{E}(g(X_1, \dots, X_n)).$$

3. Soit h une fonction de $[0, 1]^n$ dans \mathbb{R} monotone en chacun de ses arguments, et U_1, \dots, U_n des variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$. Montrer que :

$$\text{Cov}(h(U_1, \dots, U_n)h(1 - U_1, \dots, 1 - U_n)) \leq 0,$$

et en déduire que le méthode des variables antithétiques réduit la variance dans ce cas.

Exercice 1.5.9. Soit (U_1, \dots, U_n) un échantillon i.i.d. de loi uniforme sur $[0, 1]$ et $(V_1 \leq V_2 \leq \dots \leq V_n)$ l'échantillon ordonné. On convient que $V_{n+1} = 1, V_0 = 0$ et pour $i = 0, \dots, n$ on pose $\Delta_i = V_{i+1} - V_i$.

1. Trouver la loi du couple (V_i, V_{i+1}) pour $i = 1, \dots, n - 1$ et la loi de Δ_i pour $i = 0, \dots, n$
2. Montrer que $\sup_{0 \leq i \leq n} \Delta_i$ converge presque sûrement vers 0.
3. Soit h une fonction continue et l'on supposera pour simplifier que $h(0) = 0$. Montrer que l'estimateur :

$$Z_n = \sum_{i=0}^n \Delta_i h(V_i)$$

converge presque sûrement vers $I = \int_0^1 h(u)du$.

4. Montrer que :

$$\mathbb{E}(Z_n) = \int_0^1 (1 - v^n) f(v) dv$$

En déduire que Z_n est un estimateur asymptotiquement sans biais de I . Pouvait-on prévoir ce résultat sans calcul ?

5. On suppose de plus que h est de classe C^1 . Montrer qu'il existe une constante K avec :

$$|Z_n - I| \leq K \sum_{i=0}^n \Delta_i^2$$

En déduire la vitesse de convergence de Z_n vers I dans L^1 .

Chapitre 2

Chaînes de Markov

Une chaîne de Markov est une suite aléatoire $\{X_n; n = 0, 1, 2, \dots\}$, définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans un ensemble E qui peut être arbitraire, mais qui sera ici soit fini soit dénombrable, et qui jouit de la propriété de Markov. Sans donner tout de suite une définition formelle, indiquons qu'une suite de Markov a la propriété que connaissant X_n , on peut oublier le passé pour prédire l'avenir. Une façon de fabriquer une telle suite est de se donner une suite de v.a. $\{Y_n, n \geq 1\}$ qui sont mutuellement indépendantes, et globalement indépendantes de X_0 , à valeurs dans F , et pour tout n une application $f_n : E \times F \rightarrow E$, t.q. pour $n \geq 1$,

$$X_n = f_n(X_{n-1}, Y_n).$$

Avant de passer à une étude systématique des chaînes de Markov, commençons par aborder deux exemples issus des applications.

2.1 Définition et propriétés élémentaires.

La structure markovienne de $\{Z_n; n \in \mathbb{N}\}$ et de $\{S_n; n \in \mathbb{N}\}$ nous a permis de mener les calculs dans la section précédente. Nous allons maintenant définir et étudier les chaînes de Markov $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ à valeurs dans un espace (fini ou) dénombrable E . On notera i, j, \dots les points de E . Pour alléger la rédaction, on conviendra que pour chaque condition faisant intervenir une probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(A/B)$, celle-ci n'est supposée vérifiée que dans le cas où $\mathbb{P}(B) > 0$.

Définition 2.1.1. *Le processus stochastique $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ à valeurs dans E est appelé une chaîne de Markov si pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant X_0, X_1, \dots, X_n est égale à la loi conditionnelle sachant X_n , i.e $\forall i_0, \dots, i_n, j \in E$,*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j / X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j / X_n = i_n).$$

□

Un critère simple qui permet dans la plupart des cas de vérifier qu'un processus est une chaîne de Markov est donné par le :

Lemme 2.1.2. *Soit E et F deux ensembles dénombrables, et f une application de $\mathbb{N} \times E \times F$ dans E . Soit X_0, Y_1, Y_2, \dots des v.a. mutuellement indépendantes, X_0 à valeurs dans E et les Y_n à valeurs dans F , et $\{X_n, n \geq 1\}$ le processus à valeurs dans E défini par*

$$X_{n+1} = f(n, X_n, Y_{n+1}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Alors $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une chaîne de Markov.

PREUVE:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X_{n+1} = j / X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) \\ &= \frac{\mathbb{P}(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n, X_{n+1} = j)}{\mathbb{P}(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n)} \\ &= \sum_{\{y; f(n, i_n, y) = j\}} \frac{\mathbb{P}(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n, Y_{n+1} = y)}{\mathbb{P}(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n)} \\ &= \sum_{\{y; f(n, i_n, y) = j\}} \mathbb{P}(Y_{n+1} = y) \\ &= \frac{\mathbb{P}(X_n = i_n, X_{n+1} = j)}{\mathbb{P}(X_n = i_n)} \end{aligned}$$

□

Une chaîne de Markov est l'analogie d'un système déterministe défini par une relation de récurrence du type :

$$x_{n+1} = f(n, x_n),$$

par opposition aux systèmes “avec mémoire” du type :

$$x_{n+1} = f(n, x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0).$$

Ici la fonction $f(n, \cdot)$ est remplacée par la “matrice de transition” :

$$P_{ij} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j / X_n = i).$$

Dans toute la suite, cette matrice $P = (P_{ij}; i, j \in E)$ sera indépendante de l’instant n . On dit que la chaîne de Markov est **homogène**.

La matrice P est dite **markovienne** (ou **stochastique**), au sens où elle vérifie la propriété que $\forall i \in E$, le vecteur ligne $(P_{ij}; j \in E)$ est une mesure de probabilité sur E , c’est à dire :

$$P_{ij} \geq 0, \forall j \in E; \sum_{j \in E} P_{ij} = 1.$$

Comme on va le voir, la loi d’une chaîne de Markov est entièrement déterminée par la donnée d’une “loi initiale” $(\mu_i; i \in E)$, qui est la loi de X_0 , et de la matrice de transition de la chaîne.

Définition 2.1.3. Soit μ une probabilité sur E , et P une matrice markovienne. Un processus stochastique $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ à valeurs dans E , et défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, est une chaîne de Markov (μ, P) (i.e. de loi initiale μ et de matrice de transition P) si :

- (i) $\mathbb{P}(X_0 = i) = \mu_i, i \in E.$
- (ii) $\mathbb{P}(X_{n+1} = j / X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) = P_{ij},$
 $\forall i_0, \dots, i_{n-1}, i, j.$

Proposition 2.1.4. Une CNS pour qu’un processus $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ à valeurs dans E soit une chaîne de Markov (μ, P) est que $\forall n \in \mathbb{N}$, la loi du v.a. (X_0, X_1, \dots, X_n) soit donnée par

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) = \mu_{i_0} P_{i_0 i_1} \times \dots \times P_{i_{n-1} i_n}.$$

PREUVE:

CN. Si $\mathbb{P}(X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) &= \mathbb{P}(X_n = i_n / X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) \\ &\times \dots \times \mathbb{P}(X_1 = i_1 / X_0 = i_0) \mathbb{P}(X_0 = i_0) \end{aligned}$$

et l'égalité ci-dessus résulte de la définition. Si $\mathbb{P}(X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) = 0$, les deux membres de l'égalité de l'énoncé sont nuls (considérer le plus petit indice k tel que $\mathbb{P}(X_0 = i_0, \dots, X_k = i_k) = 0$).

CS. Le (i) de la définition résulte de l'égalité de l'énoncé. Le (ii) s'en déduit aisément. Démontrons en fait plus que (ii).

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1}, \dots, X_{n+p} = i_{n+p} / X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) \\ = \frac{\mu_{i_0} P_{i_0 i_1} \times \dots \times P_{i_{n+p-1} i_{n+p}}}{\mu_{i_0} P_{i_0 i_1} \times \dots \times P_{i_{n-1} i_n}} \end{aligned}$$

(ii) s'en déduit en choisissant $p = 1$. □

On a en fait montré le :

Corollaire 2.1.5. *Si $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ est une chaîne de Markov (μ, P) , alors pour tous $n, p, i_0, \dots, i_{n+p}$*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1}, \dots, X_{n+p} = i_{n+p} / X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) \\ = P_{i_n i_{n+1}} \times \dots \times P_{i_{n+p-1} i_{n+p}}. \end{aligned}$$

□

Une probabilité μ sur E est considérée comme un vecteur ligne, une application $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ est considérée comme un vecteur colonne, ce qui justifie les notations

$$\begin{aligned} (\mu P)_j &= \sum_{i \in E} \mu_i P_{ij} \\ (Pg)_i &= \sum_{j \in E} P_{ij} g_j, \end{aligned}$$

et l'intégrale d'une fonction g par rapport à une mesure μ s'écrit (si la somme converge absolument)

$$\mu g = \sum_{i \in E} \mu_i g_i$$

Proposition 2.1.6. *Soit $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ une chaîne de Markov (μ, P) . Alors*

$$(i) \quad \mathbb{P}(X_n = j / X_0 = i) = \mathbb{P}(X_{n+p} = j / X_p = i) = (P^n)_{ij}$$

- (ii) $\mathbb{P}(X_n = j) = (\mu P^n)_j$
 (iii) $\mathbb{E}[g(X_n)/X_0 = i] = (P^n g)_i$

PREUVE:

(i)

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X_n = j/X_0 = i) &= \sum_{i_1, \dots, i_{n-1}} \mathbb{P}(X_n = j, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1/X_0 = i) \\
 &= \sum_{i_1, \dots, i_{n-1}} \frac{\mu_i P_{ii_1} \times \dots \times P_{i_{n-1}j}}{\mu_i} \\
 &= \sum_{i_1, \dots, i_{n-1}} P_{ii_1} \times \dots \times P_{i_{n-1}j} \\
 &= (P^n)_{ij}
 \end{aligned}$$

(ii) On remarque que

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X_n = j) &= \sum_{i \in E} \mathbb{P}(X_n = j, X_0 = i) \\
 &= \sum_{i \in E} \mathbb{P}(X_n = j/X_0 = i) \mu_i,
 \end{aligned}$$

et on utilise (i).

(iii) On utilise à nouveau (i) à partir de :

$$\mathbb{E}[g(X_n)/X_0 = i] = \sum_{j \in E} g_j \mathbb{P}(X_n = j/X_0 = i)$$

2.2 Exemples

2.2.1 Marche aléatoire sur $E = \mathbf{Z}^d$

Soit $\{Y_n; n \in \mathbb{N}^*\}$ une suite de v.a. i.i.d. à valeurs dans \mathbf{Z}^d , de loi commune λ , et X_0 une v.a. à valeurs dans \mathbf{Z}^d indépendantes (Y_n). Alors

$$X_{n+1} = X_n + Y_{n+1}, \in \mathbb{N}$$

est une chaîne de Markov (μ, P) , avec μ =loi de X_0 , et $P_{ij} = \lambda_{j-i}$. Le cas le plus classique des marches aléatoires dans \mathbf{Z}^d est le cas des marches aléatoires symétriques partant de 0, i.e.

$$\mu = \delta_0$$

$$\lambda_{\pm e_1} = \frac{1}{2d},$$

où (e_1, \dots, e_d) est une base orthonormée de \mathbb{R}^d .

Remarquer que dans la section 2.9 (formule de Black–Scholes) ci-dessous, S_n est une marche aléatoire multiplicative à valeurs dans

$$E = \{u^k d^\ell; k, \ell \in \mathbb{N}\}.$$

2.2.2 Processus de Galton–Watson

C'est un processus de branchement $\{Z_n; n \in \mathbb{N}\}$ où Z_n désigne le nombre d'individus de sexe mâle de la n -ième génération portant un nom donné, ces individus étant tous issus d'un même ancêtre, l'unique mâle formant la génération 0 ($Z_0 = 1$ p.s.). On suppose que chacun des mâles de la n -ième génération engendre ξ_i^n enfants mâles ($1 \leq i \leq Z_n$) de telle sorte que

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} \xi_i^n.$$

Notre hypothèse fondamentale est que les v.a. $\{\xi_i^n, i = 1, 2, \dots, n = 0, 1, 2, \dots\}$ sont i.i.d., de telle sorte que en particulier Z_n et $\{\xi_1^n, \dots, \xi_p^n, \dots\}$ sont indépendants.

Les $\{Z_n, n \in \mathbb{N}\}$ forment une chaîne de Markov (μ, P) , à valeurs dans \mathbb{N} , avec $\mu = \delta_1$,

$$P_{ij} = (p^{*i})_j,$$

où p^{*i} , la i -ème puissance de convolution de la loi p sur \mathbb{N} des ξ_n^k , i.e. la loi de la somme de i v.a. i.i.d. de loi commune p .

2.2.3 File d'attente en temps discret

On considère une file d'attente qui se forme à un guichet. X_n désigne le nombre de clients dans la file en attente ou en train de se faire servir à l'instant n . Entre les instants n et $n+1$ arrivent Y_{n+1} clients, et si $X_n > 0$ partent Z_{n+1} clients. On suppose que $X_0, Y_1, Z_1, Y_2, Z_2 \dots$ sont indépendantes, vérifiant $0 < \mathbb{P}(Y_n = 0) < 1$, et les Z_n vérifiant $\mathbb{P}(Z_n = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(Z_n = 0)$. C'est à dire que

$$X_{n+1} = X_n + Y_{n+1} - \mathbf{1}_{\{X_n > 0\}} Z_{n+1}.$$

2.3 Propriété de Markov forte

Soit $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ une chaîne de Markov à valeurs dans E , définie sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Etant donné μ une probabilité sur E , on notera \mathbb{P}_μ toute probabilité sur (Ω, \mathcal{F}) de telle sorte que sous \mathbb{P}_μ la loi de X_0 soit μ , i.e.

$$\mathbb{P}_\mu(X_0 = i) = \mu_i, \quad i \in E.$$

Dans le cas $\mu = \delta_i$, on notera \mathbb{P}_i pour \mathbb{P}_{δ_i} . \mathbb{P}_i s'interprète comme la probabilité conditionnelle, sachant que $X_0 = i$. Pour tout $n \geq 0$, on notera \mathcal{F}_n la tribu des événements "déterminés par X_0, X_1, \dots, X_n ", i.e.

$$\mathcal{F}_n = \{\{\omega; (X_0(\omega), \dots, X_n(\omega)) \in B_n\}, B_n \in \mathcal{P}(E^{n+1})\}.$$

Théorème 2.3.1. *Soit $\{X_n; n \geq 0\}$ une chaîne de Markov (μ, P) . Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $i \in E$ conditionnellement en $\{X_n = i\}$, $\{X_{n+p}; p \geq 0\}$ est une chaîne de Markov (δ_i, P) indépendante de (X_0, \dots, X_n) , autrement dit pour tout $A \in \mathcal{F}_n$ et pour tout $m > 0$, $i_1, \dots, i_m \in E$,*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap \{X_{n+1} = i_1, \dots, X_{n+m} = i_m\} / X_n = i) \\ = \mathbb{P}(A / X_n = i) \mathbb{P}_i(X_1 = i_1, \dots, X_m = i_m) \end{aligned}$$

PREUVE:

Il suffit de faire la preuve dans le cas $A = \{X_0 = j_0, X_1 = j_1, \dots, X_n = j_n\}$ (A est une réunion au plus dénombrable d'événements disjoints de cette forme, et le cas général s'en déduira donc par la σ -additivité de \mathbb{P}). Il suffit de considérer le cas $j_n = i$, car dans le cas contraire les deux membres de l'égalité sont nuls. Le membre de gauche de l'égalité de l'énoncé vaut

$$\frac{\mathbb{P}(X_0 = j_0, \dots, X_n = i, X_{n+1} = i_1, \dots, X_{n+m} = i_m)}{\mathbb{P}(X_n = i)}$$

ce qui vaut, en appliquant deux fois la Proposition 2.1.4,

$$\frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(X_n = i)} \times P_{ii_1} \times P_{i_1 i_2} \times \dots \times P_{i_{m-1} i_m},$$

soit

$$\mathbb{P}(A / X_n = i) \mathbb{P}_i(X_1 = i_1, \dots, X_m = i_m).$$

□

Le résultat précédent dit en particulier que le passé et le futur sont conditionnellement indépendants, sachant la position de la chaîne à l'instant présent n .

Nous allons maintenant étendre la propriété de Markov en remplaçant l'instant fixe n par un instant aléatoire qui vérifie une propriété particulière.

Définition 2.3.2. Une v.a. T à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ est appelée un **temps d'arrêt** si $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\{T = n\} \in \mathcal{F}_n.$$

Autrement dit, l'observation de X_0, X_1, \dots, X_n , la chaîne jusqu'à l'instant n , permet de décider si oui ou non T vaut n .

Exemple 2.3.3. i) $\forall i \in n$, l'instant S_i du premier passage à l'état i :

$$S_i = \begin{cases} \inf\{n \geq 0; X_n = i\} & \text{si un tel } n \text{ existe,} \\ +\infty, & \text{sinon;} \end{cases}$$

est un temps d'arrêt, ainsi que l'instant du "premier retour" à l'état i :

$$T_i = \begin{cases} \inf\{n \geq 1; X_n = i\} & \text{si un tel } n \text{ existe,} \\ +\infty, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque 2.3.4. Avec la convention que l'inf de l'ensemble vide vaut $+\infty$, il est inutile de définir ces temps sur deux lignes :

$$T_i = \inf\{n \geq 1; X_n = i\}.$$

T_i est bien un temps d'arrêt, puisque

$$\{T_i = n\} = \{X_1 \neq i\} \cap \dots \cap \{X_{n-1} \neq i\} \cap \{X_n = i\}.$$

ii) $\forall A \subset E$, le temps d'atteinte de A

$$T_A = \inf\{n \geq 1; X_n \in A\}$$

est un temps d'arrêt.

iii) Par contre, l'instant de dernier passage en A

$$L_A = \sup\{n \geq 1; X_n \in A\}$$

n'est pas un temps d'arrêt.

On notera \mathcal{F}_T la tribu des événements “déterminés par X_0, X_1, \dots, X_T ”, définie comme la tribu des événements $B \in \mathcal{F}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$B \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n.$$

Théorème 2.3.5. (*Propriété de Markov forte*) Soit $\{X_n : n \geq 0\}$ une chaîne de Markov (μ, P) , et T un temps d'arrêt. Conditionnellement en $\{T < \infty\} \cap \{X_T = i\}$, $\{X_{T+n}; n \geq 0\}$ est une chaîne de Markov (δ_i, P) indépendante de (X_0, X_1, \dots, X_T) . Autrement dit, pour tout $A \in \mathcal{F}_T$, et pour tout $m > 0$, $i_1, \dots, i_m \in E$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(A \cap \{X_{T+1} = i_1, \dots, X_{T+m} = i_m\} / X_T = i, T < \infty) \\ &= \mathbb{P}(A / X_T = i, T < \infty) \times \mathbb{P}_i(X_1 = i_1, \dots, X_m = i_m) \end{aligned}$$

PREUVE: Il suffit de montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(A \cap \{T = n\} \cap \{X_{T+1} = i_1, \dots, X_{T+m} = i_m\} / X_T = i) \\ &= \mathbb{P}(A \cap \{T = n\} / X_T = i) \mathbb{P}_i(X_1 = i_1, \dots, X_m = i_m), \end{aligned}$$

ce qui résulte du Théorème 2.3.1.

2.4 Etats récurrents et transitoires

On définit comme ci-dessus

$$T_i = \inf\{n \geq 1; X_n = i\}, \text{ et on pose la}$$

Définition 2.4.1. L'état $i \in E$ est dit **récurrent** si $\mathbb{P}_i(T_i < \infty) = 1$, et **transitoire** dans le cas contraire (i.e. si $\mathbb{P}_i(T_i < \infty) < 1$).

On définit le nombre de retours à l'état i :

$$N_i = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{\{X_n = i\}}$$

Proposition 2.4.2. a) Si i est récurrent,

$$\mathbb{P}_i(N_i = +\infty) = 1.$$

b) Si i est transitoire,

$$\mathbb{P}_i(N_i = k) = (1 - \Pi_i)\Pi_i^k, \quad k \geq 0,$$

avec $\Pi_i = \mathbb{P}_i(T_i < \infty)$ (en particulier $N_i < \infty$ \mathbb{P}_i p.s.)

PREUVE: Posons

$$\begin{aligned} T_i^2 &= \inf\{n > T_i, X_n = i\} \\ &= T_i + \inf\{n > 0, X_{T_i+n} = i\}. \end{aligned}$$

On vérifie (exercice) que T_i^2 est un temps d'arrêt.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_i(T_i^2 < \infty) &= \mathbb{P}_i(T_i^2 < \infty / T_i < \infty) \mathbb{P}_i(T_i < \infty) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_i(T_i^2 = T_i + n / T_i < \infty) \mathbb{P}_i(T_i < \infty). \end{aligned}$$

Mais, en utilisant le Théorème 2.3.5 on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_i(T_i^2 = T_i + n / T_i < \infty) &= \mathbb{P}_i(X_{T_i+1} \neq i, \dots, X_{T_i+n-1} \neq i, X_{T_i+n} = i / T_i < \infty) \\ &= \mathbb{P}_i(X_1 \neq i, \dots, X_{n-1} \neq i, X_n = i) \\ &= \mathbb{P}_i(T_i = n) \end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_i(T_i^2 < \infty) &= (\mathbb{P}_i(T_i < \infty))^2, \text{ soit} \\ \mathbb{P}_i(N_i \geq 2) &= (\mathbb{P}_i(T_i < \infty))^2, \end{aligned}$$

et on montre en itérant le même argument que

$$\mathbb{P}_i(N_i \geq k) = (\mathbb{P}_i(T_i < \infty))^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Les deux parties de la Proposition se déduisent aisément de cette relation.

Corollaire 2.4.3. *L'état i est récurrent ssi*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (P^n)_{ii} = +\infty$$

PREUVE:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_i(N_i) &= \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}_i(X_n = i) \\ &= \sum_{n \geq 1} (P^n)_{ii}\end{aligned}$$

D'après la proposition, cette quantité est infinie lorsque i est récurrent. Mais si i est transitoire,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_i(N_i) &= \sum_{k=1}^{\infty} k(1 - \Pi_i)\Pi_i^k \\ &= \prod_i (1 - \Pi_i)^{-1} < \infty\end{aligned}$$

Définition 2.4.4. On dit que l'état j est **accessible** à partir de i (noté $i \rightarrow j$) s'il existe $n \geq 0$ tel que $\mathbb{P}_i(X_n = j) > 0$. On dit que les états i et j **communiquent** (noté $i \leftrightarrow j$) si $i \rightarrow j$ et $j \rightarrow i$.

La relation $i \leftrightarrow j$ est une relation d'équivalence (exercice), et on peut donc partitionner E en classes d'équivalence modulo la relation \leftrightarrow .

Notons que $i \rightarrow j \Leftrightarrow \exists n \geq 0$ t.q. $(P^n)_{ij} > 0$, puisque $\mathbb{P}_i(X_n = j) = (P^n)_{ij}$ (Proposition 2.1.6(i)).

Théorème 2.4.5. Soit $C \subset E$ une classe d'équivalence pour la relation \leftrightarrow . Alors tous les états de C sont soit récurrents soit transitoires.

PREUVE: Soit $i, j \in C$. Il suffit de montrer que i transient $\Rightarrow j$ transient (car alors par l'absurde j récurrent $\Rightarrow i$ récurrent). Comme $i \leftrightarrow j$, d'après la dernière remarque $\exists n, m > 0$ t.q. $(P^n)_{ij} > 0$ et $(P^m)_{ji} > 0$. Mais $\forall r \geq 0$,

$$(P^{n+r+m})_{ii} \geq (P^n)_{ij}(P^r)_{jj}(P^m)_{ji}$$

et

$$\sum_{r=0}^{\infty} (P^r)_{jj} \leq \frac{1}{(P^n)_{ij}(P^m)_{ji}} \sum_{n=0}^{\infty} (P^{n+r+m})_{ii} < \infty.$$

Exercice 2.4.6. Montrer que si i est récurrent, alors $\sum_{n \geq 0} (P^n)_{ij} = +\infty$ ssi $i \leftrightarrow j$, = 0 ssi $i \not\leftrightarrow j$.

Définition 2.4.7. Une chaîne de Markov (μ, P) est dite **irréductible** si E est constitué d'une unique classe d'équivalence. Elle est dite **récurrente irréductible** si elle est irréductible et si tous les états sont récurrents.

Proposition 2.4.8. Toute chaîne de Markov irréductible sur un espace fini E est récurrente irréductible.

PREUVE: Par l'absurde, puisque E est fini, il y a au moins un état qui est visité une infinité de fois avec une probabilité non nulle, donc p.s. d'après la dichotomie de la Proposition 2.4.2, et cet état (donc tous les états) est (sont) récurrent(s).

2.5 Chaînes de Markov récurrentes irréductibles

Dans cette section, on suppose la chaîne irréductible récurrente. Nous allons commencer par étudier les **excursions** successives de la chaîne entre deux retours successifs à l'état i :

$$\mathcal{E}_k = (X_{T_i^k}, X_{T_i^{k+1}}, \dots, X_{T_i^{k+1}}), \quad k \geq 0.$$

Ces excursions sont des suites aléatoires de longueur aléatoire finie ≥ 2 , formées d'états de E distincts de i , sauf le premier et le dernier qui sont égaux à i . Notons U l'ensemble des suites

$$u = (i, i_1, \dots, i_n, i),$$

avec $n \geq 0$, $i_\ell \neq i$, $1 \leq \ell \leq n$. U est dénombrable, et constitue l'ensemble des valeurs possible des excursions $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots$. Ces v.a. prennent donc leurs valeurs dans un ensemble dénombrable, et leur loi de probabilité est caractérisée par les quantités

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}_k = u), \quad u \in U.$$

Proposition 2.5.1. Sous \mathbb{P}_i la suite $(\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots)$ des excursions est i.i.d., c'est à dire qu'il existe une probabilité $\{p_u, u \in U\}$ telle que pour tout $k > 0$, $u_0, \dots, u_k \in U$,

$$\mathbb{P}_i(\mathcal{E}_0 = u_0, \mathcal{E}_1 = u_1, \dots, \mathcal{E}_k = u_k) = \prod_{\ell=0}^k p_{u_\ell}.$$

PREUVE: C'est une conséquence de la propriété de Markov forte. En effet, $\{\mathcal{E}_0 = u_0\} \in \mathcal{F}_{T_i}$, et l'événement

$$\{\mathcal{E}_1 = u_1, \dots, \mathcal{E}_k = u_k\}$$

est de la forme

$$\{X_{T_i+1} = i_1, \dots, X_{T_i+p} = i\},$$

pour $p > 0$, $i_1, \dots, i_p \in E$. Donc

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_i(\mathcal{E}_0 = u_0, \mathcal{E}_1 = u_1, \dots, \mathcal{E}_k = u_k) \\ &= \mathbb{P}_i(\{\mathcal{E}_0 = u_0\} \cap \{X_{T_i+1} = i_1, \dots, X_{T_i+p} = i\} / T_i < \infty) \\ &= \mathbb{P}_i(\mathcal{E}_0 = u_0) \mathbb{P}_i(X_1 = i_1, \dots, X_p = i) \\ &= \mathbb{P}_i(\mathcal{E}_0 = u_0) \mathbb{P}_i(\mathcal{E}_0 = u_1, \dots, \mathcal{E}_{k-1} = u_k) \\ &= \mathbb{P}_i(\mathcal{E}_0 = u_0) \mathbb{P}_i(\mathcal{E}_0 = u_1) \times \dots \times \mathbb{P}_i(\mathcal{E}_0 = u_k) \\ &= p_{u_0} p_{u_1} \times \dots \times p_{u_k}, \end{aligned}$$

si $\{p_u, u \in U\}$ est la loi de \mathcal{E}_0 sous \mathbb{P}_i . □

On appelle mesure sur E un "vecteur ligne" $\{\gamma_i; i \in E\}$ tel que $0 \leq \gamma_i < \infty$, $\forall i$. Dans le cas où la mesure est finie, $\sum_{i \in E} \gamma_i < \infty$, on peut la normaliser pour en faire une probabilité sur E , $\left(\frac{\gamma_i}{\sum_k \gamma_k}, i \in E\right)$. Une mesure γ est dite invariante (par la matrice de transition P) si

$$\gamma P = \gamma, \text{ i.e.}$$

$$\sum_{j \in E} \gamma_j P_{ji} = \gamma_i, i \in E.$$

Une mesure γ sera dite strictement positive si $\gamma_i > 0$, $\forall i \in E$.

Une mesure de probabilité γ est invariante ssi la chaîne (γ, P) a la propriété que γ est la loi de X_n , $\forall n \in \mathbb{N}$, donc $\forall n$, $\{X_{n+m}; m \in \mathbb{N}\}$ est une chaîne (γ, P) .

Remarque 2.5.2. Soit π une probabilité invariante, c'est à dire une probabilité qui vérifie $\pi P = \pi$, ou encore $\forall i \in E$,

$$\sum_{j \neq i} \pi_j P_{ji} = \pi_i (1 - P_{ii}),$$

soit

$$\mathbb{P}(X_n \neq i, X_{n+1} = i) = \mathbb{P}(X_n = i, X_{n+1} \neq i),$$

ce qui signifie qu'à l'équilibre, le nombre moyen de départs de l'état i entre les instants n et $n + 1$ est égal au nombre moyen d'arrivées à l'état i entre n et $n + 1$. On voit que l'équation qui caractérise la probabilité invariante est très intuitive.

Théorème 2.5.3. Soit $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ une chaîne de matrice de transition P récurrente irréductible. Alors il existe une mesure strictement positive invariante γ , unique à une constante multiplicative près.

PREUVE:

Existence Posons $\gamma_j^i =$ nombre moyen de visites à l'état j lors de l'excursion \mathcal{E}_0 partant de i , soit

$$\begin{aligned} \gamma_j^i &= \mathbb{E}_i \sum_{n=1}^{T_i} \mathbf{1}_{\{X_n=j\}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_i(X_n = j, n \leq T_i) \\ &= \sum_{k \in E} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_i(\{X_{n-1} = k, n-1 < T_i\} \cap \{X_n = j\}) \\ &= \sum_{k \in E} \left(\sum_{n=2}^{\infty} \mathbb{P}_i(X_{n-1} = k, n-1 \leq T_i) \right) P_{kj} \\ &= (\gamma^i P)_j. \end{aligned}$$

En outre, $\exists n, m$ tels que $(P^n)_{ij} > 0$, $(P^m)_{ji} > 0$. Donc, puisque $\gamma_i^i = 1$,

$$\begin{aligned} 0 &< (P^n)_{ij} = \gamma_i^i (P^n)_{ij} \leq \gamma_j^i \\ 0 &< (P^n)_{ij} = \gamma_i^i (P^n)_{ij} \leq (\gamma^i P^n)_j = \gamma_j^i \\ \gamma_j^i (P^m)_{ji} &\leq (\gamma^i P^m)_i = \gamma_i^i = 1. \end{aligned}$$

Donc γ^i est bien une mesure strictement positive, qui vérifie $\gamma_i^i = 1$.

Unicité Soit λ invariante telle que $\lambda_i = 1$. On va montrer que $\lambda \geq \gamma^i$, puis que $\lambda = \gamma^i$, la première partie utilisant seulement l'irréductibilité, et la seconde la récurrence.

$$\begin{aligned}
 \lambda_j &= P_{ij} + \sum_{k_1 \neq i} \lambda_{k_1} P_{k_1 j} \\
 &= P_{ij} + \sum_{k_1 \neq i} P_{i k_1} P_{k_1 j} + \sum_{k_1, k_2 \neq i} \lambda_{k_2} P_{k_2 k_1} P_{k_1 j} \\
 &\geq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k_1, \dots, k_n \neq i} P_{i k_n} P_{k_n k_{n-1}} \times \dots \times P_{k_1 j} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_i(X_{n+1} = j, T_i \geq n+1) \\
 &= \gamma_j^i.
 \end{aligned}$$

Donc $\mu = \lambda - \gamma^i$ est aussi une mesure invariante, et $\mu_i = 0$. Soit $j \in E$, et n tel que $(P^n)_{ji} > 0$. Alors

$$0 = \mu_i = \sum_{k \in E} \mu_k (P^n)_{ki} \geq \mu_j (P^n)_{ji}.$$

Donc $\mu_j = 0$, et ceci $\forall j \in E$. □

On a vu qu'un état i est récurrent si

$$\mathbb{P}_i(T_i < \infty) = 1.$$

Posons $m_i = \mathbb{E}_i(T_i)$.

Si cette quantité est finie, l'état i est dit **récurrent positif**, et sinon **récurrent nul**.

Théorème 2.5.4. *On se place à nouveau dans le cas irréductible. Un état i est récurrent positif ssi tous les états sont récurrent positifs, ssi il existe une probabilité invariante, et dans ce cas elle est donnée par $\pi = (\pi_i = \frac{1}{m_i}, i \in E)$.*

PREUVE: Notons que

$$m_i = \sum_{j \in E} \gamma_j^i$$

Donc si i est récurrent positif, la probabilité $\pi = (\pi_j = \frac{\gamma_j^i}{m_i}, j \in E)$ est une probabilité invariante.

Réciproquement, si π est une probabilité invariante, et i un état arbitraire, $\lambda = \left(\lambda_j = \frac{\pi_j}{\pi_i}, j \in E\right)$ est une mesure invariante qui vérifie $\lambda_i = 1$.

Donc d'après l'irréductibilité et la première étape de la preuve de l'unicité dans le Théorème 2.5.3,

$$m_i = \sum_{j \in E} \gamma_j^i \leq \sum_{j \in E} \frac{\pi_j}{\pi_i} = \frac{1}{\pi_i} < \infty.$$

Donc l'état i , comme tous les états, est récurrent positif. \square

La dichotomie suivante résulte des deux théorèmes précédents : dans le cas *récurrent irréductible*, la chaîne est *récurrente positive* s'il existe une *probabilité invariante, récurrente nulle* si toute *mesure invariante* est de *masse infinie* ($\sum_i \pi_i = +\infty$). En particulier, si $|E| < \infty$, il n'existe pas d'état récurrent nul, tout état récurrent est récurrent positif.

Corollaire 2.5.5. *Soit $\{X_n\}$ une chaîne de Markov irréductible, récurrente positive. Pour tout $i \in E$, on pose $T_i = \inf\{n > 0, X_n = i\}$. Alors pour tout $j \in E$,*

$$\mathbb{E}_j(T_i) < \infty.$$

PREUVE: Remarquons que

$$T_i \geq T_i \mathbf{1}_{\{T_j < T_i\}},$$

d'où en prenant l'espérance sous \mathbb{P}_i ,

$$m_i \geq \mathbb{E}_i(T_i | T_j < T_i) \mathbb{P}_i(T_j < T_i).$$

Mais il résulte de propriété de Markov forte que $\mathbb{E}_i(T_i | T_j < T_i) > \mathbb{E}_j(T_i)$, et de l'irréductibilité que $\mathbb{P}_i(T_j < T_i) > 0$. Le résultat est établi. \square

Remarque 2.5.6. Cas non irréductible. *Limitons nous pour simplifier au cas $|E| < \infty$. Il existe au moins une classe récurrente (nécessairement récurrente positive), donc il existe au moins une probabilité invariante. Toute*

probabilité invariante ne charge que les états récurrents. S'il y a une seule classe récurrente, alors la chaîne possède une et une seule probabilité invariante. Sinon, à chaque classe récurrente on associe une unique probabilité invariante dont le support est cette classe, et toutes les mesures invariantes s'obtiennent comme combinaison linéaire convexe des précédentes. Donc dès qu'il existe au moins deux classes récurrentes, il y a une infinité non dénombrable de probabilités invariantes.

Revenons au cas irréductible. On peut maintenant établir le théorème ergodique, qui constitue une généralisation de la loi des grands nombres.

Théorème 2.5.7. *Supposons la chaîne irréductible et récurrente positive. Si $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est bornée, alors*

$$\mathbb{P} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) \rightarrow \sum_{i \in E} \pi_i f_i, n \rightarrow \infty \right) = 1,$$

où $\pi = (\pi_i, i \in E)$ désigne l'unique probabilité invariante.

PREUVE:

Définissons

$$N_i(n) = \sum_{1 \leq k \leq n} \mathbf{1}_{\{X_k=i\}},$$

le nombre de retours à l'état i avant l'instant n . On veut étudier les limites quand $n \rightarrow \infty$ de

$$\frac{N_i(n)}{n}.$$

Désignons par $S_i^0, S_i^1, \dots, S_i^k, \dots$ les longueurs des excursions $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_k, \dots$ partant de i . On a

$$S_i^0 + \dots + S_i^{N_i(n)-1} \leq n < S_i^0 + \dots + S_i^{N_i(n)}.$$

Donc

$$\frac{S_i^0 + \dots + S_i^{N_i(n)-1}}{N_i(n)} \leq \frac{n}{N_i(n)} \leq \frac{S_i^0 + \dots + S_i^{N_i(n)}}{N_i(n)}$$

Mais par le caractère i.i.d. des \mathcal{E}_k (donc aussi des S_i^k),

$$\frac{S_i^0 + \dots + S_i^{N_i(n)}}{N_i(n)} \rightarrow \mathbb{E}_i(T_i) = m_i \quad \mathbb{P}_i \text{ p.s.}$$

Comme $N_i(n) \rightarrow +\infty$ \mathbb{P}_i p.s.,

$$\frac{n}{N_i(n)} \rightarrow m_i \quad \mathbb{P}_i \text{ p.s.}$$

$$\frac{N_i(n)}{n} \rightarrow \frac{1}{m_i} \quad \mathbb{P}_i \text{ p.s.}$$

Cette convergence a également lieu \mathbb{P}_μ p.s., $\forall \mu$ loi initiale, puisque les limites de $\frac{N_i(n)}{n}$ sont les mêmes pour la chaîne $\{X_n; n \geq 0\}$ et pour la chaîne $\{X_{T_i+n}; n \geq 0\}$.

Soit maintenant $F \subset E$. On note $\bar{f} = \sum_{i \in E} \pi_i f_i$, $c = \sup_i |f_i|$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} \sum_0^{n-1} f(X_k) - \bar{f} \right| &\simeq \left| \sum_{i \in E} \left(\frac{N_i(n)}{n} - \pi_i \right) f_i \right| \left(= \left| \frac{1}{n} \sum_1^n f(X_k) - \bar{f} \right| \right) \\ &\leq c \sum_{i \in F} \left| \frac{N_i(n)}{n} - \pi_i \right| + c \sum_{i \notin F} \left(\frac{N_i(n)}{n} + \pi_i \right) \\ &= c \sum_{i \in F} \left| \frac{N_i(n)}{n} - \pi_i \right| + c \sum_{i \in F} \left(\pi_i - \frac{N_i(n)}{n} \right) + 2c \sum_{i \notin F} \pi_i \\ &\leq 2c \sum_{i \in F} \left| \frac{N_i(n)}{n} - \pi_i \right| + 2c \sum_{i \notin F} \pi_i \end{aligned}$$

On choisit F fini tel que $\sum_{i \notin F} \pi_i \leq \frac{\varepsilon}{4c}$, puis $N(\omega)$ tel que $\forall n \geq N(\omega)$,

$$\sum_{i \in F} \left| \frac{N_i(n)}{n} - \pi_i \right| \leq \frac{\varepsilon}{4c},$$

et le résultat est établi. □

On va maintenant établir un théorème de la limite centrale, en nous limitant - pour simplifier - au cas E fini.

Théorème 2.5.8. *Soit $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ une chaîne de Markov à valeurs dans E fini, de matrice de transition P irréductible. Soit π l'unique probabilité invariante de la chaîne, et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que*

$$\pi f = \sum_{i \in E} \pi_i f_i = 0.$$

Alors il existe $\sigma_f \geq 0$ tel que, quand $n \rightarrow \infty$,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_0^{n-1} f(X_k) \text{ converge en loi vers } \sigma_f Z,$$

où $Z \simeq N(0, 1)$.

PREUVE:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_1^n f(X_k) &= \sum_{i \in E} \sqrt{n} f_i \left(\frac{N_i(n)}{n} - \pi_i \right) \\ &= \sum_{i \in E} \pi_i f_i \sqrt{\frac{N_i(n)}{n}} \left(\frac{\sqrt{N_i(n)}}{\pi_i} - \frac{n}{\sqrt{V_i(n)}} \right) \end{aligned}$$

Par le même raisonnement que dans la preuve du théorème ergodique, cette dernière quantité se comporte quand $n \rightarrow \infty$ comme

$$- \sum_{i \in E} \pi_i f_i \sqrt{\frac{N_i(n)}{n}} \times \frac{\bar{S}_i^0 + \dots + \bar{S}_i^{N_i(n)}}{\sqrt{N_i(n)}},$$

avec $\bar{S}_i^k = S_i^k - \frac{1}{\pi_i}$.

Par le théorème de la limite centrale pour les v.a. i.i.d., le vecteur dont la i -ième coordonnée est

$$\frac{\bar{S}_i^0 + \dots + \bar{S}_i^{N_i(n)}}{\sqrt{N_i(n)}}$$

converge en loi quand $n \rightarrow \infty$ vers un vecteur aléatoire gaussien centré. En outre, on a les convergences p.s.

$$\frac{N_i(n)}{n} \rightarrow \pi_i, \quad i \in E.$$

On en déduit la convergence en loi de la somme ci-dessus vers une v.a. gaussienne centrée. \square

Le calcul de la variance σ_f^2 ne se déduit pas aisément de la preuve ci-dessus. On va donner - sans démonstration - une formule pour σ_f^2 . Sous les hypothèses du théorème, la quantité suivante est bien définie (grâce au Théorème 2.6.6) :

$$(Qf)_i = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_i[f(X_n)], \quad i \in E.$$

Notons que

$$(I - P)Qf = f.$$

On a

$$\begin{aligned} \sigma_f^2 &= \sum_{i \in E} \pi_i (Qf)_i^2 - \sum_i \pi_i (PQf)_i^2 \\ &= 2 \sum_i \pi_i (Qf)_i f_i - \sum_i \pi_i f_i^2. \end{aligned}$$

2.6 Le cas irréductible, récurrent positif et apériodique

On vient de montrer en particulier que dans le cas irréductible récurrent positif,

$$\frac{1}{n} \sum_0^{n-1} \mathbf{1}_{\{X_k=j\}} \rightarrow \pi_j \text{ p.s. ,}$$

quand $n \rightarrow \infty$. En prenant l'espérance sous \mathbb{P}_i , on obtient que

$$\frac{1}{n} \sum_0^{n-1} (P^k)_{ij} \rightarrow \pi_j, \quad \forall i, j \in E.$$

On voit que les moyennes de Césaro des $(P^k)_{ij}$ convergent. On peut se poser la question : est-ce que

$$(P^n)_{ij} \rightarrow \pi_j, \quad \forall i, j \in E \quad ?$$

Il est facile de voir que ce n'est pas toujours le cas sous l'hypothèse irréductible et récurrent positif.

Considérons une marche aléatoire sur $E = \mathbf{Z}/N$, N entier pair (i.e. on identifie 0 et N)

$$X_n = X_0 + Y_1 + \cdots + Y_n,$$

avec les Y_n i.i.d. à valeurs dans $\{-1, 1\}$, autrement dit

$$X_n = (X_0 + Y_1 + \cdots + Y_n) \bmod N.$$

Cette chaîne est irréductible, et récurrente positive car E est fini. Mais $(P^{2k+1})_{ii} = 0$, pour tout $i \in E$.

Pour espérer avoir la convergence souhaitée, il faut faire une hypothèse supplémentaire

2.6. LE CAS IRRÉDUCTIBLE, RÉCURRENT POSITIF ET APÉRIODIQUE 49

Définition 2.6.1. Un état $i \in E$ est dit **apériodique** si $\exists N$ tel que $(P^n)_{ii} > 0$, pour tout $n \geq N$.

Lemme 2.6.2. Si P est irréductible et s'il existe un état apériodique i , alors $\forall j, k \in E, \exists M$ tel que $(P^n)_{jk} > 0, \forall n \geq M$. En particulier, tous les états sont apériodiques.

PREUVE: D'après l'irréductibilité $\exists r, s \in \mathbb{N}$ tels que $(P^r)_{ji} > 0, (P^s)_{ik} > 0$. En outre

$$(P^{r+n+s})_{jk} \geq (P^r)_{ji}(P^n)_{ii}(P^s)_{ik} > 0,$$

dès que $n \geq N$. Donc on a la propriété désirée avec $M = N + r + s$.

Remarque 2.6.3. Plaçons nous dans le cas irréductible, récurrent positif. Soit π la probabilité invariante. $\pi_j > 0, \forall j \in E$. Donc $(P^n)_{ij} > 0$ à partir d'un certain rang N est une CN pour que $(P^n)_{ij} \rightarrow \pi_j$. On va voir maintenant que c'est une CS.

Théorème 2.6.4. Supposons P irréductible, récurrent positif et apériodique. Soit π l'unique probabilité invariante. Alors si $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ est une chaîne de Markov $(\mu, P), \forall j \in E,$

$$\mathbb{P}(X_n = j) \rightarrow \pi_j, \quad n \rightarrow \infty,$$

soit

$$(\mu P^n)_j \rightarrow \pi_j,$$

pour toute loi initiale μ . En particulier, $\forall i, j \in E,$

$$(P^n)_{ij} \rightarrow \pi_j.$$

PREUVE: On va utiliser un argument de couplage. Soit $\{Y_n, n \in \mathbb{N}\}$ une chaîne de Markov (π, P) , indépendante de $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$, et $i \in E$ arbitraire. On pose

$$T = \inf\{n \geq 0; X_n = Y_n = i\}$$

Étape 1 Montrons que $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$.

$\{W_n = (X_n, Y_n); n \in \mathbb{N}\}$ est une chaîne de Markov à valeurs dans $E \times E$, de loi initiale λ (avec $\lambda_{(i,k)} = \mu_i \pi_k$), et de matrice de transition $\tilde{P}_{(i,k)(j,\ell)} = P_{ij} P_{k\ell}$. Comme P est apériodique, $\forall i, k, j, \ell$, pour n assez grand $(\tilde{P}^n)_{(i,k)(j,\ell)} =$

$(P^n)_{ij}(P^n)_{kl} > 0$. Donc \tilde{P} est irréductible. En outre, \tilde{P} possède la probabilité invariante

$$\tilde{\pi}_{(i,k)} = \pi_i \pi_k.$$

Donc, d'après le Théorème 2.5.4, \tilde{P} est récurrent positif. T est le premier temps de passage de la chaîne $\{W_n\}$ au point (i, i) ; il est donc fini p.s.

Étape 2 On pose

$$Z_n = \begin{cases} X_n, & n \leq T; \\ Y_n, & n > T. \end{cases}$$

On va maintenant montrer que $\{Z_n; n \in \mathbb{N}\}$ est une chaîne de Markov (μ, P) .

Notons que par la propriété de Markov forte, les deux processus $\{X_{T+n}; n \geq 0\}$ et $\{Y_{T+n}; n \geq 0\}$ sont des chaînes de Markov (δ_i, P) , indépendantes de (X_0, \dots, X_T) . Par conséquent, $\{Z_n, n \in \mathbb{N}\}$ est, comme $\{X_n\}$, une chaîne de Markov (μ, P) .

Étape 3 On va conclure. On a trois identités

$$\mathbb{P}(Z_n = j) = \mathbb{P}(X_n = j)$$

$$\mathbb{P}(Y_n = j) = \pi_j$$

$$\mathbb{P}(Z_n = j) = \mathbb{P}(X_n = j, n \leq T) + \mathbb{P}(Y_n = j, n > T)$$

Donc

$$\begin{aligned} |\mathbb{P}(X_n = j) - \pi_j| &= |\mathbb{P}(Z_n = j) - \mathbb{P}(Y_n = j)| \\ &\leq \mathbb{P}(n < T) \\ &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

quand $n \rightarrow \infty$.

□

On va maintenant préciser la vitesse de convergence dans le théorème précédent, sous une hypothèse supplémentaire, dite condition de Doeblin :

\exists une mesure non nulle m sur E , et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que

$$(D) \quad (P^{n_0})_{ij} \geq m_j, \quad \forall i, j \in E.$$

On notera dans la suite $\beta := \sum_{i \in E} m_i$.

Lemme 2.6.5. *Si P est irréductible et apériodique, et E fini, alors la condition (D) est satisfaite.*

PREUVE:

Choisissons $i \in E$. $\forall j \in E$, $\exists n_j$ tel que $n \geq n_j \Rightarrow (P^n)_{ji} > 0$. Posons $\bar{n} = \sup_{j \in E} n_j$, $\alpha = \inf_j (P^{\bar{n}})_{ji}$. Alors $\alpha > 0$, et $\forall j \in E$,

$$(P^{\bar{n}})_{ji} \geq \alpha.$$

Donc la condition (D) est satisfaite avec $n_0 = \bar{n}$ et $m_i = \alpha$; $m_j = 0$, $j \neq i$. □

Par ailleurs, la condition de Doeblin est très rarement satisfaite dans le cas $\text{card} E = +\infty$, car alors typiquement $\forall n \in \mathbb{N}$, $j \in E$,

$$\inf_{i \in E} (P^n)_{ij} = 0.$$

Théorème 2.6.6. *Supposons que P est irréductible et satisfait la condition (D). Alors P est apériodique, récurrente positive, et si π désigne sa probabilité invariante,*

$$\sum_{j \in E} |(P^n)_{ij} - \pi_j| \leq 2(1 - \beta)^{[n/n_0]}, \quad \forall i \in E, \quad n \in \mathbb{N},$$

où $[n/n_0]$ désigne la partie entière de n/n_0 .

Nous allons tout d'abord introduire un outil qui nous sera utile dans la preuve du théorème.

Définition 2.6.7. *On appelle couplage de deux probabilités p et q sur E tout couple aléatoire (X, Y) de deux v.a. à valeurs dans E , telles que p soit la loi de X et q celle de Y .*

Lemme 2.6.8. *Soit p et q deux probabilités sur E . On a l'égalité*

$$\|p - q\|_1 = 2 \inf_{(X,Y) \text{ couplage de } p, q} \mathbb{P}(X \neq Y).$$

PREUVE: : Tout d'abord, si (X, Y) est un couplage de p et q ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = Y) &= \sum_{i \in E} \mathbb{P}(X = Y = i) \\ &\leq \sum_{i \in E} p_i \wedge q_i, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \neq Y) &\geq 1 - \sum_{i \in E} p_i \wedge q_i \\ &= \sum_{i \in E} (p_i - q_i)^+, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\|p - q\|_1 &= \sum_{i \in E} |p_i - q_i| \\ &\leq 2\mathbb{P}(X \neq Y). \end{aligned}$$

D'un autre coté, posons $\alpha = \sum_{i \in E} p_i \wedge q_i$. Si ξ , U , V et W sont des v. a. indépendantes, avec $\mathbb{P}(\xi = 1) = 1 - \mathbb{P}(\xi = 0) = \alpha$, U de loi r t.q. $r_i = \alpha^{-1}p_i \wedge q_i$, V de loi \bar{p} t.q. $\bar{p}_i = (1 - \alpha)^{-1}(p_i - q_i)^+$, W de loi \bar{q} t.q. $\bar{q}_i = (1 - \alpha)^{-1}(q_i - p_i)^+$, alors

$$\begin{aligned}X &= \xi U + (1 - \xi)V, \\ Y &= \xi U + (1 - \xi)W \end{aligned}$$

réalise un couplage (X, Y) de p et q tel que $2\mathbb{P}(X \neq Y) = \|p - q\|_1$. \square

Preuve du théorème 2.6.6 : La condition (D) entraîne clairement le caractère apériodique.

Etape 1 On va tout d'abord montrer que pour toutes probabilités μ et ν sur E ,

$$\|\mu P^n - \nu P^n\|_1 \leq 2(1 - \beta)^{\lfloor n/n_0 \rfloor}. \quad (2.1)$$

Pour cela, d'après le Lemme 2.6.8, il suffit de construire un couplage (X_n, Y_n) des probabilités μP^n et νP^n , tel que

$$\mathbb{P}(X_n \neq Y_n) \leq (1 - \beta)^{\lfloor n/n_0 \rfloor}.$$

Supposons que $n = kn_0 + m$, avec $m < n_0$. Etant donné (X_0, Y_0) de loi $\mu \times \nu$ sur $E \times E$, pour $\ell = 0, 1, \dots, k - 1$, on définit $(X_{(\ell+1)n_0}, Y_{(\ell+1)n_0})$ en fonction de $(X_{\ell n_0}, Y_{\ell n_0})$ comme suit. On se donne une suite $\{\xi_\ell, U_\ell, V_\ell, \ell \geq 0\}$ de v.a. indépendantes, les ξ_ℓ de Bernoulli t.q. $\mathbb{P}(\xi_\ell = 1) = \beta = 1 - \mathbb{P}(\xi_\ell = 0)$, les U_ℓ de loi $\bar{m} = \beta^{-1}m$ et les V_ℓ de loi uniforme sur $[0, 1]$. On note enfin

$$Q_{ij} = (1 - \beta)^{-1}((P^{n_0})_{ij} - m_j),$$

et $f : E \times [0, 1] \rightarrow E$ telle que si V suit la loi uniforme sur $[0, 1]$, $f(i, V)$ suit la loi Q_i , $i \in E$. On pose alors

$$\begin{aligned} X_{(\ell+1)n_0} &= \xi_\ell U_\ell + (1 - \xi_\ell) f(X_{\ell n_0}, V_\ell) \\ Y_{(\ell+1)n_0} &= \xi_\ell U_\ell + (1 - \xi_\ell) f(Y_{\ell n_0}, V_\ell). \end{aligned}$$

Notons que l'on a bien construit un couplage $(X_{\ell n_0}, Y_{\ell n_0})$ de $\mu P^{\ell n_0}$ et $\nu P^{\ell n_0}$, pour $\ell = 0, \dots, k$, tel que

$$\mathbb{P}(X_{\ell n_0} \neq Y_{\ell n_0}) \leq \mathbb{P}(\cap_{m=0}^{\ell} \xi_m = 0) = (1 - \beta)^\ell.$$

Il reste à construire un couplage (X_n, Y_n) de μP^n et νP^n , tel que $\{X_n \neq Y_n\} \subset \{X_{kn_0} \neq Y_{kn_0}\}$, ce qui est facile.

Etape 2 Montrons maintenant que pour toute probabilité μ , $\{\mu P^n, n \geq 0\}$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach $\ell^1(E)$. Si $\nu = \mu P^m$, d'après (2.1),

$$\|\mu P^{n+m} - \mu P^n\|_1 = \|\nu P^n - \mu P^n\|_1 \leq 2c^{n-n_0},$$

où $c = (1 - \beta)^{1/n_0}$, d'où le résultat.

Etape 3 Il résulte de la 2ème étape que la suite de probabilités $\{\mu P^n, n \geq 0\}$ converge dans $\ell^1(E)$, vers une probabilité π sur E . Mais $\pi P = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu P^{n+1} = \pi$, donc π est invariante, et la chaîne est récurrente positive. En conséquence, d'après (2.1), pour toute probabilité μ sur E ,

$$\|\mu P^n - \pi\|_1 \leq 2(1 - \beta)^{\lfloor n/n_0 \rfloor},$$

ce qui établit la vitesse de convergence annoncée, et l'apériodicité.

2.7 Chaîne de Markov réversible

On se place dans le cas irréductible, récurrent positif. La formulation de la propriété de Markov "passé et futur sont conditionnellement indépendants sachant le présent" nous indique que si $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ est une chaîne de Markov, alors $\forall N, \{\hat{X}_n^N = X_{N-n}; 0 \leq n \leq N\}$ est aussi une chaîne de Markov. En général, la chaîne retournée n'est pas homogène, sauf si $\{X_n\}$ est initialisée avec sa probabilité invariante π .

Proposition 2.7.1. *Soit $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ une chaîne de Markov (π, P) , avec π probabilité invariante et P irréductible. Alors la chaîne retournée $\{\hat{X}_n^N; 0 \leq n \leq N\}$ est une chaîne de Markov (π, \hat{P}) , avec*

$$\pi_j \hat{P}_{ji} = \pi_i P_{ij}, \quad \forall i, j \in E$$

PREUVE:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\hat{X}_{p+1} = i / \hat{X}_p = j) \\ &= \mathbb{P}(X_n = i / X_{n+1} = j) \\ &= \mathbb{P}(X_{n+1} = j / X_n = i) \times \frac{\mathbb{P}(X_n = i)}{\mathbb{P}(X_{n+1} = j)}. \end{aligned}$$

□

On dit que la chaîne $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ est **réversible** si $\hat{P} = P$, ce qui a lieu si et seulement si la relation suivante dite d'“équilibre ponctuel” est satisfaite :

$$\pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji}, \quad \forall i, j \in E,$$

avec π probabilité invariante. Il est facile de vérifier que si une probabilité π satisfait cette relation, alors elle est invariante par P . La réciproque n'a aucune raison d'être vraie.

Remarque 2.7.2. *Si π est la probabilité invariante d'une chaîne irréductible (et donc aussi récurrente positive), la chaîne n'est pas nécessairement réversible par rapport à π . Supposons que $\text{card}E \geq 3$. Alors il peut exister $i \neq j$ t.q. $P_{ij} = 0 \neq P_{ji}$. D'où $\pi_i P_{ij} = 0 \neq \pi_j P_{ji}$. Les transitions de j à i de la chaîne initiale correspondent aux transitions de i à j de la chaîne retournée, donc $P_{ji} \neq 0 \Rightarrow \hat{P}_{ij} \neq 0$, d'où $\hat{P} \neq P$.*

Remarque 2.7.3. *Étant donné une matrice de transition d'une chaîne de Markov récurrente irréductible P , un problème classique est de calculer sa probabilité invariante.*

Un autre problème, qui apparaîtra au chapitre suivant, est de déterminer une matrice de transition P irréductible, dont la chaîne associée admette comme probabilité invariante une mesure π donnée.

Le second problème est facile à résoudre. En fait il existe un grand nombre de solutions. Le plus simple est de chercher P telle que la chaîne correspondante soit réversible par rapport à la mesure donnée π . Autrement dit, il

suffit de trouver une matrice markovienne irréductible P telle que la quantité $\pi_i P_{ij}$ soit symétrique en i, j .

Pour résoudre le premier problème, on peut là aussi chercher à résoudre l'équation

$$\pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji}, \quad \forall i, j \in E,$$

qui contrairement à l'équation $\pi P = \pi$, n'impose pas de sommation en i . Mais cette équation n'a de solution que si la chaîne est réversible par rapport à son unique probabilité invariante, ce qui n'est pas forcément le cas.

Supposons maintenant que l'on se donne le couple (P, π) , et que l'on veuille vérifier si oui ou non π est la probabilité invariante associée à la chaîne de matrice de transition irréductible P . Si la quantité $\pi_i P_{ij}$ est symétrique en i, j , la réponse est oui, et on a même mieux, la réversibilité. Si non, il faut vérifier si oui ou non $\pi P = \pi$. Une façon de faire ce calcul est donnée par la Proposition suivante.

Proposition 2.7.4. Soit P une matrice de transition irréductible, et π une probabilité sur E . On pose pour tout $i, j \in E$,

$$\hat{P}_{ij} = \begin{cases} \frac{\pi_j}{\pi_i} P_{ji}, & \text{si } i \neq j, \\ P_{ii}, & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Alors π est la probabilité invariante de la chaîne de matrice de transition P et \hat{P} est la matrice de la chaîne retournée ssi pour tout $i \in E$,

$$\sum_{j \in E} \hat{P}_{ij} = 1.$$

2.8 Chaînes semi-markoviennes

Considérons une chaîne de Markov de matrice de transition P , et $i \in E$ tel que $P_{ii} > 0$. Alors la loi du temps de séjour de la chaîne à l'état i est la loi géométrique de paramètre P_{ii} . C'est une conséquence de la propriété de Markov, qui se démontre en remarquant que si X à valeurs dans \mathbb{N} satisfait la propriété de l'exercice 6.5.1, elle suit une loi géométrique.

On peut s'intéresser à des processus dont les transitions sont régies par un mécanisme markovien, alors que les temps de séjour dans chaque état suivent une loi autre que géométrique. De tels processus perdent la propriété

de Markov, même s'ils en conservent une partie. Nous les étudierons ci-dessous dans le cadre des processus en temps continu au chapitre 8, mais ils interviendront déjà dans une généralisation des algorithmes de chaînes de Markov cachées au chapitre 4.

2.9 Annexe : La formule de Black–Scholes en temps discret

Ce qui suit n'utilise aucun des résultats du chapitre. Il s'agit d'une version très simple d'un résultat très classique en mathématiques financières (qui a contribué à l'obtention par l'un de ses auteurs du prix Nobel d'économie!), où la structure markovienne joue un rôle clé pour rendre les calculs "faisables".

On considère la situation classique en mathématiques financières où chaque agent a le choix entre deux placements possibles :

1. **Le placement à la Caisse d'Épargne** (3,5% garanti), dont le cours évolue au cours du temps suivant la formule (ici $\eta > 1$) :

$$S_n^0 = S_0^0 \eta^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

2. **Acheter des actions en bourse** : 1 seul type d'action disponible, dont le cours fluctue suivant la formule :

$$S_n = S_0 \times \xi_1 \times \xi_2 \times \dots \times \xi_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

où les v.a. $\{\xi_n, n \geq 1\}$ sont i.i.d. de loi commune donnée par

$$\mathbb{P}(\xi_i = u) = p, \quad \mathbb{P}(\xi_1 = d) = 1 - p,$$

avec $d < \eta < u$ (u ="up", d ="down"). Notons qu'il s'agit d'une "marche aléatoire multiplicative".

Expliquons maintenant ce qu'est une **option d'achat** (il existe aussi des options de vente).

Une option d'achat est un contrat conclu à l'instant 0, aux termes duquel le vendeur s'engage à vendre à l'acheteur un nombre fixé y d'actions à l'instant N , au prix fixé K (quel que soit le prix S_N de l'action à l'instant N).

L'option donne à l'acheteur le droit (pas l'obligation) d'acheter les y actions au prix K à l'instant N . Évidemment, l'acheteur va exercer son action si $S_N > K$, et ne pas l'exercer si $S_N \leq K$.

2.9. ANNEXE : LA FORMULE DE BLACK-SCHOLES EN TEMPS DISCRET 57

En échange de ce droit, l'acheteur paie un prix x à l'instant 0. La question à laquelle nous allons chercher à répondre est : quel est le "juste prix" x de cette option ?

Tout d'abord, précisons que les acheteurs potentiels de telles options sont des acteurs économiques qui soit prévoient de grosses rentrées d'argent à une date donnée dans le futur qu'ils voudront placer au mieux, soit savent qu'ils devront acheter une certaine quantité de devises, ou d'un produit dont les cours fluctuent, et dans tous les cas ils veulent se protéger d'une éventuelle montée des cours.

Donc l'acheteur débourse x Frs à l'instant 0, et à l'instant N il encaisse un gain égal à

$$f(S_N) = y(S_N - K)^+$$

Le vendeur, lui, encaisse x Frs à l'instant 0, et débourse $y(S_N - K)^+$ à l'instant N . Il cherche à se "couvrir" contre le risque d'une forte hausse de l'action. Pour cela il va placer "au mieux" les x Frs que lui verse l'acheteur à l'instant 0, pour qu'ils deviennent à l'instant N un montant aussi proche que possible de $y(S_N - K)^+$.

L'idéal serait qu'il existe un montant x et une stratégie de placement au cours du temps appelée "stratégie de couverture" telle que les x Frs de l'instant 0 deviennent exactement $y(S_N - K)^+$ francs à l'instant N (et tels qu'on ne puisse pas atteindre le même objectif avec un montant initial inférieur à x). Or une telle stratégie de couverture existe, et le montant initial x nécessaire est appelé le "juste prix" de l'option.

Supposons qu'à l'instant n la richesse initiale x soit devenue

$$X_n = X_n - Z_n + Z_n,$$

où Z_n est la partie investie en bourse, et $X_n - Z_n$ la somme déposée à la Caisse d'Épargne. Alors la richesse à l'instant $n + 1$ sera

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= (X_n - Z_n)\eta + Z_n\xi_{n+1} \\ &= X_n\eta + Z_n(\xi_{n+1} - \eta) \end{aligned}$$

On veut que soit satisfaite la relation

$$X_N = f(S_N) [= y(S_N - K)^+].$$

Cherchons X_{N-1} et Z_{N-1} tels que cette relation soit satisfaite.

$$X_{N-1}\eta + Z_{N-1}(\xi_N - \eta) = f(S_{N-1}\xi_N) \text{ p.s.}$$

ce qui impose les deux relations suivantes :

$$\begin{aligned} X_{N-1}\eta + Z_{N-1}(d - \eta) &= f(S_{N-1}d), \\ X_{N-1}\eta + Z_{N-1}(u - \eta) &= f(S_{N-1}u). \end{aligned}$$

On résoud ce système de deux équations aux deux inconnues X_{N-1} et Z_{N-1} , et on obtient

$$X_{N-1} = \frac{1}{\eta}(\Phi f)(S_{N-1}),$$

avec

$$\begin{aligned} (\Phi f)(s) &= \frac{u - \eta}{u - d}f(s d) + \frac{\eta - d}{u - d}f(s u) \\ &= \hat{\mathbb{E}}f(s\xi_N), \end{aligned}$$

si $\hat{\mathbb{P}}(\xi_n = u) = q$, $\hat{\mathbb{P}}(\xi_n = d) = 1 - q$, avec $q = \frac{\eta - d}{u - d} \neq p!$ On a en outre

$$\begin{aligned} Z_{N-1} &= \frac{f(S_{N-1}u) - f(S_{N-1}d)}{u - d} \\ &= \text{“dérivée discrète”}. \end{aligned}$$

En itérant le raisonnement que nous venons de faire, on obtient (en notant $\Phi^k = \Phi \circ \Phi \circ \dots \circ \Phi$) :

$$\begin{aligned} X_{N-k} &= \frac{1}{\eta^k}(\Phi^k f)(S_{N-k}) \\ Z_{N-k} &= \frac{(\Phi^{k-1} f)(S_{N-k}u) - (\Phi^{k-1} f)(S_{N-k}d)}{\eta^{k-1}(u - d)} \end{aligned}$$

Soit encore :

$$\begin{aligned} X_k &= F(k, S_k) \\ Z_k &= \frac{F(k, S_k u) - F(k, S_k d)}{u - d}, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} F(k, s) &= \eta^{-(N-k)}(\Phi^{N-k} f)(s) \\ &= \eta^{-(N-k)} \sum_{\ell=0}^{N-k} C_N^\ell q^\ell (1 - q)^{N-k-\ell} f(su^\ell d^{N-k-\ell}) \\ &= \eta^{-(N-k)} \hat{\mathbb{E}}f(s \times \xi_{k+1} \times \dots \times \xi_N), \end{aligned}$$

où sous $\hat{\mathbb{P}}$ les ξ_n sont i.i.d. de loi commune donnée comme ci-dessus (différente de la loi des fluctuations du marché!). On a en particulier

$$\begin{aligned} x &= \eta^{-N} (\Phi^N f)(S_0) \\ &= \eta^{-N} \sum_{\ell=0}^N C_N^\ell q^\ell (1-q)^{N-\ell} f(S_0 u^\ell d^{N-\ell}) \\ &= \eta^{-N} \hat{\mathbb{E}} f(S_0 \times \xi_1 \times \cdots \times \xi_N). \end{aligned}$$

Notons d'une part que les décisions d'investissement (les choix de Z_n) ne dépendent que du prix de l'action à l'instant n (donc bien de quantités connues à cet instant). Enfin notons que le résultat est indépendant de p , qui précise la loi de probabilité des fluctuations ξ_i .

Il ne dépend que du taux d'intérêt η de la caisse d'épargne, et des valeurs prises par les ξ_i . En outre le résultat s'exprime naturellement à l'aide d'une loi de probabilité "artificielle" $\hat{\mathbb{P}}$, qui n'a rien à voir avec celle qui modélise la loi des fluctuations sur le marché boursier. Cette probabilité a la particularité que $\forall n$,

$$\hat{\mathbb{E}} \xi_n = \eta,$$

c'est à dire que l'espérance mathématique du gain à la bourse est le gain que fournit la caisse d'épargne. Au contraire, la bourse n'est attractive que si $\mathbb{E}(\xi_n) > \eta$ (prime de risque).

2.10 Exercices

Exercice 2.10.1. *Montrer que la chaîne $(X_n, n \in \mathbb{N})$ à trois états 0, 1, 2, de matrice de transition*

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p & 1-p-q & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (p, q > 0, p+q \leq 1)$$

et d'état initial 1 ($P(X_0 = 1) = 1$) change d'état pour la première fois à un instant aléatoire $T \geq 1$ de loi géométrique. Montrer ensuite que X_T est une v.a. indépendante de T , de loi $(p/(p+q), 0, q/(p+q))$, et enfin que $X_t = X_T$ si $t \geq T$.

Exercice 2.10.2. Soit $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ une chaîne de Markov de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les classes d'équivalence, les états transients et récurrents, et les mesures invariantes.

Exercice 2.10.3. Soit P une matrice markovienne sur un ensemble fini E de cardinal d .

a Montrer que la probabilité π est invariante ssi

$$\pi(I - P + A) = a,$$

où A est la matrice $d \times d$ dont tous les éléments sont égaux à 1, et a le vecteur de \mathbb{R}^d dont tous les éléments sont égaux à 1.

b Montrer que P est irréductible ssi $I - P + A$ est inversible.

c Dédurre des questions précédentes une méthode de calcul de π .

Exercice 2.10.4. Marche aléatoire sur \mathbf{Z} On pose

$$X_n = X_0 + Y_1 + \cdots + Y_n,$$

où les X_n prennent leurs valeurs dans \mathbf{Z} , les Y_n dans $\{-1, 1\}$, $X_0, Y_1, \dots, Y_n, \dots$ étant une suite indépendante, et pour tout n ,

$$\mathbb{P}(Y_n = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(Y_n = -1), \quad 0 < p < 1.$$

a Montrer que la chaîne $\{X_n\}$ est irréductible.

b Montrer que dans le cas $p \neq 1/2$, la chaîne est transiente (utiliser la loi des grands nombres).

c On considère le cas $p = 1/2$. Montrer que la chaîne est récurrente (on évaluera $\sum_{n \geq 1} (P^n)_{00}$ en utilisant la formule de Stirling $n! \simeq \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$). Montrer que la chaîne est récurrente nulle (on cherchera une mesure invariante). Préciser les valeurs de

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n \text{ et } \liminf_{n \rightarrow \infty} X_n.$$

Exercice 2.10.5. Marche aléatoire sur \mathbf{Z}^d On pose

$$X_n = X_0 + Y_1 + \cdots + Y_n,$$

où les X_n prennent leurs valeurs dans \mathbf{Z}^d , les Y_n étant i.i.d., globalement indépendants de X_0 , de loi donnée par

$$\mathbb{P}(Y_n = \pm e_i) = (2d)^{-1}, \quad 1 \leq i \leq d,$$

$\{e_1, \dots, e_d\}$ désignant la base canonique de \mathbf{Z}^d .

Montrer que $\{X_n\}$ est une chaîne de Markov irréductible à valeurs dans \mathbf{Z}^d , récurrente nulle si $d = 1, 2$, transiente si $d \geq 3$.

Exercice 2.10.6. On reprend la marche aléatoire à valeurs dans \mathbf{Z} dans le cas symétrique (cas $p = 1/2$), et on va établir la récurrence par un argument totalement différent de celui de l'exercice 2.10.4. On suppose pour simplifier que $X_0 = x \in \mathbf{Z}$.

Pour tous $a, b \in \mathbf{Z}$, avec $a < x < b$, on pose

$$\begin{aligned} T_{a,b} &= \inf\{n \geq 0; X_n \notin]a, b[\}, \\ T_a &= \inf\{n \geq 0; X_n = a\}, \\ T_b &= \inf\{n \geq 0; X_n = b\}, \end{aligned}$$

et on remarque que

$$X_{n \wedge T_{a,b}} = x + \sum_{k=1}^n Y_k \mathbf{1}_{\{T_{a,b} > k-1\}}.$$

a Montrer que les v.a. Y_k et $\mathbf{1}_{\{T_{a,b} > k-1\}}$ sont indépendantes. En déduire que

$$\mathbb{E}X_{n \wedge T_{a,b}} = x.$$

b Montrer que $|X_{n \wedge T_{a,b}}| \leq \sup(|a|, |b|)$, $T_{a,b} < \infty$ p.s., et

$$\mathbb{E}X_{T_{a,b}} = x.$$

c Etablir les identités

$$\mathbb{P}(X_{T_{a,b}} = a) = \frac{b-x}{b-a}, \quad \mathbb{P}(X_{T_{a,b}} = b) = \frac{x-a}{b-a}.$$

c Montrer que $\mathbb{P}(T_a < T_n) \rightarrow 1$, quand $n \rightarrow \infty$.

d Montrer que $T_a < \infty$ p.s., et que de même $T_b < \infty$ p.s. En déduire que la chaîne est récurrente.

Exercice 2.10.7. Marche aléatoire réfléchie en 0 Les $\{Y_n\}$ étant définis comme à l'exercice 2.10.4, on définit la chaîne de Markov $\{X_n\}$ à valeurs dans \mathbb{N} par la formule de récurrence

$$X_{n+1} = \mathbf{1}_{\{X_n > 0\}} Y_{n+1} + \mathbf{1}_{\{X_n = 0\}}.$$

On suppose bien sûr que $X_0 \in \mathbb{N}$. On notera ci-dessous $\{X'_n\}$ la marche aléatoire de l'exercice 2.10.4, avec le même X_0 et les mêmes $\{Y_n\}$ que ceux utilisés dans la définition de la chaîne $\{X_n\}$. On utilisera dans cet exercice les résultats de l'exercice 2.10.4.

- **a** Montrer que la chaîne ainsi définie est irréductible à valeurs dans \mathbb{N} . Préciser sa matrice de transition.
- **b** Montrer que p.s., $X_n \geq X'_n, \forall n$. En déduire que $\{X_n\}$ est transiente dans le cas $p > 1/2$.
- **c** On pose $T = \inf\{n \geq 0, X_n = 0\}$. Montrer que $X_n = X'_n$ si $T \geq n$. En déduire que la chaîne est récurrente dans le cas $p \leq 1/2$ (on pourra par exemple montrer que l'état 1 est récurrent).
- **d** Montrer que la chaîne est récurrente nulle dans le cas $p = 1/2$, récurrente positive dans le cas $p < 1/2$ (on montrera que dans le premier (resp. le second) cas, la mesure $(1/2, 1, 1, 1, \dots)$ (resp. la mesure μ_n définie par

$$\mu_0 = \frac{1-2p}{2(1-p)}, \quad \mu_n = \frac{1-2p}{2} \frac{p^{n-1}}{(1-p)^{n+1}})$$

est une mesure invariante).

Exercice 2.10.8. Chaîne de naissance et de mort Soit $\{X_n\}$ une chaîne de Markov à valeurs dans $E = \mathbb{N}$, de matrice de transition Q définie par

$$Q(x, x-1) = q_x, \quad Q(x, x) = r_x, \quad Q(x, x+1) = p_x,$$

avec pour tout $x \in \mathbb{N}$, $p_x + r_x + q_x = 1$, $q_0 = 0$, $q_x > 0$ si $x > 0$, et $p_x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{N}$.

Pour $x \in \mathbb{N}$, on pose $\tau_x = \inf\{n \geq 0, X_n = x\}$. Etant donnés trois états a, x et b tels que $a \leq x \leq b$, on pose $u(x) = \mathbb{P}_x(\tau_a < \tau_b)$. On définit $\{\gamma_x, x \in \mathbb{N}\}$ par $\gamma_0 = 1$ et pour $x > 0$, $\gamma_x = q_1 \times \dots \times q_x / p_1 \times \dots \times p_x$.

- a** Pour $a < x < b$, établir une relation entre $u(x) - u(x+1)$ et $u(x-1) - u(x)$.
Calculer $u(a) - u(b)$ en fonction des γ_x , et en déduire que pour $a < x < b$,

$$u(x) = \sum_{y=x}^{y=b-1} \gamma_y / \sum_{y=a}^{y=b-1} \gamma_y.$$

Traiter le cas particulier où $p_x = q_x$ pour tout $x > 0$.

- b** Calculer $\mathbb{P}_1(\tau_0 = \infty)$ et montrer que la chaîne est récurrente ssi $\sum_0^\infty \gamma_y = +\infty$.
- c** Déterminer les mesures sur E invariantes par Q , et en déduire que la chaîne est récurrente positive ssi

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{p_0 p_1 \times \cdots \times p_{x-1}}{q_1 q_2 \times \cdots \times q_x} < \infty.$$

Exercice 2.10.9. File d'attente On considère une file d'attente en temps discret qui se forme à un guichet, suivant le phénomène suivant : à chaque instant $n \in \mathbb{N}$, il arrive un client avec la probabilité λ , ($0 < \lambda < 1$) et pas de client avec la probabilité $1 - \lambda$. Lorsqu'il y a au moins un client en attente, à chaque instant un client est servi et quitte le système avec la probabilité μ , $0 < \mu < 1$, et personne ne quitte le système avec la probabilité $1 - \mu$ (un client qui arrive à l'instant n repart au plus tôt à l'instant $n + 1$). Tous les tirages ci-dessus sont indépendants entre eux. On note X_n le nombre de clients présents dans la file à l'instant n .

- a** Montrer que $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une chaîne de Markov irréductible à valeurs dans \mathbb{N} . Préciser sa matrice de transition $Q(k, l)$, $k, l \in \mathbb{N}$.
- b** Donner une CNS sur λ et μ pour que la chaîne $\{X_n\}$ possède une probabilité invariante. On supposera dans la suite que cette condition est satisfaite et on notera $\{\pi(k), k \in \mathbb{N}\}$ l'unique probabilité invariante que l'on déterminera.
- c** Calculer $E_\pi(X_n)$.
- d** On précise maintenant que les clients sont servis dans l'ordre de leur arrivée. On désigne par T le temps de séjour d'un client quelconque. Le système étant initialisé avec sa probabilité invariante, quelle est l'espérance de T ?

Exercice 2.10.10. File d'attente On considère une file d'attente qui se forme à un guichet. X_n désigne le nombre de clients dans la file en attente ou en train de se faire servir à l'instant n . Entre les instants n et $n+1$ arrivent Y_{n+1} clients, et si $X_n > 0$ partent Z_{n+1} clients. On suppose que $X_0, Y_1, Z_1, Y_2, Z_2, \dots$ sont indépendantes, avec les Y_n i.i.d. vérifiant $0 < \mathbb{P}(Y_n = 0) < 1$, et les Z_n vérifiant $\mathbb{P}(Z_n = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(Z_n = 0)$.

- a Montrer que $(X_n; n \in \mathbb{N})$ est une chaîne de Markov dont on précisera la probabilité de transition.
- b On note φ la fonction génératrice des Y_n , ρ celle des Z_n , Ψ_n celle des X_n . Calculer Ψ_{n+1} en fonction de Ψ_n , φ et ρ .
- c Montrer qu'il existe une unique probabilité invariante dont on calculera la fonction génératrice ssi $\mathbb{E}(Y_1) < p$.

Exercice 2.10.11. Aloha discret Le but de cet exercice est d'étudier le protocole de communication suivant : des usagers se présentent aux instants $\{1, 2, \dots, n, \dots\}$ pour transmettre un message via un canal, qui ne peut transmettre qu'un message à la fois. Lorsque deux ou plus usagers se présentent en même temps, aucun message ne passe, chaque usager en est averti, et il tente de se représenter plus tard. On cherche une politique de retransmission "distribuée", i.e. telle que chaque usager puisse décider quand se représenter, sans connaître les intentions des autres usagers. Le protocole "Aloha discret" stipule que chaque usager dont le message a été bloqué tente sa chance à l'instant suivant avec la probabilité p . Si son tirage aléatoire lui indique de ne pas se présenter, il tente sa chance à l'instant suivant avec la probabilité p , et ainsi de suite jusqu'à ce qu'un tirage lui indique de tenter sa chance. On appelle Y_n le nombre de messages "frais" (i.e. qui se présentent pour la première fois) arrivant au canal de transmission à l'instant n . On suppose que la suite $\{Y_n\}$ est i.i.d., avec $\mathbb{P}(Y_n = i) = a_i$, $i \in \mathbb{N}$, et $\mathbb{E}(Y_n) > 0$. Soit X_n le nombre de messages retardés en attente d'être transmis à l'instant n .

- a Montrer que $\{X_n\}$ est une chaîne de Markov dont on précisera la matrice de transition.
- b Montrer que $\{X_n\}$ est irréductible, mais n'est pas récurrente positive.

Chapitre 3

Quelques algorithmes stochastiques

3.1 Méthode de Monte Carlo par chaîne de Markov

On a vu au chapitre 1 qu'une façon de calculer une somme du type

$$\sum_{i \in E} f(i)\pi_i,$$

où $\{\pi_i; i \in E\}$ est une probabilité, est de l'approcher par

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(U_n),$$

où (U_1, U_2, \dots) est une suite i.d.d. de v.a. de loi commune π . Dans un certain nombre d'applications importantes en pratique, il est très difficile (pour ne pas dire impossible) de simuler des v.a. suivant la loi π , bien que E soit de cardinal fini (mais gigantesque!). Un cas typique est celui où l'on connaît les π_i à une constante multiplicative près, et où le calcul pourtant très simple de la constante de normalisation est infaisable parce que $\text{card } E$ est trop grand (il supposerait de sommer un nombre gigantesque de termes). Il peut être beaucoup plus commode de trouver une matrice markovienne irréductible P , qui admette π comme mesure invariante, et telle que simuler une chaîne

de Markov de matrice de transition P soit très facile. Comment trouve-t-on une matrice P qui admet π comme probabilité invariante? En trouvant une matrice P telle que le couple (π, P) satisfasse la “relation d’équilibre ponctuel”. Remarquons que pour cela la connaissance de π à une constante multiplicative près suffit.

Nous allons maintenant décrire le cadre classique d’application de méthode de Monte Carlo par chaîne de Markov, qui sont très utilisées en particulier en statistique, en physique statistique et en traitement d’images.

On prend E de la forme :

$$E = S^\Lambda,$$

i.e. un point $i \in E$ est une application :

$$m \in \Lambda \rightarrow i(m) \in S.$$

Λ est l’ensemble des “sites” (ensemble des points (ou “pixels”) de l’image discrétisée). Λ et S sont finis, et donc aussi E .

Typiquement, Λ est très grand. Par contre, S (ensemble des niveaux de gris dans le cas d’une image) est de taille plus modeste. Dans certaines applications, $S = \{-1, +1\}$. Même dans ce cas le plus simple, $\text{card } E = 2^{\text{card } \Lambda}$, donc effectivement E est gigantesque dès que Λ est grand.

Chaque v.a. X_n de la chaîne prend ses valeurs dans S^Λ . C’est donc une application de Λ dans S . Pour chaque $m \in \Lambda$, $X_n(m)$ est une v.a. à valeurs dans S .

La chaîne $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ évolue de telle sorte qu’entre les instants n et $n + 1$ une seule composante de X est modifiée, i.e. il existe $m \in \Lambda$ tel que

$$X_{n+1} \stackrel{m}{\sim} X_n,$$

au sens où $X_{n+1}(m') = X_n(m')$, $\forall m \neq m'$.

On va d’abord décrire la façon de passer de $X_n(m)$ à $X_{n+1}(m)$, puis on verra comment choisir la façon de “visiter” les différents sites, i.e. quel m choisir à l’instant n . La façon de passer de X_n à X_{n+1} est décrite par une matrice markovienne $P(m)$, qui a la propriété que $P(m)_{ij} = 0$, sauf si $i \stackrel{m}{\sim} j$ (i.e. si toutes les composantes de i et j coïncident, sauf peut être celle notée m). On veut que la mesure π soit invariante par $P(m)$.

Pour cela, on veut assurer que

$$\pi_i P(m)_{ij} = \pi_j P(m)_{ji}, \quad \forall i, j \in E, m \in \Lambda.$$

Il y a beaucoup de façons possibles de choisir $P(m)$. En effet, étant donnée une matrice markovienne $R(m)$ telle que

$$R(m)_{ij} \neq 0 \Rightarrow i \stackrel{m}{\sim} j,$$

on peut choisir pour $i \neq j$

$$\pi_i P(m)_{ij} = (\pi_i R(m)_{ij}) \wedge (\pi_j R(m)_{ji}),$$

et

$$P(m)_{ii} = 1 - \sum_{j \neq i} P(m)_{ij} \geq 0.$$

Autrement dit, sachant que $X_n = i$, on génère Y_n suivant la loi $R(m)_{i,\cdot}$, et si $Y_n = j$, on fait un nouveau tirage aléatoire (indépendant de ce qui précède) qui aboutit à choisir

$$X_{n+1} = \begin{cases} Y_n & \text{avec probabilité } \frac{\pi_j R(m)_{ji}}{\pi_i R(m)_{ij}} \wedge 1, \\ X_n & \text{avec probabilité } 1 - \frac{\pi_j R(m)_{ji}}{\pi_i R(m)_{ij}} \wedge 1, \end{cases}$$

où l'on a utilisé la notation $a \wedge b = \inf(a, b)$.

Cet algorithme porte le nom d'*algorithme de Hastings*.

Indiquons deux choix "classiques" pour $R(m)$. L'*échantillonneur de Gibbs* s'obtient en choisissant

$$P(m)_{ij} = R(m)_{ij} = \left(\sum_{k \stackrel{m}{\sim} i} \pi_k \right)^{-1} \pi_j, \text{ si } i \stackrel{m}{\sim} j.$$

Il consiste à choisir $X_{n+1}(m)$ en tirant suivant la loi conditionnelle sous π , sachant les autres composantes (autres que m).

L'*algorithme de Métropolis*, sous sa forme la plus simple, consiste à choisir

$$R(m)_{ij} = R(m)_{ji} = (|S| - 1)^{-1}, \text{ si } i \stackrel{m}{\sim} j, \text{ si bien que}$$

$$P(m)_{ij} = (|S| - 1)^{-1} \left(\frac{\pi_j}{\pi_i} \wedge 1 \right), \text{ } i \stackrel{m}{\sim} j, i \neq j.$$

Cela revient à choisir d'abord une nouvelle valeur j_m au site m , uniformément sur $S \setminus \{X_n(m)\}$, puis à choisir $X_{n+1}(m) = j_m$ p.s. si $\pi_j \geq \pi_i$, et avec probabilité $\frac{\pi_j}{\pi_i}$ si cette quantité est inférieure à 1.

Il reste à décrire le “programme de visite des sites”, i.e. décider pour chaque n quelle composante m de X_n on veut modifier. Une méthode consiste à visiter Λ dans un ordre fixé, puis de recommencer. L’autre, que nous adopterons pour sa simplicité de formulation mathématique, consiste à effectuer à chaque instant n un tirage de m suivant la loi uniforme sur Λ , indépendamment de tous les autres tirages. Dans ce cas, $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ est une chaîne de Markov homogène de matrice de transition

$$P = |\Lambda|^{-1} \sum_{m \in \Lambda} P(m).$$

On a alors clairement

$$\pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji},$$

et donc si, comme on le vérifie aisément dans chaque exemple, P est irréductible, π est l’unique probabilité invariante de la chaîne $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$.

3.1.1 Le modèle d’Ising

Il s’agit d’un des modèles les plus classiques en physique statistique. $N \in \mathbb{N}$ étant fixé (N “grand”), posons

$$\Lambda = \{-N, \dots, -1, 0, 1, \dots, N\}^2 \subset \mathbf{Z}^2,$$

($\Lambda = \Lambda_N$), de frontière $\partial\Lambda = \Lambda_N \setminus \Lambda_{N-1}$, et définissons l’espace des configurations comme

$$E = \{-1, 1\}^\Lambda.$$

Pour $i \in E$, on pose

$$H(i) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{m, m' \in \Lambda \\ |m-m'|=1}} |i(m) - i(m')|^2.$$

Notons que H est petit lorsque i tend à prendre la même valeur aux points voisins. On définit :

$$E^+ = \{i \in E; i(m) = 1, \forall m \in \partial\Lambda\}.$$

Pour tout $\beta > 0$ ($1/\beta$ s’interprète comme une température), on définit la probabilité sur E^+ :

$$\pi_i = \frac{1}{Z(\beta)} e^{-\beta H(i)}, \quad i \in E^+,$$

avec bien sûr

$$Z(\beta) = \sum_{i \in E^+} e^{-\beta H(i)},$$

quand $\beta \rightarrow 0$, π tend vers la mesure uniforme sur E^+ , alors que lorsque $\beta \rightarrow +\infty$, π tend vers la mesure uniforme sur les minima globaux de H . Un résultat célèbre d'Onsager dit que si X est une v.a. à valeurs dans E , de loi π , alors

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}X(0) = [(1 - (\sinh 2\beta)^{-4})^+]^{1/8}.$$

lorsque $\sinh 2\beta \leq 1$, on obtient que pour N très grand, la loi de $X(0)$ n'est guère influencée par la condition au bord choisie, alors que l'inverse est vrai même à la limite $N \rightarrow \infty$ si $\sinh 2\beta > 1$.

Les physiciens sont très intéressés à réaliser des simulations sous la probabilité π pour N grand (pour tenter d'observer des phénomènes, du type du résultat d'Onsager, mais que l'on ne sait pas encore démontrer concernant éventuellement des modèles plus compliqués et moins bien connus que le modèle d'Ising). Mais pour N vraiment grand, il est impossible de simuler directement selon la loi π . Il est même quasiment impossible de calculer la constante de normalisation $Z(\beta)$. La méthode de Monte Carlo par chaîne de Markov a été proposée pour la première fois en 1953 par Metropolis et al. Nous allons la décrire dans une version parallélisable, qui exploite la forme particulière du modèle d'Ising.

Décrivons tout d'abord **l'échantillonneur de Gibbs**. Considérons une partition de Λ suivant la parité de la somme de deux coordonnées du point m considéré :

$$\begin{aligned} \Lambda^+ &= \{(m_1, m_2) \in \Lambda; m_1 + m_2 \text{ est pair}\} \\ \Lambda^- &= \{(m_1, m_2) \in \Lambda; m_1 + m_2 \text{ est impair}\} \end{aligned}$$

Pour $i \in E$, on note :

$$\begin{aligned} i^+ &= (i(m), m \in \Lambda^+), \\ i^- &= (i(m), m \in \Lambda^-) \end{aligned}$$

Il résulte de la forme du modèle d'Ising que $\pi_{+-}(i^+|i^-)$, la probabilité que $X^+ = i^+$, sachant que $X^- = i^-$, si X est une v.a. de loi π , est de la forme (on

utilise la notation \propto pour dire que deux fonctions sont égales à une constante de normalisation près) :

$$\pi_{+-}(i^+|i^-) \propto \prod_{m \in \Lambda^+ \setminus \partial\Lambda} e^{\beta i(m)s(m)},$$

avec, si $m \in \Lambda^+ \setminus \partial\Lambda$,

$$s(m) = \sum_{m'; |m'-m|=1} i^-(m').$$

On a une formule analogue pour $\pi_{-+}(i^-|i^+)$.

La facilité de simuler suivant ces deux lois provient de leur forme produit, et la constante de normalisation pour chaque facteur est explicite.

La procédure est maintenant la suivante. On choisit une configuration arbitraire X_0 dans E^+ . Ensuite, on utilise la procédure récurrente suivante. Etant donné X_n , on simule d'abord X_{n+1}^+ suivant la loi $\pi_{+-}(\cdot|X_n^-)$, puis X_{n+1}^- suivant la loi $\pi_{-+}(\cdot|X_{n+1}^+)$.

Cette procédure est exactement l'échantillonneur de Gibbs de la section précédente, où l'on visite alternativement tous les sites de $\Lambda^+ \setminus \partial\Lambda$, puis ceux de $\Lambda^- \setminus \partial\Lambda$ (avec une numérotation différente de la suite X_n). La convergence résulte de la discussion générale ci-dessus. Il n'est pas difficile de vérifier que l'on simule ici une chaîne de Markov irréductible dont π est bien la probabilité invariante.

Décrivons maintenant **l'algorithme de Metropolis**. Sachant que $X_n = i$, indépendamment pour chaque $m \in \Lambda^+ \setminus \partial\Lambda$, on change le signe de $i(m)$ avec la probabilité

$$p(m, i) = \frac{\pi(i_m)}{\pi(i)} \wedge 1 = e^{-2\beta i(m)s(m)} \wedge 1,$$

avec $i_m \stackrel{m}{\sim} i$, $i_m(m) = -i(m)$, et $s(m) = \sum_{|m'-m|=1} j^-(m')$.

On a ainsi obtenu $X_{n+1}^+(m)$. On simule ensuite $X_{n+1}^-(m)$ en conditionnant par la valeur de $X_{n+1}^+(m)$. Le processus obtenu $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ est bien une chaîne de Markov irréductible, de probabilité invariante π .

3.1.2 Analyse bayésienne d'images

On peut utiliser le modèle d'Ising (ou d'autres modèles de ce type) comme loi a priori d'une image bidimensionnelle digitalisée. Chaque point $m \in \Lambda$ est

un “pixel” (en français! pixel=picture element). $i(m)$ est le niveau de gris du pixel m (ici avec le modèle d’Ising on n’a que deux niveaux de gris : blanc et noir). En faisant varier le paramètre β du modèle d’Ising, on varie la “texture” de l’image : plus β est grand, plus on favorise une image avec de grandes taches blanches et de grandes taches noires, alors que β plus petit favorise un mélange plus fin de couleurs.

On observe la couleur (blanche ou noire) de chaque pixel, et l’observation restitue la couleur effective de chaque pixel avec la probabilité $p \in]0, 1[$, les erreurs de mesures éventuelles sur les différents pixels étant indépendantes.

Alors la loi a posteriori, plus précisément la loi conditionnelle de l’événement $X = i$, sachant que l’on a observé la configuration j , est

$$\pi(i|j) \propto e^{-\beta H(i)} p^{a(i,j)} (1-p)^{d(i,j)},$$

où $a(i, j)$ est le nombre de sites où les configurations i et j sont en accord (i.e. identiques) et $d(i, j)$ le nombre de sites où elles sont en désaccord (i.e. différentes).

On obtient une image “nettoyée des erreurs d’observation” en simulant selon la probabilité $\pi(i|j)$. Bien qu’il ne s’agisse plus exactement du modèle d’Ising, les mêmes méthodes s’appliquent. Décrivons l’algorithme de Metropolis. Sachant que $X_n = i$, indépendamment pour chaque site $m \in \Lambda^+ \setminus \partial\Lambda$ on change le signe de $X_n^+(m)$ avec la probabilité

$$\begin{aligned} p(m, i, j) &= \frac{\pi(i_m|j)}{\pi(i|j)} \wedge 1 \\ &= e^{-2\beta i(m)s(m)} \left(\frac{1-p}{p} \right)^{i(m)j(m)} \wedge 1, \end{aligned}$$

obtenant ainsi X_{n+1}^+ . On simule ensuite X_{n+1}^- en utilisant sur $\Lambda^+ \setminus \partial\Lambda$ les valeurs ainsi obtenues. On fabrique ainsi une chaîne de Markov irréductible, de probabilité invariante $\pi(\cdot|j)$.

3.2 Simulation de la probabilité invariante

Un problème dans les algorithmes “MCCM” est le choix de la durée de la simulation. Par rapport à une méthode de Monte Carlo standard, on rajoute une difficulté, qui est qu’au lieu d’initialiser la chaîne de Markov sous sa probabilité invariante, on part d’un point arbitraire. D’une certaine façon

on peut penser qu'il y a une "phase initiale" de l'algorithme qui permet de se rapprocher de la probabilité invariante, puis un problème de contrôle de la vitesse de convergence dans le théorème ergodique, qui - comme dans une méthode de Monte Carlo standard - peut se résoudre par utilisation du théorème de la limite centrale correspondant (cf. Théorème 2.5.8).

En ce qui concerne la "phase initiale", il existe une vaste littérature sur la vitesse de convergence vers la mesure invariante (voir aussi le théorème 2.6.6 ci-dessus, où il conviendrait d'explicitier les constantes). Nous allons plutôt présenter des idées dûes à Propp et Wilson, qui permettent une simulation "parfaite" (au sens de "exacte", par opposition à "approchée") sous la probabilité invariante. L'idée est que l'on peut atteindre celle-ci en un nombre fini (mais aléatoire) d'itérations.

On suppose dans toute cette section que $\text{card}E < \infty$, et pour fixer les notations que $E = \{1, 2, \dots, N\}$.

3.2.1 Simulation parfaite

On va supposer dans cette section que

$$\beta(P) = \sum_{j \in E} \inf_{i \in E} P_{ij} > 0.$$

Il est clair que $\beta(P) \leq 1$. On pose

$$\mu_j = \frac{\inf_i P_{ij}}{\beta(P)}, j \in E,$$

donc μ est une probabilité sur E .

Remarque 3.2.1. *On pourrait choisir un autre couple (β, μ) ; $\beta > 0$, μ probabilité sur E tels que $P_{ij} \geq \beta\mu_j$, mais le choix ci-dessus est optimal au sens où il maximise β .*

Remarque 3.2.2. *L'hypothèse $\beta(P) > 0$ entraîne qu'il existe une unique classe récurrente (exercice), dont P possède une et une seule probabilité invariante.*

On va choisir une fonction

$$F : E \times [0, 1] \rightarrow E$$

telle que si U est une v.a. de loi $\mathcal{U}([0, 1])$,

$$\mathbb{P}(F(i, U) = j) = P_{ij}, \quad i, j \in E.$$

Donc si $\{U_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une suite de v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{U}([0, 1])$, indépendante de X_0 ,

$$X_n = F(X_{n-1}, U_n), \quad n \geq 1$$

définit une chaîne de Markov de matrice de transition P .

On définit $\ell : \{0\} \cup E \rightarrow [0, \beta(P)]$ par

$$\begin{aligned} \ell(0) &= 0 \\ \ell(j) &= \ell(j-1) + \inf_i P_{ij}, \quad 1 \leq j \leq N, \end{aligned}$$

et on pose $J(j) = [\ell(j-1), \ell(j))$.

On définit en outre $k : E \times (\{0\} \cup E) \rightarrow [\beta(P), 1]$ par

$$\begin{aligned} k(i, 0) &= \beta(P) \\ k(i, j) &= k(i, j-1) + P_{ij} - \inf_k P_{kj}, \quad 1 \leq j \leq N, \end{aligned}$$

et on pose $K(i, j) = [k(i, j-1), k(i, j))$, $1 \leq i, j \leq N$,

$$I(i, j) = J(j) \cup K(i, j).$$

On remarque que $|I(i, j)| = P_{ij}$. Enfin on pose

$$F(i, u) = \sum_{j \in E} j \mathbf{1}_{\{u \in I(i, j)\}}, \quad 1 \leq i \leq N, \quad u \in [0, 1].$$

Remarquons que l'on a bien $\mathbb{P}(F(i, U) = j) = P_{ij}$, soit $\mathbb{P}(F(X_{n-1}, U_n) = j | X_{n-1} = i) = P_{ij}$.

Le point crucial de cette construction est que si à l'instant n , $U_n < \beta(P)$, alors la valeur de X_n ne dépend pas de X_{n-1} .

Autrement dit, si on fait fonctionner en parallèle cet algorithme avec la même suite $\{U_n\}$ pour différents points de départ X_0 , les différentes suites confluent au premier instant n où $U_n < \beta(P)$. On a la

Proposition 3.2.3. *Soit $T = \inf\{n \geq 1, U_n < \beta(P)\}$.*

Alors T et X_T sont indépendantes, T de loi géométrique de paramètre $\beta(P)$, et X_T de loi μ .

PREUVE:

$$\{X_T = i, T = n\} = \{U_1 \geq \beta(P), \dots, U_{n-1} \geq \beta(P), U_n \in J(i)\}$$

Donc

$$\mathbb{P}(X_T = i, T = n) = (1 - \beta(P))^n \beta(P) \mu_i$$

□

On va maintenant construire une chaîne stationnaire de matrice de transition P .

On se donne une suite i.i.d. $\{U_n, n \in \mathbf{Z}\}$ de v.a. de loi $\mathcal{U}([0, 1])$, et on pose

$$N_k = \mathbf{1}_{\{U_k < \beta(P)\}}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Les $\{N_k\}$ sont des v.a. de Bernoulli indépendantes.

Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, on pose

$$\tau(n) = \max\{k \leq n; U_k < \beta(P)\}.$$

Notons que $\tau(k) = \tau(n)$, $\forall k \in [\tau(n), n]$. En outre, on a $\mathbb{P}(n - \tau(n) > k) = (1 - \beta(P))^k$.

On définit alors le processus $\{X_n, n \in \mathbf{Z}\}$ comme suit. $\forall k \in \mathbf{Z}$ tel que $N_k = 1$, on pose

$$X_k = \sum_{j \in E} j \mathbf{1}_{\{U_k \in J(j)\}}.$$

Soit maintenant k tel que $N_k = 0$. $X_{\tau(k)}$ est défini par la formule ci-dessus. En outre,

$$X_{\tau(k)+1} = F(X_{\tau(k)}, U_{\tau(k)+1}), \dots, X_k = F(X_{k-1}, U_k).$$

Proposition 3.2.4. *Le processus $\{X_n, n \in \mathbf{Z}\}$ ainsi défini est stationnaire (i.e. $\forall \ell \in \mathbf{Z}, k \in \mathbf{N}, (X_{\ell+1}, \dots, X_{\ell+k}) \stackrel{(loi)}{=} (X_1, \dots, X_k)$).*

En particulier, la loi de X_0 est l'unique probabilité invariante de la chaîne de matrice de transition P .

Algorithme de “simulation parfaite”

1. On simule $U_0, U_{-1}, \dots, U_{\tau(0)}$ (ceci requiert un nombre de simulations qui suit une loi géométrique).

2. On calcule $X_{\tau(0)} = \sum_j j \mathbf{1}_{\{U_{\tau(0)} \in J(j)\}}$.
3. On calcule $X_{\tau(0)+1}, \dots, X_0$ à l'aide de la formule $X_j = F(X_{j-1}, U_j)$, et des $U_{\tau(0)+1}, \dots, U_0$ générés ci-dessus.
4. La v.a. X_0 ainsi simulée suit la loi invariante sous P .

Remarque 3.2.5. *La limite de cette approche est que l'on a besoin que $\beta(Q) > 0$.*

On pourrait penser généraliser cette approche au cas où il existe $k \geq 1$ tel que $\beta(Q^k) > 0$, mais il ne semble pas que cela conduise à un algorithme effectivement utilisable.

3.2.2 Couplage depuis le passé (“Coupling from the past”)

On suppose ici seulement que P est irréductible. On se donne une application

$$F : E \times [0, 1] \rightarrow E$$

tel que si U est une v.a. de loi $\mathcal{U}([0, 1])$,

$$\mathbb{P}(F(i, U) = j) = P_{ij}, \quad \forall i, j \in E.$$

On va définir deux “couplages multiples”

- A) On se donne $\{U_n, n \in \mathbf{Z}\}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{U}([0, 1])$, et pour tout $k \in \mathbf{Z}$, on pose

$$(X_n^{1,k}, \dots, X_n^{N,k}) = \begin{cases} (1, \dots, N), & \text{si } n = k; \\ (F(X_{n-1}^{1,k}, U_n), \dots, F(X_{n-1}^{N,k}, U_n)), & \text{si } n > k. \end{cases}$$

- B) On se donne $\{U_n^i, 1 \leq i \leq N, n \in \mathbf{Z}\}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{U}([0, 1])$, et pour $k \in \mathbf{Z}$, on pose

$$X_n^{1,k} = \begin{cases} 1, & \text{si } n = k \\ F(X_{n-1}^{1,k}, U_n^1), & \text{si } n > k. \end{cases}$$

$$X_n^{2,k} = \begin{cases} 2, & \text{si } n = k \\ F(X_{n-1}^{2,k}, U_n^2), & \text{si } n > k \text{ et } X_{n-1}^{2,k} \neq X_{n-1}^{1,k} \\ F(X_{n-1}^{2,k}, U_n^1), & \text{si } n > k \text{ et } X_{n-1}^{2,k} = X_{n-1}^{1,k} \end{cases}$$

$$X_n^{N,k} = \begin{cases} N, & \text{si } n = k \\ F(X_{n-1}^{N,k}, U_n^N), & \text{si } n > k \text{ et } X_{n-1}^{N,k} \notin \{X_{n-1}^{1,k}, \dots, X_{n-1}^{N-1,k}\} \\ F(X_{n-1}^{N,k}, U_n^{i_N}), & \text{si } n > k, X_{n-1}^{N,k} \in \{X_{n-1}^{1,k}, \dots, X_{n-1}^{N-1,k}\} \\ & \text{et } i_N = \inf\{i; X_{n-1}^{i,k} = X_{n-1}^{N,k}\} \end{cases}$$

Pour n'importe lequel de ces deux couplages, on définit le temps d'arrêt

$$S_k = \inf\{\ell > k; X_\ell^{1,k} = X_\ell^{2,k} = \dots = X_\ell^{N,k}\},$$

et pour tout $n \in \mathbf{Z}$, on pose

$$\tau(n) = \sup\{k \leq n; S_k \leq n\}.$$

$\tau(n)$ est le plus grand des instants tels que l'état du processus (quel que soit son numéro entre 1 et N) à l'instant n ne dépend pas des états passés avant $\tau(n)$.

Théorème 3.2.6. *Soit $k \in \mathbf{Z}$ et $(X_n^{1,k}, \dots, X_n^{N,k}; n \geq k)$ l'un des couplages multiples définis ci-dessus. Supposons que $\mathbb{P}(\tau(0) > -\infty) = 1$. Alors pour tout $i \in E$, la loi de $X_0^{i,\tau(0)}$ est la probabilité invariante par P .*

PREUVE:

Si $k \in \mathbf{Z}$, $X_0^{i,\tau(0)} = X_0^{i,k}$ sur l'événement $\{\tau(0) > k\}$.

Donc

$$\mathbb{P}(X_0^{i,\tau(0)} = j) = \lim_{k \rightarrow -\infty} \mathbb{P}(X_0^{i,k} = j).$$

Soit μ la probabilité invariante par P .

$$|\mathbb{P}(X_0^{i,k} = j) - \mu_j| = |\mathbb{P}(X_0 = j | X_k = i) - \sum_{\ell \in E} \mu_\ell \mathbb{P}(X_0 = j | X_k = \ell)|$$

$$\leq \sum_{\ell \in E} \mu(\ell) |\mathbb{P}(X_0 = j | X_k = i) - \mathbb{P}(X_0 = j | X_k = \ell)|$$

$$\leq \left(\sum_{\ell \in E} \mu(\ell) \right) \mathbb{P}(\tau(0) < k)$$

$\rightarrow 0$, quand $k \rightarrow -\infty$

Algorithme de couplage depuis le passé

On choisit $k \in \mathbf{Z}_-$

1. On génère U_k, U_{k+1}, \dots, U_0
(ou bien $U_k^i, U_{k+1}^i, \dots, U_0^i, 1 \leq i \leq N$).
2. On construit à l'aide de la suite précédente, en suivant la formule A (resp. B),

$$(X_\ell^{1,k}, \dots, X_\ell^{N,k}, \ell = k, k+1, \dots, 0).$$

3. On teste si oui ou non

$$X_0^{1,k} = X_0^{2,k} = \dots = X_0^{N,k}.$$

Si **oui**, alors $X_0^{1,k}$ est une réalisation de la probabilité invariante μ .

Si **non**, on génère

$$U_{2k}, U_{2k+1}, \dots, U_{k-1}$$

$$(\text{ou bien } U_{2k}^i, U_{2k+1}^i, \dots, U_{k-1}^i; 1 \leq i \leq N)$$

et en utilisant cette suite et la précédente on construit

$$(X_\ell^{1,2k}, \dots, X_\ell^{N,2k}; \ell = 2k, \dots, 0)$$

et on continue comme ci-dessus.

Il reste à donner des conditions qui assurent que $\mathbb{P}(\tau(0) > -\infty) = 1$. On a le

Théorème 3.2.7. (i) Si $\beta(P) > 0$, alors l'algorithme A vérifie

$$\mathbb{P}(\tau(0) > -\infty) = 1.$$

(ii) Si P est apériodique, alors l'algorithme B vérifie $\mathbb{P}(\tau(0) > -\infty) = 1$.

PREUVE:

(i) cf. la sous-section 3.2.1

(ii) cf. étape 1 de la preuve du Théorème 2.6.4.

□

3.3 Le recuit simulé

La recherche des maxima globaux d'une fonction est un des problèmes importants en mathématiques appliquées.

Dans le cas d'une fonction différentiable sur \mathbb{R}^d , on peut partir d'un point arbitraire, et se déplacer dans la direction du gradient, tant que la fonction décroît. Malheureusement une telle méthode conduit à trouver un minimum local, et non global. Dans le cas d'une fonction définie sur un ensemble fini E , on pourrait en principe calculer les valeurs $f(i)$ pour tout i dans E , mais dans les cas intéressants, le cardinal de E est tel qu'une telle procédure n'est pas envisageable.

Nous allons présenter dans cette section la méthode du "recuit simulé", qui par rapport à la méthode du gradient introduit des perturbations aléatoires qui permettent de sortir des bassins d'attraction des minima locaux.

Au cours des calculs, les perturbations aléatoires sont atténuées, de telle sorte que l'on espère finalement aboutir à un des minima globaux. La terminologie provient de l'analogie avec les procédés chimiques de fabrication de certains cristaux, qui si on les refroidit trop vite se figent dans un état différent de l'état désiré, lequel n'est atteint qu'à la suite d'un procédé impliquant un refroidissement très lent, avec éventuellement un réchauffement au cours du procédé.

Nous allons présenter l'algorithme du recuit dans le cas de la minimisation d'une fonction définie sur un ensemble fini E . L'algorithme pour lequel nous établirons un résultat de convergence sera en temps continu. Sa discrétisation pour la mise en oeuvre pratique ne pose pas de problème (encore qu'elle n'est pas forcément indispensable).

Commençons par présenter deux exemples de problèmes de minimisation d'une fonction sur un ensemble fini de cardinal gigantesque.

Exemple 3.3.1. : Le voyageur de commerce. Soit $\{1, \dots, N\}$ un ensemble de N villes. Le voyageur doit passer dans chacune de ces villes, en partant de 1 et en revenant en 1. E est l'ensemble de tous les itinéraires possibles ($\text{card } E = (N - 1)!$). Un itinéraire est une suite

$$i = (i_1, \dots, i_N)$$

telle que $i_1 = 1$, et (i_2, \dots, i_N) constitue une permutation de $\{2, \dots, N\}$. La

fonction coût à minimiser est (avec $i_{N+1} = 1$) :

$$V(i) = \sum_{k=1}^N d(i_k, i_{k+1}),$$

où $d(n, m)$ est la distance de la ville n à la ville m . La recherche des minima globaux de cette fonction V est un des problèmes classiques de la recherche opérationnelle.

Exemple 3.3.2. : Restauration d'images. On reprend le modèle présenté à la section 3.1.2, et on souhaite, pour obtenir une image restaurée (i.e. dont on a supprimé les erreurs d'observation), trouver le maximum de la loi a posteriori, i.e. avec les notations du chapitre 2, à j fixé on cherche

$$\hat{i} = \arg \max_i e^{-\beta H(i)} p^{a(i,j)} (1-p)^{d(i,j)}.$$

Supposons que l'on cherche à maximiser une fonction

$$U : E \rightarrow \mathbb{R}_-,$$

telle que, pour fixer les idées,

$$\max_{i \in E} U_i = 0.$$

On cherche un des i tels que $U_i = 0$.

Pour tout $\beta > 0$, on définit la probabilité π_β sur E par :

$$\pi_{\beta,i} = Z_\beta^{-1} e^{\beta U_i}, \quad i \in E$$

avec $Z_\beta = \sum_{i \in E} e^{\beta U_i}$. Le paramètre β est destiné à tendre vers $+\infty$. Quand $\beta \rightarrow +\infty$, la probabilité π_β converge vers la probabilité uniform sur les maxima de U .

A chaque $\beta > 0$, on associe la matrice de transition d'une chaîne de Markov irréductible et apériodique, de probabilité invariante π_β . On peut la choisir par exemple comme suit. Soit G un graphe non orienté dans E , i.e. une collection de paires de points de E , tel que pour tout $i, j \in E$, il existe n et $i = i_1, i_2, \dots, i_n = j \in E$ tels que $(i_k, i_{k+1}) \in G$, $1 \leq k \leq n-1$. Posons

$$n_i = |\{j, (i, j) \in G\}|,$$

$$P_{\beta,ij} = \mathbf{1}_{(i,j) \in G} n_j^{-1} e^{\beta(U_i - U_j)} \wedge 1.$$

Alors la matrice P_β dont les éléments hors diagonaux sont donnés par

$$P_{\beta,ij} = \mathbf{1}_{(i,j) \in G} n_j^{-1} e^{\beta(U_j - U_i)} \wedge 1,$$

et convenablement complétée sur la diagonale, a les propriétés requises. Notons que plus β est grand, plus les transitions qui diminuent la valeur de U sont rares. Pourvu que le choix du graphe G ne rende pas la chaîne périodique, si β est fixé et $\{X_n^\beta, n \geq 0\}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition P_β , la loi de X_n^β converge vers π_β quand $n \rightarrow \infty$. L'idée de l'algorithme du recuit est de faire dépendre β de n , de telle sorte que $\beta \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow \infty$, avec l'espoir que alors X_n converge vers le (ou l'ensemble des) maximum de la fonction U . Ceci est vrai si β tend suffisamment lentement vers $+\infty$ (d'où la terminologie "recuit"). Nous donnerons un résultat dans ce sens pour l'analogie d'une chaîne de Markov, mais en temps continu, à la section 7.10 ci-dessous.

3.4 Algorithmes génétiques

Les "algorithmes génétiques" constituent une autre classe d'algorithmes stochastiques qui sont utilisés pour calculer l'optimum d'une fonction, dans des cas où cet optimum ne se laisse pas calculer simplement.

Supposons que l'on cherche à maximiser une fonction

$$f : E \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

avec $|E| < \infty$, mais $|E|$ "très grand" (tel que en particulier l'algorithme consistant à comparer toutes les valeurs $f(i)$, $i \in E$ soit inenvisageable).

Un algorithme génétique est un algorithme itératif, dont une des particularités est de générer une suite dans E^m (et non dans E), i.e. de faire évoluer au cours des itérations non pas un "point" ou un "individu", mais une "population" de m "individus". Chaque itération de l'algorithme consiste en une succession de trois étapes : *Mutation*, *Croisement*, *Sélection*, qui sont censées simuler les mécanismes naturels qui régissent l'évolution des espèces d'êtres vivants.

Le mécanisme de *mutation* modifie chaque individu de la population, indépendamment des autres. Le *croisement* produit deux nouveaux individus, à partir de chaque paire d'individus prise dans la population résultant de l'étape de mutation. Enfin la *sélection* choisit m nouveaux individus parmi

les individus présents à l'issue de l'étape de croisement, la procédure de choix favorisant les individus correspondant aux valeurs de f plus élevées [$f(i)$ est appelé le "niveau d'adaptation" de l'individu $i \in E$ - en anglais "fitness"]

Commençons par décrire les mécanismes de mutation et de croisement dans deux exemples d'application importants, avant de présenter un formalisme général. Dans un premier temps, on supposera pour fixer les idées que m est pair.

3.4.1 Maximisation d'une fonction sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^d$

Soit $f : D = \prod_{\ell=1}^d [a_\ell, b_\ell] \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$. On cherche $\arg \max_{x \in D} f(x)$. Supposons que l'on cherche à déterminer le (ou les) x optimal (optimaux) avec une précision de 6 chiffres après la virgule. Pour $1 \leq \ell \leq d$, soit m_ℓ le plus petit entier tel que $(b_\ell - a_\ell)10^6 \leq 2^{m_\ell} - 1$. On représente chaque coordonnée x_ℓ de x sous la forme

$$x_\ell = a_\ell + \text{décimal}(1001 \dots 001_2) \frac{b_\ell - a_\ell}{2^{m_\ell} - 1},$$

et on voit que l'on peut choisir $E = \{0, 1\}^N$, avec $N = \sum_i^d m_\ell$. Si $i \in E$, on notera $f(i)$ pour $f(x)$, $x \in D$ représenté par i .

a. Mutation

Chaque individu de la population subit une mutation suivant le même mécanisme, indépendamment des autres. Ce mécanisme peut par exemple être le suivant. Si $i, j \in E$, on définit la "distance de Hamming" de i à j :

$$H(i, j) = \text{card}\{k; i_k \neq j_k\}.$$

On définit alors la matrice markovienne :

$$\alpha(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{si } H(i, j) \neq 1, \\ 1/N & \text{si } H(i, j) = 1; \end{cases}$$

ce qui revient à dire que l'on choisit au hasard avec la probabilité uniforme la coordonnée de i que l'on modifie (en changeant 0 en 1, 1 en 0).

b. Croisement

Pour $0 \leq k \leq N$, on définit l'opérateur

$T_k : E \times E \rightarrow E \times E$ comme suit :

$$T_k(i, j) = (i', j'), \text{ où}$$

$$\begin{aligned} i' &= i_1, \dots, i_k j_{k+i}, \dots, j_N \\ j' &= j_1, \dots, j_k i_{k+1}, \dots, i_N. \end{aligned}$$

Notons que $T_0(i, j) = (j, i)$ et $T_N(i, j) = (i, j)$.

b.1

Un premier mécanisme de croisement est le suivant : pour chaque paire $(x_{2\ell-1}, x_{2\ell})$, $1 \leq \ell \leq \frac{m}{2}$, de la population $x = (x_1, \dots, x_m) \in E^m$, on tire un entier k au hasard entre 1 et $N - 1$, et on remplace la paire $(x_{2\ell-1}, x_{2\ell})$ par la paire $T_k(x_{2\ell-1}, x_{2\ell})$.

Notons que l'on peut faire précéder ces opérations d'une permutation aléatoire des individus. et que pour chaque paire on peut décider de faire ou non un croisement avec une certaine probabilité (ce qui revient à permettre de choisir T_0 ou T_N).

b.2

Un mécanisme "plus évolué" consiste à poser, pour tout quadruplet $i, j, i', j' \in E$,

$$C((i, j), (i', j')) = \text{card}\{k; 1 \leq k \leq N, T_k(i, j) = (i', j')\}$$

et à procéder pour chaque paire au croisement suivant la matrice markovienne;

$$\beta((i, j), (i', j')) = \frac{C((i, j), (i', j')) + C((j, i), (i', j'))}{\sum_{i'', j'' \in E} [C((i, j), (i'', j'')) + C((i, j), (i'', j''))]}$$

3.4.2 Le problème du voyageur de commerce

Etant donné N villes : $1, 2, \dots, N$, le problème est de choisir un ordre de visite de ces villes (chaque ville devant être visitée une et une seule fois) qui minimise la longueur totale du trajet. A tout couple (k, ℓ) de ces villes,

on associe leur distance $d(k, \ell)$. E est l'ensemble des $N!$ permutations de ces villes. Un point $i \in E$ est donc une permutation, i.e. une bijection

$$\sigma_i : \{1, 2, \dots, N\} \rightarrow \{1, 2, \dots, N\}.$$

On peut représenter i par la suite ordonnée

$$(i_1, \dots, i_N) = (\sigma_i(1), \dots, \sigma_i(N)),$$

et on associe à i le coût

$$g(i) = \sum_{k=1}^N d(i_k, i_{k+1}),$$

avec par convention $N + 1 = 1$. Ce coût doit être minimisé, donc on définit le "niveau d'adaptation" de i par

$$f(i) = M - g(i),$$

où M est choisi tel que $f(i) \geq 0, \forall i \in E$.

Remarquons que les permutations circulaires ne changent pas $f(i)$. Donc on peut imposer $\sigma_i(1) = 1, \forall i$, autrement dit que la permutation ne porte que sur les villes $(2, \dots, N)$.

a. Mutations

Plusieurs types de mutations peuvent être envisagées, notamment :

- échange de deux villes prises au hasard,
- prendre une ville au hasard, et la replacer au hasard dans la liste.

b. Croisement

Etant donnés deux individus $i, j \in E$, i.e. deux "tournées"

$$(i_1, \dots, i_N)$$

$$\text{et } (j_1, \dots, j_N),$$

on choisit $1 \leq k \leq \ell \leq N$, on gèle les villes i_k, \dots, i_ℓ et j_k, \dots, j_ℓ à leurs emplacements respectifs, et en démarrant au rang $\ell + 1$, on place dans la tournée i (resp. j) les villes restantes en respectant l'ordre de ces villes dans l'"ancienne" tournée j (resp. i).

Exemple : $N=9$

$$i = (423|1876|59)$$

$$j = (182|4567|93)$$

$$i' = (xxx|1876|xx)$$

$$j' = (xxx|4567|xx)$$

$$i' = (245|1876|93)$$

$$j' = (318|4567|92)$$

Plusieurs autres types de croisement ont été proposés dans la littérature.

3.4.3 Un formalisme général

On notera $x = (x_1, \dots, x_m)$ les points de E^m , $\{x\}$ désignera le sous-ensemble $\{x_1, \dots, x_m\}$ de E . Un algorithme génétique consiste à construire une chaîne de Markov $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ à valeurs dans E^m . Le passage de X_n à X_{n+1} se décompose en trois étapes :

$$X_n \xrightarrow{\text{mutation}} Y_n \xrightarrow{\text{croisement}} Z_n \xrightarrow{\text{sélection}} X_{n+1}$$

a. Mutation

Le mécanisme de la mutation est précisé par les probabilités de transition

$$\mathbb{P}(Y_n = y | X_n = x) = \prod_{k=1}^m \alpha(x_k, y_k),$$

où α est une matrice markovienne *irréductible*.

b. Croisement

On précise le croisement en posant

$$\mathbb{P}(Z_n = z | Y_n = y) = \prod_{1 \leq k \leq \frac{m}{2}} \beta((y_{2k-1}, y_{2k}), (z_{2k-1}, z_{2k})),$$

où $\beta : E^2 \times E^2 \rightarrow [0, 1]$ est une matrice markovienne qui vérifie :

$$(b.1) \beta((i, i), (i, i)) = 1$$

$$(b.2) \beta((i, j), (i, j)) > 0, \forall i, j \in E$$

$$(b.3) \beta((i_1, j_1), (i_2, j_2)) = \beta((j_1, i_1), (j_2, i_2)), \forall i_1, j_1, i_2, j_2 \in E.$$

c. Sélection

On va préciser comment tirer X_{n+1} , sachant que $Z_n = z$. Posons $\Lambda(z) = f(\{z\})$, l'ensemble des valeurs prises par la fonction f sur la population $\{z\}$. On énumère cet ensemble sous la forme :

$$\Lambda(z) = \{\lambda_h; 1 \leq h \leq |\Lambda(z)|\}.$$

On choisit une fonction croissante $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$. Pour $1 \leq k \leq m$, la k -ième coordonnée de X_{n+1} est tirée comme suit.

On tire d'abord une v.a. à valeurs dans $\Lambda(z)$, suivant la probabilité

$$\mathbb{P}(\lambda = \lambda_h) = \frac{F(\lambda_h)}{|\Lambda(z)| \sum_{r=1}^{|\Lambda(z)|} F(\lambda_r)},$$

puis on choisit un individu dans l'ensemble $\{z\} \cap f^{-1}(\lambda)$. Une possibilité est de choisir X_{n+1}^k avec la loi uniforme sur cet ensemble.

On va maintenant décrire une procédure plus compliquée, sur laquelle s'appuient les résultats que nous énoncerons plus loin. Tout d'abord, pour chaque $1 \leq h \leq |\Lambda(z)|$, on choisit une permutation σ_h de l'ensemble $\{z\} \cap f^{-1}(\lambda_h)$, suivant la loi uniforme sur toutes les permutations de cet ensemble.

On définit ensuite des entiers $\tau(k, h)$ pour $0 \leq k \leq h+1$, et $1 \leq h \leq m$ par

$$\begin{aligned} \tau(0, h) &= 1, \quad \tau(h+1, h) = m, \quad 1 \leq h \leq m, \\ \tau(k, h) &= 2k \left\lceil \frac{m}{2(k+1)} \right\rceil + 1, \quad 1 \leq k \leq h \leq m. \end{aligned}$$

On choisit alors X_{n+1}^k dans l'ensemble $z^\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \{z\} \cap f^{-1}(\lambda)$ comme suit :

- (i) Si $k \geq \tau(|z^\lambda|, |z^\lambda|)$, X_{n+1}^k est choisi avec la loi uniforme sur l'ensemble z^λ ;
- (ii) Sinon il existe $1 \leq r \leq |z^\lambda|$ tel que

$$\tau(r-1, |z^\lambda|) \leq k < \tau(r, |z^\lambda|),$$

et on choisit pour X_{n+1}^k l'élément d'indice $\sigma_h(r)$ de l'ensemble $\{z\} \cap f^{-1}(\lambda_h)$ ($\lambda = \lambda_h$).

3.4.4 Comportement des algorithmes génétiques

Il y a peu de travaux théoriques sur les algorithmes génétiques. La plupart des contributeurs se sont contentés de proposer des mécanismes de mutation, croisement et sélection, et d'expérimenter les algorithmes correspondants sur divers exemples.

Cependant, R. Cerf [7] a obtenu des résultats théoriques assez précis, en plongeant les algorithmes génétiques dans la classe des algorithmes de type recuit. Pour cela, il fait dépendre le noyau de mutation et la loi de probabilité dans la procédure de sélection de λ , d'un paramètre ℓ (destiné à tendre vers $+\infty$) comme suit. Il choisit deux paramètres $a, c > 0$, et pose :

$$\alpha_\ell(i, j) = \begin{cases} \alpha(i, j)\ell^{-a}, & \text{si } i \neq j, \\ 1 - \sum_{k \neq i} \alpha(i, k)\ell^{-a}, & \text{si } i = j; \end{cases}$$

$$F_\ell(\lambda) = \exp(c\lambda \log \ell).$$

La chaîne $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ dépend alors du paramètre ℓ . Notons que pour $\ell = +\infty$, on a un algorithme de croisement-sélection (il n'y a plus de mutation) où la sélection se fait uniquement parmi les individus les mieux adaptés.

Donc après chaque étape de sélection, tous les individus ont le même niveau d'adaptation. Notons que si m est impair et que le croisement laisse un des individus inchangé, alors toujours pour $\ell = +\infty$, le niveau d'adaptation est croissant au cours des générations.

Posons $f^* = \max_{i \in E} f(i)$, et

$$K^* = \{i \in E; f(i) = f^*\}.$$

On a le

Théorème 3.4.1. [7] *Il existe une taille de population critique m^* , qui dépend de (E, f, α, β) et aussi des paramètres a et c , telle que $\forall m \geq m^*$, $\forall x, y \in E^m \times K^*$,*

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n^\ell = y | X_0^\ell = x) = \frac{1}{|K^*|}$$

On considère maintenant, comme dans le cas du recuit, une chaîne non homogène, obtenue en choisissant une suite $\ell(n)$ (avec $\ell(n) \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$). Notons $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ cette chaîne de Markov. On a alors le

Théorème 3.4.2. [7] *Supposons que $m \geq m^*$. Alors il existe une constante $H > 0$ telle que les deux affirmations suivantes soient équivalentes :*

$$(i) \sup_{x \in E^n} \mathbb{P}(\{X_n\} \neq K^* | X_0 = x) \rightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow \infty,$$

$$(ii) \sum_{n=0}^{\infty} \ell(n)^{-H} = +\infty.$$

En outre, il existe H^ tel que les deux affirmations suivantes soient équivalentes :*

$$(j) \forall x \in E^n, \mathbb{P}(\exists N, \forall n \geq N, K^* \subset \{X_n\} | X_0 = x) = 1$$

$$(jj) \sum_{n=0}^{\infty} \ell(n)^{-H} = \infty, \sum_{n=0}^{\infty} \ell(n)^{-H^*} < \infty.$$

Remarque 3.4.3. *Comme dans le cas du recuit, la convergence vers l'ensemble des maxima requiert que $\ell(n)$ converge suffisamment lentement vers l'infini. Cependant, la seconde affirmation du dernier théorème indique que faire tendre ℓ vers l'infini accélère la convergence : si $\ell(n)$ ne tend pas trop lentement vers l'infini, la chaîne est absorbée en temps fini par l'ensemble des maxima de f .*

Remarque 3.4.4. *Tous les résultats sur les algorithmes génétiques requièrent que la taille de la population soit suffisante. Notons qu'une partie au moins de l'algorithme peut être parallélisée (surtout la phase de mutation mais aussi la phase de croisement). Il est clair que la phase de sélection a d'autant plus de chances d'être efficace que la population est nombreuse. Notons enfin que la deuxième affirmation du dernier théorème requiert que $H^* > H$, ce qui est vrai pour m suffisamment grand.*

Remarque 3.4.5. *Si l'on supprime la phase de croisement (ou équivalentement si l'on choisit*

$$\beta((i_1, j_1), (i_2, j_2)) = \frac{1}{2}\delta(i_1, i_2)\delta(j_1, j_2) + \frac{1}{2}\delta(i_1, j_2)\delta(j_1, i_2),$$

on a un algorithme de mutation-sélection. Le but de la phase de croisement est d'accélérer la convergence, effet bénéfique qui peut être mesuré sur certains exemples.

3.5 Exercices

Exercice 3.5.1. Soit E un espace d'états dénombrable et p et q des densités de probabilité, avec $0 < p \leq cq$, q étant une densité facilement simulable. On considère alors une suite Y_n , $n \geq 1$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi q , globalement indépendantes de la variable aléatoire X_0 . On définit par récurrence :

$$X_{n+1} = \begin{cases} Y_{n+1} & \text{avec probabilité } \frac{p(Y_{n+1})}{cq(Y_{n+1})} \\ X_n & \text{avec probabilité } 1 - \frac{p(Y_{n+1})}{cq(Y_{n+1})} \end{cases}$$

1. En considérant une suite U_n de variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $[0, 1]$ écrire X_{n+1} sous la forme $f(X_n, U_{n+1}, Y_{n+1})$, et en déduire que X_n est une chaîne de Markov.
2. Calculer la probabilité de transition P_{ij} de X_n .
3. Calculer μP pour une probabilité μ et en déduire que la loi de X_n converge vers une unique probabilité invariante égale à p .
4. Quel rapport y-a-t-il entre cette chaîne et la méthode de rejet classique ?

Exercice 3.5.2. Soit P_{ij} un noyau de transition d'une chaîne de Markov sur un espace d'état dénombrable E . On suppose que :

$$P_{ij} \geq \alpha c_j, \text{ pour tout } i \in E, \quad (3.1)$$

où c est une mesure de probabilité et $\alpha > 0$. On identifie l'ensemble des mesures bornées sur E à $\ell^1(E)$ muni de la norme $|\nu| = \sum_{x \in E} |\nu(x)|$

1. Soit ν une mesure bornée de masse totale nulle. Montrer que $|\nu P| \leq (1 - \alpha)|\nu|$. En déduire que si μ et μ' deux mesures de probabilité sur E on a :

$$|\mu P - \mu' P| \leq (1 - \alpha)|\mu - \mu'|.$$

2. Montrer que s'il existe une mesure de probabilité invariante, elle est forcément unique et que pour toute probabilité μ la suite μP^n est de Cauchy.
3. Soit $(X_n, n \geq 0)$ une chaîne de Markov de matrice de transition P . Montrer que quelle que soit la loi initiale μ de X_0 , la loi de X_n converge vers une unique loi de probabilité invariante ν et que de plus :

$$|\mu P^n - \nu| \leq C \rho^n$$

où C est une constante finie et $0 < \rho < 1$.

4. Montrer que les résultats précédents sont conservés s'il existe $\ell \geq 1$:

$$P_{ij}^\ell \geq \alpha c_j, \text{ pour tout } i, j \in E. \quad (3.2)$$

5. On considère maintenant l'algorithme de Métropolis sur un espace E fini. On suppose que $P_{ij} = P_{ji}$ et que l'équation (3.1) est vérifiée. On cherche à simuler une loi μ donnée à une constante près par :

$$\mu_i = C e^{-\beta H(i)}.$$

Écrire la probabilité de transition \tilde{P}_{ij} sur E qui permet de construire l'algorithme de Métropolis.

6. Vérifier que \tilde{P} vérifie l'équation (3.1). Proposer une méthode de simulation approchée selon la loi μ .

Exercice 3.5.3. On veut résoudre dans \mathbb{R}^d l'équation

$$(I - A)x = b \quad (3.3)$$

où A est une matrice de norme strictement inférieure à 1. Pour ceci on considère une chaîne de Markov X_n sur $E = \{1, 2, \dots, d\}$ de loi initiale μ strictement positive et de transition $P(i, j)$ strictement positive sur $E \times E$.

1. Pour $n \geq 1$ et $y \in \mathbb{R}^d$ on pose :

$$W_n = y(X_0) \frac{A(X_0, X_1) \cdots A(X_{n-1}, X_n)}{\mu(X_0) P(X_0, X_1) \cdots P(X_{n-1}, X_n)} b(X_n)$$

Calculer $\mathbb{E}(W_n)$. En déduire une simulation d'une solution approchée de l'équation (3.3).

2. On pose $\tilde{E} = E \cup \{\delta\}$ et on considère maintenant une chaîne avec cimetière δ . C'est à dire une chaîne \tilde{X}_n de loi initiale $\tilde{\mu}$ portée par E , strictement positive sur E et de transition $\tilde{P}(i, j)$ strictement positive sur $E \times \tilde{E}$ telle que $\tilde{P}(\delta, \delta) = 1$.

On pose $T = \inf\{n \geq 1 ; \tilde{X}_n = \delta\}$.

1. Montrer que T est fini presque sûrement.

2. On pose

$$W = y(\tilde{X}_0) \frac{A(\tilde{X}_0, \tilde{X}_1) \cdots A(\tilde{X}_{T-2}, \tilde{X}_{T-1})}{\tilde{\mu}(\tilde{X}_0) \tilde{P}(\tilde{X}_0, \tilde{X}_1) \cdots \tilde{P}(\tilde{X}_{T-2}, \tilde{X}_{T-1}) \tilde{P}(\tilde{X}_{T-1}, \tilde{X}_T)} b(\tilde{X}_{T-1})$$

Calculer $\mathbb{E}(W)$ et en déduire une simulation de la solution de l'équation (3.3).

Chapitre 4

Statistique et Chaînes de Markov

4.1 Statistique des chaînes de Markov

Le but de cette section est d'introduire des notions élémentaires sur la statistique des chaînes de Markov.

On a vu que pour tout $n > 0$, la loi du vecteur aléatoire (X_0, X_1, \dots, X_n) ne dépend que de la loi initiale μ et de la matrice de transition P .

La première question que l'on peut se poser en statistique des chaînes de Markov est : peut-on estimer le couple (μ, P) au vu de l'observation de la suite (X_0, X_1, \dots, X_n) , d'une telle façon que l'erreur d'estimation soit "petite" quand n est "grand". Comme on va le voir ci-dessous, on peut estimer P . Par contre, on ne peut raisonnablement estimer la loi initiale μ que si celle-ci coïncide avec la probabilité invariante, et que l'on est dans le cas irréductible et récurrent positif, ce que nous supposons dans toute la suite de cette section.

Commençons par l'estimation de la probabilité invariante μ .

Pour tout $i \in E$,

$$\hat{\mu}_i^n = \frac{1}{n+1} \sum_{\ell=0}^n \mathbf{1}_{\{X_\ell=i\}}$$

est un estimateur consistant de μ_i , puisqu'une conséquence immédiate du théorème ergodique est que

Proposition 4.1.1. *Pour tout $i \in E$, $\hat{\mu}_i^n \rightarrow \mu_i$ p.s., quand $n \rightarrow \infty$.*

Passons maintenant à l'estimation des P_{ij} , $i, j \in E$. On choisit l'estimateur

$$\hat{P}_{ij}^n = \frac{\sum_{\ell=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{X_\ell=i, X_{\ell+1}=j\}}}{\sum_{\ell=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{X_\ell=i\}}}$$

On a la

Proposition 4.1.2. *Pour tout $i, j \in E$, $\hat{P}_{ij}^n \rightarrow P_{ij}$ p.s. quand $n \rightarrow \infty$.*

PREUVE: On a bien sûr

$$\hat{P}_{ij}^n = \left(\frac{1}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{X_\ell=i\}} \right)^{-1} \frac{1}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{X_\ell=i, X_{\ell+1}=j\}}.$$

On sait que

$$\frac{1}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{X_\ell=i\}} \rightarrow \mu_i.$$

Pour $n \geq 0$, posons $\tilde{X}_n = (X_n, X_{n+1})$. Il n'est pas très difficile de vérifier que $\{\tilde{X}_n, n \geq 0\}$ est une chaîne de Markov irréductible et récurrente positive à valeurs dans $\tilde{E} = \{(i, j) \in E \times E, P_{ij} > 0\}$, de matrice de transition $\tilde{P}_{(i,j)(k,\ell)} = \delta_{jk} P_{k\ell}$, et de probabilité invariante $\tilde{\mu}_{(i,j)} = \mu_i P_{ij}$. Le théorème ergodique appliqué à la chaîne $\{\tilde{X}_n\}$ entraîne que

$$\frac{1}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{X_\ell=i, X_{\ell+1}=j\}} \rightarrow \mu_i P_{ij}$$

□

4.2 Chaînes de Markov cachées

Des algorithmes utilisés dans des domaines variés, comme la reconnaissance de la parole, ou l'analyse de séquences extraites des génomes, sont

basés sur le postulat que la suite observée est une réalisation d'une suite de v.a. (Y_0, Y_1, \dots, Y_N) à valeurs dans l'espace fini F , qui sont reliées à une chaîne de Markov $\{X_n; n \geq 0\}$ de loi initiale μ et de matrice de transition P , à valeurs dans l'espace fini E de la façon suivante : pour tout $k \geq 1$, $0 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_k \leq p$, $i_0, i_1, \dots, i_p \in E$, $j_1, \dots, j_k \in F$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_{n_1} = j_1, \dots, Y_{n_k} = j_k / X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_p = i_p) \\ = \prod_{\ell=1}^k \mathbb{P}(Y_{n_\ell} = j_\ell / X_{n_\ell} = i_{n_\ell}) \\ = \prod_{\ell=1}^k Q_{i_{n_\ell} j_\ell}, \end{aligned}$$

où Q est une matrice de transition de E dans F , i.e. les lignes de Q sont indexées par les éléments de E , et chaque ligne est une loi de probabilité sur F . Une façon de "construire" la suite des (Y_n) à partir de la chaîne X . est de se la donner sous la forme

$$Y_n = f(X_n, \xi_n), \quad n \in \mathbb{N},$$

où les ξ_n sont i.i.d. à valeurs dans un espace G (par exemple dénombrable), globalement indépendantes de la chaîne de Markov X ., et $f : F \times G \rightarrow E$ est une application donnée. Alors pour tout $i \in E$, $j \in F$, $n \geq 1$, $Q_{ij} = \mathbb{P}(f(i, \xi_n) = j)$. Cela revient à supposer que, conditionnellement en la chaîne X ., les observations sont indépendantes. On pourrait supposer plus généralement (nous ne le ferons pas dans la suite) que conditionnellement en les observations, les Y_n forment une chaîne de Markov, ce qui revient à supposer une relation de récurrence de la forme

$$Y_n = f(Y_{n-1}, X_n, \xi_n), \quad n \in \mathbb{N},$$

où les ξ_n sont à nouveau i.i.d. et globalement indépendants de la chaîne X ..

Le paramètre du modèle ci-dessus est le triplet $\theta = (\mu, P, Q)$, où μ est un vecteur de dimension $d = \text{card}E$, P une matrice $d \times d$, et Q une matrice $d \times e$, où $e = \text{card}F$. Dans la suite, on notera \mathbb{P}_θ la loi des $\{(X_n, Y_n), n \geq 0\}$. θ est un paramètre qu'il faut en fait estimer. Il y a trois problèmes à résoudre dans l'utilisation des chaînes de Markov cachées :

Problème 1 : Pour tout $N \in \mathbb{N}$, $j_0, j_1, \dots, j_N \in F$, calculer

$$\mathbb{P}_\theta(Y_0 = j_0, Y_1 = j_1, \dots, Y_N = j_N).$$

Problème 2 : Si l'on a observé la suite j_0, j_1, \dots, j_N , quelle suite de réalisations i_0, i_1, \dots, i_N des états X_0, X_1, \dots, X_N du système explique “le mieux” (en un sens à préciser) ces observations ?

Problème 3 : Au vu des observations j_0, j_1, \dots, j_N , comment estimer au mieux le paramètre inconnu θ .

Solution du problème 1 Il est clair, au vu de ce qui précède, que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\theta(X_0 = i_0, Y_0 = j_0, X_1 = i_1, Y_1 = j_1, \dots, X_N = i_N, Y_N = j_N) \\ = \mu_{i_0} P_{i_0 i_1} \times \dots \times P_{i_{N-1} i_N} \times Q_{i_0 j_0} Q_{i_1 j_1} \times \dots \times Q_{i_N j_N}. \end{aligned}$$

Et donc

$$\mathbb{P}_\theta(Y_0 = j_0, \dots, Y_N = j_N) = \sum_{i_0, i_1, \dots, i_N \in E} \mu_{i_0} P_{i_0 i_1} \times \dots \times P_{i_{N-1} i_N} Q_{i_0 j_0} \times \dots \times Q_{i_N j_N}$$

Mais cette formule n'est pas utilisable en pratique, car elle suppose d'effectuer de l'ordre de Nd^N opérations, ce qui, dès que N est un peu grand, devient irréalisable. On va maintenant voir une procédure récursive qui résout le problème 1, à savoir la :

Procédure progressive

Considérons la suite (indexée par n) des vecteurs ligne $\alpha(n)$, définis par :

$$\alpha_i(n) = \mathbb{P}_\theta(Y_0 = j_0, Y_1 = j_1, \dots, Y_n = j_n, X_n = i), i \in E.$$

Cette suite se calcule par une récurrence “progressive” comme suit :

1. Initialisation :

$$\alpha_i(0) = \mu_i Q_{ij_0}, i \in E.$$

2. Récurrence :

$$\alpha_i(n+1) = (\alpha(n)P)_i Q_{ij_{n+1}}, i \in E.$$

La quantité cherchée est donnée par :

$$\sum_{i \in E} \alpha_i(N).$$

Ce calcul requiert de l'ordre de $d^2 N$ opérations.

On pourrait aussi calculer la même quantité en utilisant la :

Procédure rétrograde

On introduit les vecteurs colonne $\beta(n)$, définis par :

$$\beta_i(n) = \mathbb{P}_\theta(Y_{n+1} = j_{n+1}, \dots, Y_N = j_N / X_n = i), i \in E.$$

Cette suite se calcule par une récurrence “rétrograde” comme suit :

1. Initialisation :

$$\beta_i(N) \stackrel{\text{def}}{=} 1, i \in E.$$

2. Récurrence :

2-a $\tilde{\beta}_i(n) = \beta_i(n)Q_{ij_n}, i \in E.$

2-b $\beta(n-1) = P\tilde{\beta}(n).$

Finalement la quantité cherchée vaut le scalaire (produit d’un vecteur ligne à gauche par un vecteur colonne à droite) :

$$\mu\tilde{\beta}(0).$$

A nouveau, le nombre d’opérations requises est de l’ordre de d^2N . Notons que

$$\tilde{\beta}_i(n) = \mathbb{P}_\theta(Y_n = j_n, Y_{n+1} = j_{n+1}, \dots, Y_N = j_N | X_n = i), i \in E.$$

Solution du problème 2 Etat le plus probable à l’instant n

On peut tout d’abord se poser la question de l’état “le plus probable” de la chaîne à l’instant n , i.e. de “la réalisation la plus probable de X_n ”, n fixé, $0 \leq n \leq N$, au vu des observations $Y_0 = j_0, \dots, Y_n = j_n$. C’est à dire que l’on veut calculer :

$$\text{ArgMax}_{i \in E} \mathbb{P}_\theta(X_n = i / Y_0 = j_0, \dots, Y_N = j_N).$$

Il est facile de voir que

$$\mathbb{P}_\theta(X_n = i, Y_0 = j_0, \dots, Y_N = j_N) = \alpha_i(n)\beta_i(n), i \in E.$$

Et donc

$$\mathbb{P}_\theta(X_n = i / Y_0 = j_0, \dots, Y_n = j_n) = \frac{\alpha_i(n)\beta_i(n)}{\alpha(n)\beta(n)}.$$

Et donc la recherche de l'argument \tilde{c}_n qui maximise $\mathbb{P}_\theta(X_n = i/Y_0 = j_0, \dots, Y_N = j_N)$ se ramène à la recherche de l'argument qui maximise $\alpha_i(n)\beta_i(n)$.

Cette maximisation peut être faite pour chaque n ; elle produit la suite $\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_N$.

Comme la maximisation est faite séparément pour chaque n , la suite $\{\tilde{c}_n\}$ peut ne pas être du tout "probable", au sens où si certains termes de la matrice P sont nuls, il se peut que cette suite ne soit pas une réalisation "possible" de la chaîne $\{X_n\}$.

On voudrait donc plutôt calculer

$$(i_0^*, \dots, i_N^*) = \text{ArgMax}_{i_0, i_1, \dots, i_N} \mathbb{P}_\theta(X_0 = i_0, \dots, X_N = i_N / Y_0 = j_0, \dots, Y_N = j_N).$$

Ce calcul est effectué par :

L'algorithme de Viterbi

Définissons la suite de vecteurs ligne $\delta(n)$ par :

$$\delta_i(n) = \max_{i_0, i_1, \dots, i_{n-1}} \mathbb{P}_\theta(X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i, Y_0 = j_0, \dots, Y_n = j_n)$$

$\delta_i(n)$ est en quelque sorte la plus forte probabilité d'une trajectoire des $\{X_k, 0 \leq k \leq n-1\}$, qui se termine par $X_n = i$, et correspondant à la suite d'observations j_0, \dots, j_n . On a la formule de récurrence suivante entre les vecteurs $\delta(n)$:

$$\delta_i(n+1) = (\delta(n) * P)_i Q_{ij_{n+1}}$$

où l'opération $*$ qui à un vecteur ligne de dimension d et une matrice $d \times d$ associe un vecteur ligne de dimension d est définie comme suit :

$$(\delta * P)_i = \sup_{j \in E} \delta_j P_{ji}.$$

L'algorithme de Viterbi consiste à calculer les $\delta(n)$ de $n = 0$ à $n = N$, puis à retrouver la trajectoire optimale en cheminant pas à pas dans le sens "rétrograde" : connaissant i_n^* , on en déduit i_{n-1}^* par la formule :

$$i_{n-1}^* = \psi_{i_n^*}(n),$$

avec

$$\psi_i(n) = \text{ArgMax}_{j \in E} \delta_j(n-1) P_{ji}.$$

L'algorithme de Viterbi est décrit comme suit :

1. Initialisation :

$$\begin{aligned}\delta_i(0) &= \mu_i Q_{ij_0}, \quad i \in E; \\ \psi(0) &= 0.\end{aligned}$$

2. Récurrence : pour $1 \leq n \leq N$,

$$\begin{aligned}\delta_i(n) &= (\delta(n-1) * P)_i Q_{ij_n}, \\ \psi_i(n) &= \operatorname{argmax}_{j \in E} \delta_j(n-1) P_{ji}, \quad i \in E.\end{aligned}$$

3. Etape finale :

$$\begin{aligned}\delta^* &= \max_{i \in E} \delta_i(N) \\ i_N^* &= \operatorname{argmax}_{i \in E} \delta_i(N).\end{aligned}$$

4. Récurrence rétrograde

$$i_n^* = \psi_{i_{n+1}^*}(n+1), \quad 0 \leq n < N.$$

Solution du problème 3 Dans les applications, l'hypothèse que les observations proviennent d'une chaîne de Markov cachée de paramètre $\theta = (\mu, P, Q)$ est relativement arbitraire, et en tout cas le paramètre θ est inconnu. On pourrait construire un test statistique de l'hypothèse "les observations proviennent d'une chaîne de Markov cachée de paramètre $\theta = (\mu, P, Q)$ ". Nous n'aborderons pas ce problème. Par contre, nous allons décrire un algorithme d'estimation de θ . La statistique mathématique nous enseigne qu'un bon estimateur de θ est l'estimateur du maximum de vraisemblance :

$$\hat{\theta}_N = \operatorname{argmax}_{\theta} \mathbb{P}_{\theta}(Y_0 = j_0, Y_1 = j_1, \dots, Y_N = j_N).$$

Pour allger les écritures, on notera dorénavant

$$\begin{aligned}O_N &= \{Y_0 = j_0, Y_1 = j_1, \dots, Y_N = j_N\}, \\ X^N &= (X_0, X_1, \dots, X_N), \quad i^N = (i_0, i_1, \dots, i_N).\end{aligned}$$

On ne connaît pas de méthode pour trouver un maximum global de la fonction

$$\theta \rightarrow \mathbb{P}_{\theta}(O_N).$$

On va indiquer un algorithme itératif qui converge vers un maximum local de cette fonction, l'algorithme de Baum–Welch. Remarquons tout d'abord que :

$$\mathbb{P}_\theta(O_N) = \frac{\mathbb{P}_\theta(X^N = i^N, O_N)}{\mathbb{P}_\theta(X^N = i^N | O_N)}, \text{ d'où :}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\theta_0}(X^N = i^N | O_N) \log \mathbb{P}_\theta(O_N) &= \mathbb{P}_{\theta_0}(X^N = i^N | O_N) \log \mathbb{P}_\theta(X^N = i^N, O_N) \\ &\quad - \mathbb{P}_{\theta_0}(X^N = i^N | O_N) \log \mathbb{P}_\theta(X^N = i^N | O_N). \end{aligned}$$

Sommant sur $i^N \in E^N$, on obtient

$$\begin{aligned} \log \mathbb{P}_\theta(O_N) &= \frac{1}{\mathbb{P}_{\theta_0}(O_N)} \sum_{i^N} \mathbb{P}_{\theta_0}(X^N = i^N, O_N) \log \mathbb{P}_\theta(X^N = i^N, O_N) \\ &\quad - \sum_{i^N} \mathbb{P}_{\theta_0}(X^N = i^N | O_N) \log \mathbb{P}_\theta(X^N = i^N | O_N) \end{aligned}$$

d'où, en soustrayant la même identité avec $\theta = \theta_0$:

$$\begin{aligned} \log \mathbb{P}_\theta(O_N) - \log \mathbb{P}_{\theta_0}(O_N) &= \frac{1}{\mathbb{P}_{\theta_0}(O_N)} \left[\sum_{i^N} \mathbb{P}_{\theta_0}(X^N = i^N, O_N) \log \mathbb{P}_\theta(X^N = i^N, O_N) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i^N} \mathbb{P}_{\theta_0}(X^N = i^N, O_N) \log \mathbb{P}_{\theta_0}(X^N = i^N, O_N) \right] \\ &\quad + \sum_{i^N} \mathbb{P}_{\theta_0}(X^N = i^N | O_N) \log \frac{\mathbb{P}_{\theta_0}(X^N = i^N | O_N)}{\mathbb{P}_\theta(X^N = i^N | O_N)} \end{aligned}$$

Il résulte de la convexité de la fonction $-\log$ et de l'inégalité de Jensen que le dernier terme de l'identité ci-dessus est non-négatif. On pose :

$$Q(\theta_0, \theta) = \sum_{i^N \in E^N} \mathbb{P}_{\theta_0}(X^N = i^N, O_N) \log \mathbb{P}_\theta(X^N = i^N, O_N)$$

Il résulte du calcul ci-dessus que :

$$Q(\theta_0, \theta) \geq Q(\theta_0, \theta_0) \Rightarrow \mathbb{P}_\theta(O_N) \geq \mathbb{P}_{\theta_0}(O_N).$$

L'algorithme itératif de Baum-Welch consiste, à chaque itération, à calculer θ_{n+1} en fonction de θ_n suivant la formule suivante ;

$$\theta_{n+1} = \arg_\theta \max Q(\theta_n, \theta)$$

Pour garder n comme indice du temps, on va plutôt noter :

$$\bar{\theta} = \arg_{\theta} \max Q(\theta_0, \theta)$$

Cet algorithme s'interprète en fait comme un algorithme EM adapté à notre problème.

L'algorithme EM est bien connu en statistique. L'étape E (comme espérance) consiste ici en le calcul de la fonction $\theta \rightarrow Q(\theta_0, \theta)$, et l'étape M (comme maximisation) en la recherche du point $\bar{\theta}$ où la fonction atteint son maximum.

Notons que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\theta}(X^N = i^N, O_N) &= \mu_{i_0} Q_{i_0 j_0} \prod_{n=1}^N P_{i_{n-1} i_n} Q_{i_n j_n} \\ \log \mathbb{P}_{\theta}(X^N = i^N, O_N) &= \log \mu_{i_0} + \sum_{n=1}^N \log P_{i_{n-1} i_n} + \sum_{n=0}^N \log Q_{i_n j_n} \end{aligned}$$

Il est alors facile de voir, avec la notation $\theta = (\mu, P, Q)$, que

$$Q(\theta_0, \theta) = Q_0(\theta_0, \mu) + \sum_{i \in E} Q_1(\theta_0, P_{i \cdot}) + \sum_{i \in E} Q_2(\theta_0, Q_{i \cdot}),$$

avec

$$\begin{aligned} Q_0(\theta_0, \mu) &= \sum_{i \in E} \mathbb{P}_{\theta_0}(O_N, X_0 = i) \log \mu_i, \\ Q_1(\theta_0, P_{i \cdot}) &= \sum_{n=1}^N \sum_{j \in E} \mathbb{P}_{\theta_0}(O_N, X_{n-1} = i, X_n = j) \log P_{ij} \\ Q_2(\theta_0, Q_{i \cdot}) &= \sum_{n=0}^N \sum_{k \in F} \delta_{j_n k} \mathbb{P}_{\theta_0}(O_N, X_n = i) \log Q_{ik}. \end{aligned}$$

On voit que le problème de la recherche du maximum se décompose en 1+2 car E problèmes de recherche d'un maximum, tous de la forme :

$$\arg \max_{0 \leq y_j \leq 1; j \in E, \sum_j y_j = 1} \sum_{j \in E} w_j \log y_j,$$

où les $w_j \in [0, 1]$. On supprime les contraintes $\sum_j y_j = 1$ en exprimant un des y_j en fonction des autres, et l'annulation du gradient conduit à la solution :

$$y_j = \frac{w_j}{\sum_{j' \in E} w_{j'}}.$$

D'où les formules suivantes pour $\bar{\theta} = (\bar{\mu}, \bar{P}, \bar{Q})$:

$$\bar{\mu}_i = \frac{\mathbb{P}_{\theta_0}(O_N, X_0 = i)}{\mathbb{P}_{\theta_0}(O_N)} = \mathbb{P}_{\theta_0}(X_0 = i/O_N), i \in E.$$

$$\bar{P}_{ij} = \frac{\sum_{n=1}^N \mathbb{P}_{\theta_0}(O_N, X_{n-1} = i, X_n = j)}{\sum_{n=1}^N \mathbb{P}_{\theta_0}(O_N, X_{n-1} = i)}, i, j \in E.$$

$$\bar{Q}_{ik} = \frac{\sum_{n=0}^N \mathbb{P}_{\theta_0}(O_N, X_n = i) \delta_{j_n k}}{\sum_{n=0}^N \mathbb{P}_{\theta_0}(O_N, X_n = i)}, i \in E, k \in F.$$

où j_n désigne la valeur observée de Y_n , et δ le symbole de Kronecker ($\delta_{k'k} = 1$ ou 0, selon que $k' = k$ ou $k' \neq k$). Il reste à voir comment calculer les probabilités qui interviennent ci-dessus. Pour éviter des indices supplémentaires, on notera $\theta_0 = (\mu, P, Q)$. On a :

$$\bar{\mu}_i = \frac{\tilde{\beta}_i(0)\mu_i}{\sum_{i \in E} \tilde{\beta}_i(0)\mu_i}$$

Notons $A = \{Y_0 = j_0, \dots, Y_{n-1} = j_{n-1}, X_{n-1} = i\}$, $B = \{X_n = j, Y_n = j_n, \dots, Y_N = j_N\}$. On a

$$\mathbb{P}_{\theta_0}(A \cap B) = \mathbb{P}_{\theta_0}(B/A)\mathbb{P}_{\theta_0}(A),$$

$$\mathbb{P}_{\theta_0}(A) = \alpha_i(n-1),$$

et grâce à la propriété de Markov et à l'indépendance conditionnelle des Y_k sachant les X_k ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\theta_0}(B/A) &= \mathbb{P}_{\theta_0}(B/X_{n-1} = i) \\ &= \mathbb{P}_{\theta_0}(Y_n = j_n, \dots, Y_N = j_N/X_n = j)\mathbb{P}_{\theta_0}(X_n = j/X_{n-1} = i) \\ &= P_{ij}\tilde{\beta}_j(n) \end{aligned}$$

Notons, pour le calcul du dénominateur, que $\beta_i(n-1) = \sum_{j \in E} P_{ij}\tilde{\beta}_j(n)$. On déduit des calculs précédents la formule :

$$\bar{P}_{ij} = \frac{\sum_{n=1}^N \alpha_i(n-1) P_{ij} \tilde{\beta}_j(n)}{\sum_{n=1}^N \alpha_i(n-1) \beta_i(n-1)}$$

Enfin, un calcul analogue donne

$$\bar{Q}_{ik} = \frac{\sum_{n=1}^N \alpha_i(n) \beta_i(n) \delta_{jnk}}{\sum_{n=1}^N \alpha_i(n) \beta_i(n)}$$

Remarques sur l'implémentation Les algorithmes ci-dessus (algorithme de Viterbi et de Baum–Welch) ne sont pas implémentables tels quels sur machine. La raison en est que l'on manipule des produits d'un grand (si N est grand) nombre de termes plus petits que 1, ce qui donne des quantités microscopiques.

L'algorithme de Viterbi ne comportant que des produits et des maxima, la solution est de calculer les logarithmes des quantités qui interviennent (ce qui remplace les produits par des sommes). L'étape finale de recherche de la trajectoire optimale est inchangée, puisque la fonction log est croissante.

L'algorithme de Baum–Welch comporte des sommes, et dans ce cas la solution passe par l'utilisation de constantes de normalisation.

En pratique, on va remplacer les α par les $\hat{\alpha}$ définis par :

$$\hat{\alpha}_i(n) = \left(\sum_{i \in E} \alpha_i(n) \right)^{-1} \alpha_i(n)$$

si l'on note

$$C(n) = \left(\sum_{i \in E} \alpha_i(n) \right)^{-1}, \text{ alors}$$

$$C(n) = c_0 c_1 \times \cdots \times c_n, \text{ où}$$

$$c_n = \left(\sum_{i \in E} (\hat{\alpha}(n-1) P)_i Q_{ij_n} \right)^{-1}.$$

On définit de façon analogue,

$$\tilde{\hat{\beta}}_j(n) = c_n \times c_{n+1} \times \cdots \times c_N \tilde{\beta}_j(n), \hat{\beta}_j(n) = c_n c_{n+1} \times \cdots \times c_N \beta_j(n)$$

et on voit aisément comment réécrire \bar{P} et \bar{Q} en fonction des $\hat{\alpha}$ et des $\hat{\beta}$, $\hat{\hat{\beta}}$, de telle sorte que chaque terme de la somme apparaissant au numérateur, comme au dénominateur, soit multiplié par $C(N)$.

Notons que avec ces notations

$$\log \mathbb{P}_\theta(O_N) = -\log C(N) = -\sum_{n=0}^N \log c_n.$$

Exemple d'application en reconnaissance de la parole Supposons que l'on cherche à reconnaître automatiquement des mots isolés, à partir d'un enregistrement sonore digitalisé. On suppose que pour chaque mot m du vocabulaire V ($|V| < \infty$), on dispose d'un certain nombre d'enregistrements pour lesquels on sait quel mot a été prononcé, permettant de mettre en oeuvre une phase d'apprentissage, à l'issue de laquelle un paramètre θ_m est associé à chaque mot m de V , à l'aide de l'algorithme de Baum–Welch. Ensuite, pour reconnaître un mot à partir de son enregistrement sonore, on utilise un algorithme de maximum de vraisemblance :

$$m^* = \arg \max_{m \in V} \mathbb{P}_{\theta_m}(O_N).$$

Exemple d'application à l'analyse de séquences d'ADN. Une séquence d'ADN est une suite de lettres prises dans l'alphabet à 4 lettres $F = \{A, C, G, T\}$. La suite $\{Y_n; n = 1, 2, \dots, N\}$ sera la suite de lettres qui constitue la dite séquence. Un des buts de l'analyse de telles séquences d'ADN est de trouver quelles sont les portions de la séquence qui sont “codantes à l'endroit”, celles qui sont “codantes à l'envers”, et celles qui sont non codantes. On associe à la suite des observations une chaîne de Markov X , à valeurs dans un ensemble à trois éléments (correspondant aux trois types de plage possibles). Le problème que l'on cherche à résoudre ici est donc de retrouver la suite des valeurs prises par la chaîne X_n (problème 2). Pour cela, il faut d'abord bien sûr estimer le modèle (problème 3).

Notons qu'une autre modélisation est possible pour le même problème. Au lieu de supposer que

$$Y_n = f(X_n, \xi_n)$$

ou bien

$$Y_n = f(Y_{n-1}, X_n, \xi_n),$$

on se donne un modèle pour la suite des observations du type

$$Y_n = f(\theta, \xi_n)$$

ou bien

$$Y_n = f(Y_{n-1}, \theta, \xi_n),$$

où θ est un paramètre qui indique dans quelle plage on se trouve. Ceci signifie notamment que θ n'est pas constant, mais change de valeur de temps en temps (il prend en tout trois valeurs différentes). Dans cette formulation, il faut détecter les changements de valeur du paramètre θ (on dit détecter les ruptures de modèle), et identifier les différentes valeurs prises entre deux changements successifs.

4.3 Chaînes de Markov cachées : filtrage

On reprend la situation décrite dans la section précédente, à savoir que l'on se donne une chaîne de Markov $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ à valeurs dans E , qui n'est pas observée. On observe la suite $\{Y_n, n \in \mathbb{N}\}$ donnée par

$$Y_n = h(X_n, \xi_n),$$

où les ξ_n sont des v.a. i.i.d, globalement indépendantes de la chaîne $\{X_n\}$, à valeurs dans l'ensemble dénombrable G , et $f : E \times G \rightarrow F$ est connue.

Cette fois, on se place dans une situation dynamique, où l'on cherche à chaque instant n à "estimer" la vraie valeur de X_n , au vu des observations Y_1, Y_2, \dots, Y_n . On veut un algorithme "récuratif", tel que à l'instant $n + 1$, le calcul utilise le résultat du calcul de l'instant n , et la nouvelle observation Y_{n+1} , sans qu'il soit nécessaire de réutiliser les anciennes observations Y_1, Y_2, \dots, Y_n . Le but est de pouvoir faire tourner l'algorithme en "temps réel". Il s'avère que la bonne quantité à calculer à chaque instant n est la loi conditionnelle Π_n de X_n , sachant Y_1, Y_2, \dots, Y_n . On introduit également la loi conditionnelle $\Pi_{n|n-1}$ de X_n , sachant Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1} .

Pour tout $x \in E, y \in F$, on pose

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \mathbb{P}(h(x, \xi_n) = y) \\ &= \mathbb{P}(Y_n = y | X_n = x). \end{aligned}$$

L'évolution des lois conditionnelles $\{\Pi_n\}$ est alors donnée par le

Théorème 4.3.1. *Pour tout $n \geq 1$,*

$$\begin{aligned}\Pi_{n|n-1}(x) &= (\Pi_{n-1}P)_x \\ \Pi_n(x) &= \frac{g(x, Y_n)\Pi_{n|n-1}(x)}{\sum_{x' \in F} g(x', Y_n)\Pi_{n|n-1}(x')}\end{aligned}$$

PREUVE: On peut considérer que la chaîne (X_n) est générée par la formule de récurrence

$$X_n = f(X_{n-1}, \eta_n),$$

où les $\{\eta_n\}$ sont i.i.d., globalement indépendants des $\{\xi_n\}$. Il en résulte en particulier que

$$\mathbb{P}(X_n = x | Y_1, \dots, Y_{n-1}, X_{n-1}) = \mathbb{P}(X_n = x | X_{n-1}),$$

d'où :

$$\begin{aligned}\Pi_{n|n-1}(x) &= \mathbb{P}(X_n = x | Y_1, \dots, Y_{n-1}) \\ &= \mathbb{E} [\mathbb{P}(X_n = x | X_{n-1}) | Y_1, \dots, Y_{n-1}] \\ &= (\Pi_{n-1}P)_x.\end{aligned}$$

Pour établir la seconde relation, notons tout d'abord que si $\mathbb{P}^{Y_1, \dots, Y_{n-1}}$ désigne la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(\cdot | Y_1, \dots, Y_{n-1})$,

$$\mathbb{P}(X_n = x | Y_1, \dots, Y_{n-1}, Y_n) = \mathbb{P}^{Y_1, \dots, Y_{n-1}}(X_n = x | Y_n)$$

Mais pour toute probabilité \mathbf{Q} ,

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}(X_n = x | Y_n) &= H(x, Y_n), \text{ où} \\ H(x, y) &= \mathbf{Q}(X_n = x | Y_n = y) \\ &= \frac{\mathbf{Q}(Y_n = y | X_n = x)\mathbf{Q}(X_n = x)}{\sum_{x'} \mathbf{Q}(Y_n = y | X_n = x')\mathbf{Q}(X_n = x')}\end{aligned}$$

et la seconde relation s'en déduit, puisque

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^{Y_1, \dots, Y_{n-1}}(Y_n = y | X_n = x) &= \mathbb{P}(h(x, \xi_n) = y) \\ &= g(x, y).\end{aligned}$$

4.4 Le cas linéaire gaussien : le filtre de Kalman

Dans le cas où “tout est gaussien”, les calculs se simplifient, et on aboutit au célèbre “filtre de Kalman–Bucy”, qui est universellement utilisé.

On va maintenant supposer que les applications f et g sont linéaires, et les bruits η_n et ξ_n gaussiens. Bien sûr, cela nous fait sortir du cadre des espaces discrets. On va supposer maintenant que X_n prend ses valeurs dans \mathbb{R}^d , Y_n dans \mathbb{R}^k , et que

$$\begin{aligned} X_n &= AX_{n-1} + \eta_n, \quad n \geq 1 \\ Y_n &= HX_n + \xi_n, \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

avec $X_0, \eta_1, \xi_1, \eta_2, \xi_2, \dots, \eta_n, \xi_n, \dots$ indépendants, X_0 de loi $N(\bar{X}_0, P_0)$, les η_n de loi $N(0, Q)$ et les ξ_n de loi $N(0, R)$. On suppose que la matrice R est inversible.

On note encore Π_n la loi conditionnelle de X_n , sachant Y_1, \dots, Y_n .

Théorème 4.4.1. *La loi Π_n est la loi $N(\hat{X}_n, \Lambda_n)$, où $(\hat{X}_n, \Lambda_n)_{n \geq 0}$ est donnée par la formule de récurrence :*

$$\begin{aligned} \hat{X}_{n+1} &= A\hat{X}_n + \Sigma_n H^* (H\Sigma_n H^* + R)^{-1} (Y_{n+1} - HA\hat{X}_n) \\ \Sigma_n &= A\Lambda_n A^* + Q \\ \Lambda_{n+1} &= \Sigma_n - \Sigma_n H^* (H\Sigma_n H^* + R)^{-1} H\Sigma_n \\ \hat{X}_0 &= \bar{X}_0, \quad \Lambda_0 = P_0 \end{aligned}$$

On va montrer le théorème. Notons que l’on pourrait le déduire du résultat de la section précédente, préalablement adapté au cas de lois absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d (resp. \mathbb{R}^k), au lieu de loi sur l’espace discret E (resp. F).

Rappelons tout d’abord deux résultats concernant le conditionnement dans le cadre gaussien.

Proposition 4.4.2. *Soit $\begin{pmatrix} Y \\ Y \end{pmatrix}$ un vecteur aléatoire gaussien de dimension $d + k$, de loi $N \left[\begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \right]$. On suppose $\Sigma_{22} > 0$. Alors, la loi*

$\hat{\mu}_Y = N(\hat{X}, \hat{\Sigma})$, avec

$$\begin{aligned} (i) \quad \hat{X} &= \bar{X} + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(Y - \bar{Y}) \\ (ii) \quad \hat{\Sigma} &= \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} \end{aligned}$$

est une loi de probabilité conditionnelle de X , sachant Y , c'est-à-dire que pour tout $B \in \mathcal{B}_d$,

$$\mathbb{P}(X \in B/Y) = \hat{\mu}_Y(B).$$

En outre, $\hat{\Sigma} = \text{Cov}(X - \hat{X})$.

PREUVE:

Si \hat{X} désigne le vecteur aléatoire défini par (i) on pose

$$\tilde{X} = X - \hat{X}.$$

On montre facilement que $\begin{pmatrix} \tilde{X} \\ Y \end{pmatrix}$ est un vecteur aléatoire gaussien, et que

$$\text{Cov}(\tilde{X}, Y) = 0.$$

Donc \tilde{X} et Y sont indépendants, alors que \hat{X} est une fonction de Y . Soit maintenant $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^d)$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\varphi(X)|Y] &= \mathbb{E}[\varphi(\hat{X} + \tilde{X})|Y] \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\hat{X} + x) \mathbb{P}_{\tilde{X}}(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \hat{\mu}_Y(dx), \end{aligned}$$

avec $\hat{\mu}_Y = N(\hat{X}, \hat{\Sigma})$, si $\hat{\Sigma} = \text{Cov}(\tilde{X})$.

Enfin

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\tilde{X}) &= \text{Cov}(X - \hat{X}) \\ &= \text{Cov}(X - \bar{X} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(Y - \bar{Y})) \\ &= \Sigma_{11} - 2\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} \\ &= \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}. \end{aligned}$$

Proposition 4.4.3. Soit $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ un vecteur aléatoire gaussien de dimension $d + k + \ell$, tel que Y et Z soient indépendants. On note $\hat{\mu}_Y = N(\hat{X}, \hat{\Sigma})$ la loi conditionnelle de X sachant Y , et $\hat{\mu}_{Y,Z} = N(\hat{X}, \hat{\Sigma})$ la loi conditionnelle de X sachant (Y, Z) . On note à nouveau $\bar{X} = \mathbb{E}(X)$. Alors

$$\begin{aligned} (j) \quad \hat{X} &= \hat{X} + E(X - \bar{X} | Z) = \hat{X} + \hat{X} \\ (jj) \quad \hat{\Sigma} &= \hat{\Sigma} - Cov(\hat{X}). \end{aligned}$$

PREUVE: On suppose que $\mathbb{E}(Z) = 0$ (ce qui ne restreint pas la généralité).

Désignons par \mathcal{U} , \mathcal{Y} et \mathcal{Z} les sous-espaces vectoriels fermés de $L^2(\Omega, Z, \mathbb{P})$ engendrés respectivement par :

- les constantes et les coordonnées de Y , Z ;
- les constantes et les coordonnées de Y
- les coordonnées de Z .

Alors $\mathcal{U} = \mathcal{Y} \oplus \mathcal{Z}$, et $Y \perp \mathcal{Z}$.

Donc, pour tout $1 \leq i \leq d$, \hat{X}_i , la projection orthogonale de X_i sur \mathcal{U} , est la somme de \hat{X}_i , la projection orthogonale de X_i sur \mathcal{Y} , et de $\mathbb{E}(X_i - \bar{X}_i / Z)$, la projection orthogonale de X_i sur \mathcal{Z} . (j) est établi.

Donc

$$X - \hat{X} = X - \hat{X} + \mathbb{E}(X - \bar{X} / Z)$$

pour tout $1 \leq i, j \leq d$, $\mathbb{E}(X_i - \bar{X}_i / Z) \in \mathcal{Z} \subset \mathcal{U}$, donc est orthogonal dans $L^2(\Omega, Z, \mathbb{P})$ à $X_j - \hat{X}_j$.

Ceci entraîne que

$$Cov(X - \hat{X}) = Cov(X - \hat{X}) + Cov(\mathbb{E}(X - \bar{X} / Z)),$$

ce qui joint à la dernière affirmation de la Proposition 4.4.2, établit (jj). \square

On peut maintenant passer à la :

Preuve du Théorème 4.4.1

Puisque $(X_n, Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ est un vecteur aléatoire gaussien, il résulte de la Proposition 4.4.2 que $\Pi_n = N(\hat{X}_n, \Lambda_n)$, où \hat{X}_n est une fonction affine de Y_1, \dots, Y_n , et $\Lambda_n = Cov(X_n - \hat{X}_n)$. Il nous reste à calculer $(\hat{X}_{n+1}, \Lambda_{n+1})$ en fonction de (\hat{X}_n, Λ_n) . Puisque

$$X_{n+1} = AX_n + \eta_{n+1}$$

avec η_{n+1} centré et indépendant de (X_n, Y_1, \dots, Y_n) ,

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|Y_1, \dots, Y_n) = A\hat{X}_n,$$

et en outre

$$\text{Cov}(X_{n+1} - A\hat{X}_n) = A\Lambda_n A^* + Q.$$

Il nous reste à appliquer la Proposition 4.4.3, pour “rajouter le conditionnement par Y_{n+1} ”. Pour cela, il nous faut définir l’“innovation” :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= Y_{n+1} - \mathbb{E}(Y_{n+1}|Y_1, \dots, Y_n) \\ &= Y_{n+1} - HA\hat{X}_n \\ &= HA\tilde{X}_n + H\eta_{n+1} + \xi_{n+1}, \end{aligned}$$

où $\tilde{X}_n = X_n - \hat{X}_n$.

Notons que le v.a. $(Y_1, \dots, Y_n, I_{n+1})$ est un vecteur aléatoire gaussien, et que les coordonnées de I_{n+1} sont orthogonales dans $L^2(\Omega, \mathcal{Z}, \mathbb{P})$ à celles de Y_1, \dots, Y_n . Donc (Y_1, \dots, Y_n) et I_{n+1} sont indépendants, et de plus I_{n+1} est centré. Comme en outre $\sigma(Y_1, \dots, Y_n, Y_{n+1}) = \sigma(Y_1, \dots, Y_n, I_{n+1})$, on va pouvoir utiliser la Proposition 4.4.3, qui nous dit que

$$\begin{aligned} \hat{X}_{n+1} &= A\hat{X}_n + \mathbb{E}(X_{n+1} - \mathbb{E}X_{n+1}|I_{n+1}) \\ \text{et } \Lambda_{n+1} &= A\Lambda_n A^* + Q - \text{Cov}(\hat{X}_{n+1} - A\hat{X}_n) \end{aligned}$$

L’espérance conditionnelle ci-dessus se calcule à l’aide de la Proposition 4.4.2. Or

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{n+1}I_{n+1}^*) &= A\mathbb{E}\left[X_n(X_n - \hat{X}_n)^*\right]A^*H^* + QH^* \\ &= A\Lambda_n A^*H^* + QH^* \\ \mathbb{E}I_{n+1}I_{n+1}^* &= HA\Lambda_n A^*H^* + HQH^* + R \end{aligned}$$

Donc

$$\hat{X}_{n+1} = A\hat{X}_n + (A\Lambda_n A^* + Q)H^* [H(A\Lambda_n A^* + Q)H^* + R]^{-1} (Y_{n+1} - HA\hat{X}_n)$$

et

$$\Lambda_{n+1} = A\Lambda_n A^* + Q - (A\Lambda_n A^* + Q)H^* [H(A\Lambda_n A^* + Q)H^* + R]^{-1} H(A\Lambda_n A^* + Q),$$

ce qui démontre le théorème.

Chapitre 5

Contrôle optimal des Chaînes de Markov

5.1 Contrôle optimal déterministe

On considère le système dynamique suivant contrôlé en temps discret :

$$X_n = f(X_{n-1}, u_n), n \geq 1, X_0 \text{ donné},$$

où $X_n \in E \subset \mathbb{R}^d$, $u_n \in U \subset \mathbb{R}^k$, $f : E \times U \rightarrow E$. La suite $\{u_n, n = 1, 2, \dots\}$ constitue le “contrôle” que l’on peut choisir à chaque instant n dans l’ensemble des contrôles admissibles U , le but étant de minimiser un coût de la forme :

$$J(u) = \sum_{n=1}^N L(X_n, u_n).$$

C’est-à-dire que l’on cherche $u^* = (u_1^*, \dots, u_N^*)$ tel que

$$J(u^*) = \min_{u \in U^N} J(u).$$

En admettant qu’un tel contrôle optimal existe (on peut donner des conditions pour que cela soit le cas; l’existence est triviale si U est un ensemble fini), on va maintenant donner un algorithme permettant de le calculer. Pour cela on introduit les quantités suivantes :

$$\Phi(n, x) = \min_{u_k \in U, n \leq k \leq N} \sum_{k=n}^N L(X_k, u_k),$$

où $X_{n-1} = x$. On a alors

Equation de la programmation dynamique (R. Bellman).

$$\Phi(n, x) = \min_{u \in U} \{L(f(x, u), u) + \Phi(n+1, f(x, u))\}$$

Cette équation provient du fait suivant :

si $u^{*,n} = (u_n^*, u_{n+1}^*, \dots, u_N^*)$ est optimal pour le problème de contrôle entre n et N , avec la condition initiale $X_{n-1} = x$, alors $u^{*,n+1} \stackrel{\text{def}}{=} (u_{n+1}^*, \dots, u_N^*)$ est optimal pour le problème de contrôle entre $n+1$ et N , avec la condition initiale $X_n = f(x, u_n^*)$.

Algorithme de la programmation dynamique

On suppose maintenant que E est un ensemble fini (si ce n'est pas le cas, on est obligé de "discrétiser" l'espace d'états, pour se ramener à un ensemble fini).

L'algorithme progresse de façon rétrograde à partir de l'instant final N , pour le calcul des $\Phi(n, x)$, pour $n = N, N-1, \dots, 1$, et tous les $x \in E$.

- **Instant N** : pour chaque $x \in E$, on calcule

$$\Phi(N, x) = \min_{u \in U} L(f(x, u), u),$$

et on note $u^*(N, x)$ l'un des arguments qui réalise ce minimum.

- **Passage de $n+1$ à n** : pour chaque $x \in E$, on calcule :

$$\Phi(n, x) = \min_{u \in U} \{L(f(x, u), u) + \Phi(n+1, f(x, u))\},$$

et on note $u^*(n, x)$ l'un des arguments qui réalise ce minimum.

A la fin des calculs, on dispose de toutes les quantités $\{\Phi(n, x); 1 \leq n \leq N, x \in E\}$, et en particulier de

$$\Phi(1, x) = \min_{u_1, \dots, u_N \in U} J(u), \text{ si } X_0 = x,$$

pour tout $x \in E$.

A condition d'avoir gardé en mémoire toutes les valeurs $\{u^*(n, x); 1 \leq n \leq N, x \in E\}$, on peut maintenant construire la trajectoire optimale (et surtout déterminer un contrôle optimal) en repartant dans le sens "usuel"

du temps :

$$X_1^* = f(X_0, u^*(1, X_0)),$$

$$X_n^* = f(X_{n-1}^*, u^*(n, X_{n-1}^*)),$$

$$X_N^* = f(X_{N-1}^*, u^*(N, X_{N-1}^*)).$$

5.2 Contrôle des chaînes de Markov

On suppose maintenant que $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ est une chaîne de Markov contrôlée à valeurs dans E dénombrable, c'est-à-dire que son évolution est régie par :

$$X_n = f(X_{n-1}, Y_n, u_n), \quad n \geq 1, \quad X_0 \in E \text{ donnée,}$$

où $\{Y_n, n \geq 1\}$ est une suite de v.a. indépendantes et de même loi à valeurs dans F , $\{u_n, n \geq 1\}$ est une suite de v.a. à valeurs dans U , tel que pour tout $n \geq 1$, u_n est $\sigma(X_{n-1})$ mesurable et $f : E \times F \times U \rightarrow E$. On vérifie aisément que $\{X_n, n \geq 0\}$ définie ainsi est une chaîne de Markov. On cherche à minimiser le coût

$$J(u) = \mathbb{E} \sum_{n=1}^N L(X_n, u_n).$$

On va voir qu'un contrôle optimal $u^* = (u_1^*, \dots, u_N^*)$ est tel que pour tout n , u_n^* ne dépend que de X_{n-1} , ce qui fait que la suite $\{X_n^*, 0 \leq n \leq N\}$ correspondante est une chaîne de Markov.

On introduit comme à la section précédente les quantités ($1 \leq n \leq N, x \in E$) :

$$\Phi(n, x) = \min_{u_k \in \mathcal{U}_k, n \leq k \leq N} \mathbb{E}_{n,x} \sum_{k=n}^N L(X_k, u_k),$$

où \mathcal{U}_k désigne l'ensemble des v.a. $\sigma(X_{k-1})$ mesurables à valeurs dans U , et $\mathbb{E}_{n,x}$ désigne l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(\cdot | X_{n-1} = x)$. On a alors **l'équation de la programmation dynamique**

$$\Phi(n, x) = \min_{u \in U} \mathbb{E}\{L(f(x, Y_n, u), u) + \Phi(n+1, f(x, Y_n, u))\}$$

et on note $u^*(n, x)$ une valeur de $u \in U$ qui réalise ce minimum.

L'algorithme de la programmation dynamique consiste alors, comme dans le cas déterministe, à calculer dans le sens rétrograde du temps, les $\Phi(n, x)$ et $u^*(n, x)$, en commençant par $n = N$, et en finissant avec $n = 1$. On peut alors ensuite mettre en oeuvre le contrôle optimal en utilisant à l'instant n le contrôle $u^*(n, X_{n-1})$, en commençant à l'instant $n = 1$.

Remarque 5.2.1. *On pourrait plus généralement chercher un contrôle optimal dans la classe des contrôles $u = (u_1, \dots, u_N)$ tels que pour tout n , u_n dépend de $(X_0, X_1, \dots, X_{n-1})$. On montrerait qu'il existe un contrôle optimal "markovien", i.e. tel que chaque u_n ne dépend que de X_{n-1} , si bien que la suite $\{X_n\}$ est bien une chaîne de Markov.*

5.3 Contrôle optimal linéaire quadratique

Dans cette section, on suppose que $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une suite gaussienne à valeurs dans \mathbb{R}^d , qui satisfait la formule de récurrence linéaire :

$$X_n = AX_{n-1} + Bu_n + f_n + \eta_n, \quad n \geq 1,$$

avec $X_0, \eta_1, \eta_2, \dots$ une suite indépendante de vecteurs aléatoires gaussiens, $X_0 \simeq N(\bar{X}_0, \lambda_0)$, et $\eta_n \simeq N(0, Q)$, et les f_n sont des vecteurs donnés dans \mathbb{R}^d . On suppose que les contrôles u_n prennent leurs valeurs dans $U = \mathbb{R}^k$, que A est une matrice $d \times d$ et B une matrice $d \times k$. On cherche à minimiser la fonctionnelle

$$J(u) = \mathbb{E} \sum_{n=1}^N [\langle FX_n, X_n \rangle + \langle Ru_n, u_n \rangle],$$

où F (resp. R) est une matrice symétrique $d \times d$ (resp. $k \times k$), et R est définie positive.

L'intérêt du problème de contrôle linéaire quadratique est que l'on va donner une formule explicite pour le contrôle optimal.

Remarque 5.3.1. *On pourrait utiliser une fonctionnelle de coût plus générale, de la forme*

$$J(u) = \sum_{n=1}^N [\langle F(X_n - x_n), X_n - x_n \rangle + \langle Ru_n, u_n \rangle],$$

où (x_1, \dots, x_N) est la "cible" dont on cherche à se rapprocher, le coût pondérant l'éloignement entre X_n et x_n , et la norme du contrôle que l'on applique. Cependant un problème de ce type peut se mettre sous la forme de notre problème ci-dessus, en posant $\tilde{X}_n = X_n - x_n$, grâce à l'introduction des vecteurs f_n dans la formule de récurrence.

□

Avec les notations de la section 5.2. on a le

Théorème 5.3.2. *Pour tout $1 \leq n \leq N$, $x \in \mathbb{R}^d$,*

$$\Phi(n, x) = \langle G_n x, x \rangle + 2\langle h_n, x \rangle + c_n,$$

et $u^*(n, x) = -(R + B^*(F + G_{n+1})B)^{-1}B^*[(F + G_{n+1})(Ax + f_n) + h_{n+1}]$
 où la suite $\{(G_n, h_n, c_n); 1 \leq n \leq N\}$ est définie par la récurrence rétrograde :
 $G_n = A^*(I - (F + G_{n+1})B(R + B^*(F + G_{n+1})B)^{-1}B^*)(F + G_{n+1})A$,
 $h_n = A^*(I - (F + G_{n+1})B(R + B^*(F + G_{n+1})B)^{-1}B^*)[(F + G_{n+1})f_n + h_{n+1}]$
 $c_n = c_{n+1} + Tr[(F + G_{n+1})Q] + \langle (F + G_{n+1})f + 2h_{n+1}, f_n \rangle -$
 $\langle B(R + B^*(F + G_{n+1})B)^{-1}B^*[(F + G_{n+1})f_n + h_{n+1}], (F + G_{n+1})f_n + h_{n+1} \rangle$

$$\text{et } G_{N+1} = 0, \quad h_{N+1} = 0, \quad c_{N+1} = 0.$$

La preuve du théorème repose sur le résultat élémentaire :

Lemme 5.3.3. *Soit P une matrice $k \times k$ autoadjointe définie positive, et $f \in \mathbb{R}^k$. Alors*

$$\min_{u \in \mathbb{R}^k} [\langle Pu, u \rangle + 2\langle u, f \rangle] = -\langle P^{-1}f, f \rangle,$$

et le minimum est atteint au point $u^* = -Pf$.

Preuve du théorème : admettons la formule de l'énoncé pour tout $\Phi(n+1, x)$. Alors

$$\begin{aligned} \Phi(n, x) &= \min_{u \in \mathbb{R}^k} \mathbb{E}_{n,x} [\langle FX_n, X_n \rangle + \langle Ru, u \rangle + \langle G_{n+1}X_n, X_n \rangle \\ &\quad + 2\langle h_{n+1}, X_n \rangle] + c_{n+1} \\ &= \langle (F + G_{n+1})(Ax + f_n), Ax + f_n \rangle + 2\langle h_{n+1}, Ax + f_n \rangle + c_{n+1} \\ &\quad + Tr[(F + G_{n+1})Q] \\ &\quad + \min_u \{ \langle (R + B^*(F + G_{n+1})B)u, u \rangle + 2\langle B^*[(F + G_{n+1})(Ax + f_n) + h_{n+1}], u \rangle \} \end{aligned}$$

La formule pour $u^*(n, x)$ découle alors du lemme 5.3.3, et en outre

$$\begin{aligned} \Phi(n, x) = & \langle A^*(I - (F + G_{n+1})B(R + B^*(F + G_{n+1})B)^{-1}B^*)(F + G_{n+1})Ax, x \rangle \\ & + 2\langle A^*(I - (F + G_{n+1})B(R + B^*(F + G_{n+1})B)^{-1}B^*)((F + G_{n+1})f_n + h_{n+1}), x \rangle \\ & + c_{n+1} + \text{Tr}[(F + G_{n+1})Q] + \langle (F + G_{n+1})f_n + 2h_{n+1}, f_n \rangle \\ & - \langle B(R + B^*(F + G_{n+1})B)^{-1}B^*((F + G_{n+1})f_n + h_{n+1}), (F + G_{n+1})f_n + h_{n+1} \rangle, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit les formules de récurrence. Comme le calcul ci-dessus est correct avec $n = N$, à condition de poser $G_{N+1} = 0$, $h_{N+1} = 0$, $c_{N+1} = 0$, le résultat est établi par récurrence.

Remarque 5.3.4. *Les matrices de covariance Λ_0 et Q n'interviennent que dans les constantes c_n ; en particulier le contrôle optimal n'en dépend pas. Il est le même dans le cas $\Lambda_0 = Q = 0$, qui est le cas déterministe.*

5.4 Contrôle optimal linéaire quadratique avec observation partielle

On considère maintenant le problème suivant :

$$\begin{cases} X_n = AX_{n-1} + Bu_n + f_n + \eta_n, & n \geq 1, \\ Y_n = AX_n + \xi_n \end{cases}$$

où à nouveau $X_0, \eta_1, \xi_1, \eta_2, \xi_2, \dots$ est une suite de v.a. gaussiens indépendants, X_0 et les η_n de dimension d , les ξ_n de dimension k de matrice de covariance R inversible, u_n à valeurs dans \mathbb{R}^ℓ , choisi parmi les suites adaptées à la suite $\{Y_n\}$, i.e. tel que pour tout n , u_n soit une fonction de Y_1, \dots, Y_{n-1} , et on cherche à minimiser le critère :

$$J(u) = \mathbb{E} \sum_{n=1}^N [\langle FX_n, X_n \rangle + \langle Qu_n, u_n \rangle].$$

On aura besoin du résultat technique suivant :

On définit les suites

$$\begin{aligned} X_n^0 &= AX_{n-1}^0 + f_n + \eta_n, & n \geq 1, & X_0^0 = X_0, \\ Y_n^0 &= HX_n^0 + \xi_n, & n \geq 1, \end{aligned}$$

et on pose $\mathcal{Y}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$, $\mathcal{Y}_n^0 = \sigma(Y_1^0, \dots, Y_n^0)$, $n \geq 1$, $\mathcal{Y}_0 = \mathcal{Y}_0^0 = \{\emptyset, \Omega\}$. On a alors le

5.4. CONTRÔLE OPTIMAL LINÉAIRE QUADRATIQUE AVEC OBSERVATION PARTIELLE 11

Lemme 5.4.1. *Pour tout n , $\mathcal{Y}_n = \mathcal{Y}_n^0$.*

PREUVE: Posons

$$\begin{aligned} X_n^u &= AX_{n-1}^u + Bu_n, \quad n \geq 1, X_0^u = 0, \\ Y_n^u &= HX_n^u, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Puisque (u_1, \dots, u_n) est \mathcal{Y}_{n-1} mesurable, il en est de même de (Y_1^u, \dots, Y_n^u) . Mais

$$Y_n = Y_n^0 + Y_n^u, \quad n \geq 1.$$

Donc (Y_1^0, \dots, Y_n^0) est \mathcal{Y}_n mesurable, soit $\mathcal{Y}_n^0 \subset \mathcal{Y}_n$. Réciproquement, puisque u_1 est déterministe (car \mathcal{Y}_0 mesurable), Y_1^u est connu, donc $Y_1 = Y_1^0 + Y_1^u$ est une fonction de Y_1^0 , soit $\mathcal{Y}_1 \subset \mathcal{Y}_1^0$. Supposons que $\mathcal{Y}_n \subset \mathcal{Y}_n^0$. Alors (u_1, \dots, u_{n+1}) est \mathcal{Y}_n^0 mesurable, et donc aussi Y_{n+1}^u , d'où

$$Y_{n+1} = Y_{n+1}^0 + Y_{n+1}^u$$

est \mathcal{Y}_{n+1}^0 mesurable. \square

Une conséquence du lemme 5.4.1 est que la suite de tribus $(\mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_N)$ ne dépend pas du choix du contrôle choisi. Maintenant, il est clair que

$$J(u) = \mathbb{E} \sum_{n=1}^N [\mathbb{E}^{\mathcal{Y}_n} (\langle FX_n, X_n \rangle) + \langle Ru_n, u_n \rangle]$$

Or

$$X_n = \hat{X}_n + \tilde{X}_n,$$

avec $\hat{X}_n = \mathbb{E}(X_n | \mathcal{Y}_n)$, et \tilde{X}_n est indépendant de \mathcal{Y}_n . Donc si l'on note $\Lambda_n = \text{cov}(\tilde{X}_n)$,

$$J(u) = \mathbb{E} \sum_{n=1}^N [\langle F\hat{X}_n, \hat{X}_n \rangle + \langle Ru_n, u_n \rangle + \text{Tr} FQ_n].$$

On est donc ramené au problème suivant (cf. la section 4.2) :

$$\begin{aligned} \hat{X}_n &= (I - \Sigma_{n-1} H^* (H \Sigma_{n-1} H^* + R)^{-1} H) A \hat{X}_{n-1} + Bu_n + f_n \\ &\quad + \Sigma_{n-1} H^* (H \Sigma_{n-1} H^* + R)^{-1} Y_n \\ \hat{X}_0 &= \bar{X}_0 \end{aligned}$$

$$\min \hat{J}(u) = \mathbb{E} \sum_{n=1}^N [\langle F\hat{X}_n, \hat{X}_n \rangle + \langle Ru_n, u_n \rangle],$$

qui est un problème de contrôle optimal "déterministe" (puisque les Y_n sont observés, donc connus), dont la solution est donnée par le théorème 5.3.2

Chapitre 6

Le processus de Poisson

Dans ce chapitre et le suivant, on va étudier des processus de Markov définis sur \mathbb{R}_+ , à valeurs dans un ensemble fini ou dénombrable E , qui sont constants entre leurs sauts qui se produisent à des instants aléatoires : on les appelle “processus markoviens de saut”.

Dans ce chapitre, nous allons introduire le “prototype” des processus markoviens de saut, à savoir le processus de Poisson.

Ce processus modélise des répartitions aléatoires de point sur \mathbb{R}_+ , qui peuvent correspondre à des instants de collision de particules, mais aussi à des instants d’arrivée de clients dans une file d’attente, d’appels à un central téléphonique

6.1 Processus ponctuels et f.a. de comptage

Un **processus ponctuel** sur \mathbb{R}_+ se décrit par la donnée d’une suite croissante de points aléatoires

$$0 < T_1 < T_2 < \dots < T_n < \dots \text{ dans } \mathbb{R}_+$$

qui sont des v.a. définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Outre les inégalités ci-dessus, on suppose que $T_n \uparrow \infty, n \rightarrow \infty$.

On posera

$$\begin{aligned} S_1 &= T_1 \\ S_2 &= T_2 - T_1 \\ \dots &\dots\dots \\ S_n &= T_n - T_{n-1} \\ \dots &\dots\dots \end{aligned}$$

les v.a. T_n sont les instants où se produisent un événement, les S_n sont les délais ou les temps d'attente entre deux événements successifs.

On définit la **f.a. de comptage** $\{N_t, t \geq 0\}$ du **processus ponctuel** $\{T_n, n \in \mathbb{N}\}$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} N_t &= \sup\{n; T_n \leq t\} \\ &= \sum_{j \geq 1} \mathbf{1}_{\{T_j \leq t\}} \end{aligned}$$

N_t est le nombre d'événement qui se sont produits avant l'instant t .

Notons que $N_0 = 0$, puisque $T_1 > 0$ et pour tout $t > 0$, $N_t < \infty$ puisque $T_n \uparrow \infty, n \rightarrow \infty$.

Pour $0 \leq s < t$, $N_t - N_s$ est le nombre d'événements qui se sont produits dans l'intervalle de temps $]s, t]$.

Dessignons une trajectoire type du processus $\{N_t, t \geq 0\}$:

Précisons que les trajectoires de $\{N_t\}$ sont *continues à droite*.

Notons que la donnée de $\{N_t, t \geq 0\}$ est équivalente à celle de la suite $\{T_n, n \in \mathbb{N}\}$, et que l'on a les relations :

$$\{N_t \geq n\} = \{T_n \leq t\}$$

$$\begin{aligned}\{N_t = n\} &= \{T_n \leq t < T_{n+1}\} \\ \{N_s < n \leq N_t\} &= \{s < T_n \leq t\}\end{aligned}$$

6.2 Le processus de Poisson

Définition 6.2.1. On dit que le processus ponctuel $\{T_n, n \in \mathbb{N}\}$ ou sa f.a. de comptage $\{N_t, t \geq 0\}$ est un **processus de Poisson** si $\{N_t, t \geq 0\}$ est une f.a. à accroissements indépendants et stationnaires i.e. si

- a) quels que soient $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ dans \mathbb{R}_+ , les accroissements $\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}}; 1 \leq j \leq n\}$ sont des v.a. indépendantes;
- b) pour $0 \leq s < t$, la loi de $N_t - N_s$ ne dépend que de s et t que par la différence $t - s$.

La propriété b) est appelée la “stationnarité des accroissements” de $\{N_t\}$. Le nom “processus de Poisson” est justifié par la :

Proposition 6.2.2. Soit $\{N_t, t \geq 0\}$ la f.a. de comptage d'un **processus de Poisson**. Il existe $\lambda > 0$ tel que pour tous $0 \leq s < t$, la loi de $N_t - N_s$ est la loi de Poisson de paramètre $\lambda(t - s)$, i.e.

$$\mathbb{P}(N_t - N_s = k) = e^{-\lambda(t-s)}[\lambda(t-s)]^k/k!, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Remarque 6.2.3. Ce paramètre λ est appelé **l'intensité** du processus de Poisson $\{N_t, t \geq 0\}$. Il est égal au nombre moyen d'événements qui se produisent pendant un intervalle de temps de longueur unité, i.e.

$$\mathbb{E}[N_{t+1} - N_t] = \lambda.$$

Preuve de la Proposition 6.2.2 Pour tous $0 \leq s < t$, considérons la fonction génératrice de $N_t - N_s$, qui est l'application $u \rightarrow f_{t-s}(u)$ de $[0, 1]$ dans lui-même qui ne dépend que de $t - s$ et est définie par :

$$\begin{aligned}f_{t-s}(u) &= \mathbb{E}[u^{N_t - N_s}] \\ &= \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(N_t - N_s = k)u^k.\end{aligned}$$

Par la propriété a) de la définition,

$$f_t(u) = f_s(u)f_{t-s}(u), \quad 0 \leq s < t, \quad u \in [0, 1].$$

Il résulte de cette identité que

$$f_t(u) = [f_1(u)]^t$$

d'abord pour les t rationnels, puis pour tout t dans \mathbb{R}_+ car $t \rightarrow f_t(u)$ est décroissante.

Comme en outre

$$\begin{aligned} f_t(u) &\geq P(N_t = 0) \\ &= P(T_1 > t) \\ &\nearrow 1, \text{ quand } t \downarrow 0, \end{aligned}$$

$f_1(u) \neq 0$, et donc il existe $\lambda(u)$ dans \mathbb{R}_+ tel que

$$f_t(u) = e^{-t\lambda(u)}.$$

Puisque $u \rightarrow \exp(-\theta(1-u))$ est la fonction génératrice de la loi de Poisson de paramètre θ , il reste à montrer que

$$\lambda(u) = \lambda(0)(1-u).$$

Or clairement

$$\begin{aligned} \lambda(u) &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} (1 - f_t(u)) \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{t} \mathbb{P}(N_t = k) (1 - u^k) \end{aligned}$$

Mais puisque $0 \leq u \leq 1$,

$$0 \leq \sum_{k \geq 2} \frac{1}{t} \mathbb{P}(N_t = k) (1 - u^k) \leq \frac{1}{t} \mathbb{P}(N_t \geq 2)$$

et le résultat découle de la formule

$$\lambda(u) = \lim_{t \downarrow 0} \left[\frac{1}{t} \mathbb{P}(N_t = 1) \right] (1 - u),$$

à condition que l'on ait

$$\frac{1}{t} \mathbb{P}(N_t \geq 2) \rightarrow 0, \text{ quand } t \downarrow 0.$$

Or

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{N_{nt} = 0, N_{(n+1)t} \geq 2\} \subset \{T_2 < T_1 + t\}$$

Comme $\mathbb{P}(N_t = 0) = f_t(0) = \exp(-\lambda(0)t)$, en utilisant en outre la propriété a) de la définition, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{N}} \exp(-\lambda(0)nt) \mathbb{P}(N_t \geq 2) &= [1 - \exp(-\lambda(0)t)]^{-1} \mathbb{P}(N_t \geq 2) \\ &\leq \mathbb{P}(T_2 < T_1 + t) \end{aligned}$$

Mais, quand $t \downarrow 0$,

$$P(T_2 < T_1 + t) \rightarrow P(T_2 \leq T_1) = 0$$

et pour tout t suffisamment petit, $(\lambda(0)t)^{-1} < (1 - \exp(-\lambda(0)t))^{-1} < 2(\lambda(0)t)^{-1}$.

Remarque 6.2.4. *Il résulte de la dernière partie de la preuve ci-dessus que*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_{t+h} - N_t = 0) &= 1 - \lambda h + o(h) \\ \mathbb{P}(N_{t+h} - N_t = 1) &= \lambda h + o(h) \\ \mathbb{P}(N_{t+h} - N_t \geq 2) &= o(h) \end{aligned}$$

Donc à des probabilités petites devant h près, $N(t+h) - N(t)$ est une v.a. de Bernoulli prenant la valeur 0 avec la probabilité $1 - \lambda h$ et la valeur 1 avec probabilité λh . Cette propriété, jointe à l'indépendance des accroissements et à la formule

$$N_{t+s} - N_t = \sum_{j=1}^n [N_{t+jh} - N_{t+(j-1)h}], \text{ avec } h = \frac{s}{n},$$

entraîne que $N_{t+s} - N_t$ suit approximativement une loi binomiale de paramètres $(n, \lambda s/n)$. Or, quand $n \rightarrow \infty$, cette loi converge vers la loi de Poisson de paramètre λs .

Notons que pour tout n , $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, la loi du vecteur aléatoire $(N_{t_1}, N_{t_2}, \dots, N_{t_n})$ est entièrement déterminée par la Proposition 6.2.2 et la condition a) de la définition 6.2.1.

Corollaire 6.2.5. *La loi de l'instant T_1 du premier événement est la loi exponentielle de paramètre λ (i.e. la loi sur \mathbb{R}_+ de densité $\lambda e^{-\lambda t}$). Il en est de même pour la loi du temps d'attente après s du premier événement après s , $T_{N_s+1} - s$, pour tout $s > 0$.*

PREUVE: Il suffit de remarquer que pour tout $t > 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_1 > t) &= \mathbb{P}(N_t = 0) \\ &= e^{-\lambda t}\end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_{N_s+1} - s > t) &= \mathbb{P}(N_{s+t} - N_s = 0) \\ &= P(N_t = 0).\end{aligned}$$

6.3 Propriété de Markov

Soit $\{N_t, t \geq 0\}$ un processus de Poisson d'intensité λ . Pour tout $s, t > 0$, posons

$$N_t^s = N_{s+t} - N_s.$$

Il résulte immédiatement de la Définition 6.2.1 que $\{N_t^s, t \geq 0\}$ est un processus de Poisson d'intensité λ , indépendant de $\{N_t, 0 \leq t \leq s\}$. Remarquons que la donnée de $\{N_t, 0 \leq t \leq s\}$ est équivalente à celle de $(N_s, T_1, T_2, \dots, T_{N_s})$. L'indépendance dont il est question ci-dessus est équivalente à celle de des vecteurs aléatoires $(N_s, T_1, T_2, \dots, T_{N_s})$ et $(T_{N_s+1}, T_{N_s+2}, \dots, T_{N_s+p})$, pour tout entier p .

Puisque les accroissements futurs après s $\{N_{s+t} - N_s, t \geq 0\}$ sont indépendants du passé $\{N_t, 0 \leq t \leq s\}$, il est clair que le futur après s $\{N_{s+t}, t \geq 0\}$ ne dépend du passé $\{N_t, 0 \leq t \leq s\}$ que par l'intermédiaire du présent N_s ; ou encore, le futur et le passé sont conditionnellement indépendants, sachant le présent. C'est la propriété de Markov.

Nous reviendrons sur cette propriété au chapitre suivant.

Nous allons maintenant généraliser le résultat ci-dessus au cas où s est un certain type de temps aléatoire. Pour cela, il nous faut tout d'abord rappeler une notation, et poser une définition.

Rappelons tout d'abord qu'une tribu de parties d'un ensemble \mathcal{E} est une classe de parties de \mathcal{E} stable par passage au complémentaire, réunion et intersection dénombrable. On peut toujours parler de "la plus petite tribu

contenant une certaine classe $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\mathcal{E})$, car c'est l'intersection de toutes les tribus contenant \mathcal{C} (il existe au moins une telle tribu, à savoir $\mathcal{P}(\mathcal{E})$, et une intersection quelconque de tribus est une tribu, comme cela se vérifie aisément). Par exemple, la tribu borélienne de \mathbb{R}^d , notée \mathcal{B}_d , est la plus petite tribu de parties de \mathbb{R}^d contenant tous les ouverts.

Dans le cas d'une variable aléatoire à valeurs dans un espace dénombrable E , $\sigma(X) = \{X^{-1}(F); F \subset E\}$. Etant donné un vecteur aléatoire X de dimension d (i.e. une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^d), on note $\sigma(X) = \{X^{-1}(B); B \in \mathcal{B}_d\}$ la plus petite sous tribu de parties de Ω qui rend X mesurable. C'est l'ensemble des événements dont on sait s'ils sont ou non réalisés au vu de la valeur prise par X . Etant donné $\{X_i, i \in I\}$ une collection quelconque de vecteurs aléatoires (de dimensions quelconques!), on note $\sigma\{X_i; i \in I\}$ la plus petite tribu contenant toutes les $\sigma(X_i), i \in I$.

Il sera commode d'utiliser dans la suite la notation suivante : pour $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_t^N &= \sigma\{N_s; 0 \leq s \leq t\} \\ &= \sigma\{N_t, T_1, T_2, \dots, T_{N_t}\}.\end{aligned}$$

Définition 6.3.1. *Etant donné un processus de Poisson $\{N_t, t \geq 0\}$, on appelle **temps d'arrêt** (de $\{N_t\}$) une v.a. S à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ qui possède la propriété que pour tout t dans \mathbb{R}_+ ,*

$$\{S \leq t\} \in \mathcal{F}_t^N.$$

Pour tout s dans \mathbb{R}_+ , $S \equiv s$ est un temps d'arrêt. Pour tout n , T_n est un temps d'arrêt. T_{N_s+1} est également un temps d'arrêt. Par contre, T_{N_s} n'est pas un temps d'arrêt, car si $t < s$,

$$\{T_{N_s} \leq t\} = \{N_s - N_t = 0\} \notin \mathcal{F}_t^N, \quad 0 \leq t < s.$$

A tout temps d'arrêt S de $\{N_t\}$, on associe la tribu des événements "déterminés par la trajectoire $\{N_{t \wedge S}, t \geq 0\}$ arrêtée à S " :

$$\mathcal{F}_S^N \stackrel{\text{def}}{=} \{A \in \mathcal{F}_\infty^N; A \cap \{S \leq t\} \in \mathcal{F}_t^N, \forall t \geq 0\}.$$

On a la :

Proposition 6.3.2. *Soit $\{N_t, t \geq 0\}$ un processus de Poisson d'intensité λ , et S un temps d'arrêt de $\{N_t\}$. Sur l'événement $\{S < \infty\}$ on pose pour $t \geq 0$*

$$N_t^S = N_{S+t} - N_S.$$

Conditionnellement en $\{S < \infty\}$, $\{N_t^S, t \geq 0\}$ est un processus de Poisson d'intensité λ , indépendant de \mathcal{F}_S^N .

PREUVE: On sait déjà que le résultat est vrai si S est constant. Supposons maintenant que S prend ses valeurs dans une suite croissante $(s_j, j \geq 1)$ de réels positifs. Notons que comme S est un temps d'arrêt,

$$\{S = s_j\} = \{S \leq s_j\} \setminus \{S \leq s_{j-1}\} \in \mathcal{F}_{s_j}^N$$

Soit $A \in \mathcal{F}_S^N$, $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_\ell$ et n_1, \dots, n_ℓ dans \mathbb{N} .

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(A \cap \left(\bigcap_{k=1}^{\ell} \{N_{t_k}^S = n_k\} \right) \right) \\ &= \sum_j \mathbb{P} \left(\{S = s_j\} \cap A \cap \left(\bigcap_{k=1}^{\ell} \{N_{s_j+t_k} - N_{s_j} = n_k\} \right) \right) \\ &= \sum_j \mathbb{P}(\{S = s_j\} \cap A) \mathbb{P} \left(\bigcap_{k=1}^{\ell} \{N_{s_j+t_k} - N_{s_j} = n_k\} \right) \\ &= \mathbb{P}(A) \mathbb{P} \left(\bigcap_{k=1}^{\ell} \{N_{t_k} = n_k\} \right), \end{aligned}$$

où on a utilisé la propriété $\{S = s_j\} \cap A \in \mathcal{F}_{s_j}^N$ pour la seconde égalité, et le fait que le second facteur de l'avant dernière expression ne dépend pas de s_j , par stationnarité des accroissements de $\{N_t\}$.

Le résultat est établi pour un temps d'arrêt prenant ses valeurs dans une suite croissante d'instant. Mais tout temps d'arrêt S peut être approché par une suite décroissante de temps d'arrêt de cette forme. En effet, pour tout n , posons

$$S_n = \sum_{k \in \mathbb{N}} k 2^{-n} \mathbf{1}_{\{(k-1)2^{-n} < S \leq k 2^{-n}\}}.$$

L'égalité ci-dessus est alors vraie avec S remplacé par S_n , puisque

$$S \leq S_n \Rightarrow \mathcal{F}_S^N \subset \mathcal{F}_{S_n}^N.$$

On passe aisément à la limite dans l'égalité avec S remplacé par S_n puisque par continuité à droite des trajectoires de $\{N_t, t \geq 0\}$,

$$\mathbb{P} \left(A \cap \left(\bigcap_{k=1}^{\ell} \{N_{t_k}^{S_n} = n_k\} \right) \right) \rightarrow \mathbb{P} \left(A \cap \left(\bigcap_{k=1}^{\ell} \{N_{t_k}^S = n_k\} \right) \right).$$

Corollaire 6.3.3. Soit $\{N_t; t \geq 0\}$ un processus de Poisson d'intensité λ , et $(T_n)_{n \geq 1}$ ses instants de saut. On pose $S_1 = T_1, S_2 = T_2 - T_1, \dots, S_n = T_n - T_{n-1}, \dots$. Les variables aléatoires $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ sont indépendantes, toutes de loi exponentielle de paramètre λ .

PREUVE: On sait déjà que T_1 , le premier instant de saut d'un processus de Poisson d'intensité λ , suit une loi exponentielle de paramètre λ . Il résulte de la Proposition 6.3.2 avec $S = T_n$ que $S_{n+1} = T_{n+1} - T_n$ est le premier instant de saut d'un processus de Poisson d'intensité λ donc suit une loi exponentielle de paramètre λ , et est indépendant de T_1, T_2, \dots, T_n , donc aussi de S_1, S_2, \dots, S_n . Ceci étant vrai pour tout $n \geq 1$, le résultat est démontré. \square

Il est assez clair que l'on a la réciproque suivante :

Proposition 6.3.4. Soit $\{S_n; n \geq 1\}$ une suite de v.a.r. indépendantes, toutes de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose

$$T_n = S_1 + \dots + S_n, \quad n \geq 1,$$

$$N_t = \sup\{n; T_n \leq t\}, \quad t \geq 0.$$

Alors $\{N_t, t \geq 0\}$ est un processus de Poisson d'intensité λ .

On a donc une façon de "construire" un processus de Poisson, ce qui en particulier démontre que la Définition 6.2.1 n'est pas vide! On a aussi une façon de *simuler* le processus de Poisson.

6.4 Comportement asymptotique

Soit à nouveau $\{N_t; t \geq 0\}$ un processus de Poisson d'intensité λ . On a :

$$\mathbb{E}[N_t] = \lambda t, \quad \text{Var}[N_t] = \lambda t.$$

Donc $\mathbb{E}[N_t/t] = \lambda$, $\text{Var}[N_t/t] = \frac{\lambda}{t}$, d'où $N(t)/t \rightarrow \lambda$ en moyenne quadratique, quand $t \rightarrow \infty$. En fait on a aussi la "loi forte des grands nombres" :

Proposition 6.4.1. Soit $\{N_t; t \geq 0\}$ un processus de Poisson d'intensité λ .

Alors $\frac{N_t}{t} \rightarrow \lambda$ p.s. quand $t \rightarrow \infty$.

PREUVE: Remarquons tout d'abord que

$$N_n = \sum_{1 \leq i \leq n} [N_i - N_{i-1}]$$

est la somme de n variables aléatoires indépendantes, de même loi de Poisson de paramètre λ (donc intégrable). Il résulte donc de la loi forte des grands nombres que

$$\frac{N_n}{n} \rightarrow \lambda, \quad \text{p.s., quand } n \rightarrow \infty.$$

Or, avec la notation $[t] =$ partie entière de t ,

$$\frac{N_t}{t} = \frac{N_{[t]}}{[t]} \times \frac{[t]}{t} + \frac{N_t - N_{[t]}}{t}.$$

Il suffit donc de montrer que

$$\sup_{n < t < n+1} \frac{N_t - N_n}{n} \rightarrow 0, \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

Or si

$$\begin{aligned} \xi_n &\stackrel{\text{def}}{=} \sup_{n < t < n+1} N_t - N_n, \\ &= N_{n+1} - N_n, \end{aligned}$$

les $\{\xi_n\}$ sont i.i.d. et intégrables. Donc $\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \rightarrow \lambda$ p.s., d'où

$$\frac{\xi_n}{n} \rightarrow 0 \text{ p.s.}$$

□

On a un "théorème de la limite centrale" :

Proposition 6.4.2. *Soit $\{N_t; t \geq 0\}$ un processus de Poisson d'intensité λ . Alors*

$$\frac{N_t - \lambda t}{\sqrt{\lambda t}} \rightarrow Z \text{ en loi, quand } t \rightarrow \infty,$$

où Z est une v.a.r de loi gaussienne centrée réduite (i.e. d'espérance 0 et de variance 1).

PREUVE: On raisonne comme dans la preuve précédente.

$$\frac{N_n - \lambda n}{\sqrt{\lambda n}} \rightarrow Z \text{ en loi, quand } n \rightarrow \infty,$$

d'après le théorème de la limite centrale "classique". Et

$$\frac{N_t - N_{[t]}}{\sqrt{\lambda[t]}} \leq \xi_{[t]}/\sqrt{\lambda[t]},$$

qui tend en probabilité vers zéro quand $t \rightarrow \infty$ puisque

$$\begin{aligned} P\left(\xi_n/\sqrt{\lambda n} > \varepsilon\right) &= P\left(\xi_n > \varepsilon\sqrt{\lambda n}\right) \\ &= P\left(\xi_1 > \varepsilon\sqrt{\lambda n}\right) \\ &\rightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Donc a fortiori $\frac{N_t - N_{[t]}}{\sqrt{\lambda[t]}} \rightarrow 0$ en probabilité quand $t \rightarrow \infty$. Finalement :

$$\begin{aligned} \frac{N_t - \lambda t}{\sqrt{\lambda t}} &= \frac{N_{[t]} - \lambda[t]}{\sqrt{\lambda[t]}} \times \sqrt{\frac{[t]}{t}} \\ &\quad + \frac{N_t - N_{[t]}}{\sqrt{\lambda t}} \times \sqrt{\frac{[t]}{t}} + \sqrt{\lambda} \frac{[t] - t}{\sqrt{t}}, \end{aligned}$$

et on sait que si $X_n \rightarrow X$ en loi, $Y_n \rightarrow 0$ en probabilité, alors

$$X_n + Y_n \rightarrow X \text{ en loi.}$$

□

On peut en fait établir un "théorème de la limite centrale fonctionnel" que nous allons maintenant décrire. Une démonstration analogue à celle de la Proposition 6.4.2 montre que pour tout $t > 0$,

$$\frac{N_{tu} - \lambda tu}{\sqrt{\lambda u}} \rightarrow B_t \text{ en loi quand } u \rightarrow \infty,$$

où B_t est une v.a.r. gaussienne centrée de variance t . Remarquons que pour chaque u , $\{[N_{tu} - \lambda tu]/\sqrt{\lambda u}, t \geq 0\}$ est un processus à accroissements

indépendants, dont les sauts sont d'amplitude $(\lambda u)^{-1/2}$. Il en résulte que l'on peut passer à la limite ci-dessus quand $u \rightarrow \infty$ "de façon coordonnée pour les différents t ", de telle sorte que la limite $\{B_t, t \geq 0\}$ soit un processus gaussien centré, à accroissements indépendants, à trajectoires continues, et vérifiant $E[B_t] = t$. $\{B_t; t \geq 0\}$ est ce qu'on appelle le **mouvement brownien**.

6.5 Exercices

Exercice 6.5.1. Soit X une v.a.r. à valeurs dans \mathbb{R}_+ t.q. $\mathbb{P}(X > t) > 0, \forall t > 0$. On suppose en outre que $\forall s, t > 0$,

$$\mathbb{P}(X > s + t / X > t) = \mathbb{P}(X > s).$$

En déduire que la loi de X est une loi exponentielle.

Exercice 6.5.2. Trois personnes A, B et C arrivent à la poste en même temps pour téléphoner. Il y a deux cabines qu'occupent immédiatement A et B . C remplace le premier sorti. A, B et C quittent immédiatement la poste après avoir téléphoné.

On désigne par X, Y et Z les temps d'occupation de la cabine par A, B et C respectivement. Ces trois variables aléatoires sont supposées indépendantes et équidistribuées, de loi commune la loi sur \mathbb{R}_+ de densité $\lambda \exp(-\lambda t), t \geq 0$ (avec $\lambda > 0$).

- a Calculer la probabilité que C sorte le dernier.
- b Trouver la loi de probabilité du temps total T passé par C à la poste.
- c L'instant 0 étant l'instant d'arrivée des trois personnes à la poste, donner la loi de probabilité de l'instant du dernier départ.

Indication : on cherchera à déterminer la loi du v.a. $(X \wedge Y, X \vee Y - X \wedge Y)$ ($\wedge = \inf, \vee = \sup$).

Exercice 6.5.3. Une machine possède une durée de vie τ_1 de loi exponentielle de paramètre θ . Lorsqu'elle tombe en panne, elle est instantanément remplacée par une machine semblable de durée de vie τ_2 et ainsi de suite. On suppose les durées de vie $(\tau_n; n \in \mathbb{N})$ indépendantes et équidistribuées. La première machine commence à travailler à l'instant 0; les instants T_n ($n \geq 1$) de défaillance des machines successives (soit $T_1 = \tau_1, T_2 = \tau_1 + \tau_2, \dots$) forment un processus de Poisson.

- a** Pour un instant $t > 0$ fixé, soit D_t la durée écoulée depuis la mise en fonctionnement de la machine en marche à l'instant t . Dans quel ensemble la v.a. D_t prend-elle ses valeurs ? Quelle est la loi de D_t ? Montrer que lorsque $t \rightarrow \infty$, cette loi possède une limite.
- b** Soit S_t la v.a. positive telle que $t + S_t$ soit l'instant de défaillance de la machine en fonctionnement à l'instant t . Quelle est la loi de S_t ? Quelle est la loi du couple (D_t, S_t) et quelle est la limite de cette loi lorsque $t \rightarrow \infty$? Pourquoi les deux v.a. D_t et S_t ne sont-elles pas équidistribuées et pourquoi le deviennent-elles quand $t \rightarrow \infty$?
- c** Quelle est la loi de $D_t + S_t$, la durée de vie de la machine en fonctionnement à l'instant t ? Comparer la limite de cette loi quand $t \rightarrow \infty$ avec la loi commune des τ_n .

Exercice 6.5.4. **a)** Soit X_1, X_2, \dots, X_n des v.a.r. indépendantes, toutes de loi uniforme sur $[0, t]$, et Y_1, Y_2, \dots, Y_n la même suite ordonnée par ordre croissant, i.e. définie par

$$\begin{aligned} Y_1 &= \inf_{1 \leq i \leq n} X_i = X_{i_1} \\ Y_2 &= \inf_{1 \leq i \leq n, i \neq i_1} X_i \end{aligned}$$

et ainsi de suite. Préciser la loi du vecteur aléatoire (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) .

- b)** Soit $\{N_t, t \geq 0\}$ un processus de Poisson d'intensité λ . Montrer que la loi conditionnelle du vecteur aléatoire (T_1, T_2, \dots, T_n) , sachant que $N_t = n$, est la loi trouvée en a).

Exercice 6.5.5. Soit $\{N_t^1; t \geq 0\}$ et $\{N_t^2; t \geq 0\}$ deux processus de Poisson indépendants, d'intensité respective λ_1 et λ_2 . Montrer que $\{N_t^1 + N_t^2; t \geq 0\}$ est un processus de Poisson d'intensité $\lambda_1 + \lambda_2$.

Chapitre 7

Processus markoviens de saut

7.1 Généralités

Le but de ce chapitre est d'étudier les processus de Markov à valeurs dans un espace d'état E fini ou dénombrable. Un tel processus $\{X_t, t \geq 0\}$ a ses trajectoires continues à droite et constantes entre ses sauts, lesquels se produisent à des instants aléatoires $T_1(\omega), T_2(\omega), \dots, T_n(\omega), \dots$. La différence avec le processus de Poisson du chapitre précédent est que, connaissant la position avant le saut, la position après le saut est aléatoire. Si l'on désigne par $Z_n(\omega)$ la position de $\{X_t\}$ juste après la n -ième saut $T_n(\omega)$, $n \geq 1$, une trajectoire type de $\{X_t; t \geq 0\}$ a l'allure suivante

La donnée de $\{X_t; t \geq 0\}$ est équivalente à celle de la double suite $\{T_n, Z_n; n \geq 0\}$.

Pour certaines applications, il convient de pouvoir rendre certains états absorbants (par exemple, dans le cas d'un modèle décrivant l'évolution de la taille d'une population sans possibilité d'immigration, l'état 0 est absorbant). $i \in E$ est dit absorbant si $X_{T_n}(\omega) = i \Rightarrow T_{n+1}(\omega) = +\infty$.

On supposera donc que les instants de saut forment une suite croissante

$$0 = T_0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T_n \leq \dots$$

avec $T_n \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, et

$$T_n(\omega) < T_{n+1}(\omega) \text{ si } T_n(\omega) < \infty,$$

et en outre que $T_n(\omega) \rightarrow +\infty^1$ quand $n \rightarrow \infty$. Une fonction aléatoire $\{X_t; t \geq 0\}$ à valeurs dans E est appelée fonction aléatoire de sauts si elle est de la forme :

$$X_t(\omega) = \sum_{\{n \geq 0; T_n(\omega) < \infty\}} Z_n(\omega) \mathbf{1}_{[T_n(\omega), T_{n+1}(\omega)[}(t)$$

où les v.a. Z_n prennent leurs valeurs dans E . Posons la :

Définition 7.1.1. Une fonction aléatoire de sauts $\{X_t, t \geq 0\}$ à valeurs dans E est appelée **processus markovien de sauts** (ou chaîne de Markov en temps continu) si pour tout $0 < s < t$, la loi conditionnelle de la v.a. X_t sachant $\{X_u; 0 \leq u \leq s\}$ ne dépend que de X_s , i.e. si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n < s$, i_0, i_1, \dots, i_n , $i, j \in E$,

$$\mathbb{P}(X_t = j / X_{t_0} = i_0, X_{t_1} = i_1, \dots, X_{t_n} = i_n, X_s = i) = \mathbb{P}(X_t = j / X_s = i)^2.$$

On dira que le processus markovien $\{X_t, t \geq 0\}$ est **homogène** si la quantité $P(X_t = j / X_s = i)$ ne dépend de s et de t que par la différence $t - s$.

On n'étudiera dans la suite que des processus markoviens homogènes. On utilisera la notation :

$$\mathbb{P}(X_t = j / X_s = i) = P_{ij}(t - s)$$

¹Cette condition exclut la possibilité d'"explosion", i.e. la situation où T_n tend vers une quantité finie avec une probabilité non nulle.

²Cette condition n'a de sens que si

$$\mathbb{P}(X(t_0) = x_0, X(t_1) = x_1, \dots, X(t_n) = x_n, X(s) = x) > 0.$$

On ne tiendra pas compte de la condition pour les valeurs de $n, x_0, x_1, \dots, x_n, x$ pour lesquelles cette inégalité n'est pas satisfaite

où pour tout $t > 0$, $P(t)$ est une “matrice markovienne” sur $E \times E$, appelée matrice de transition dans le temps t . On notera ci-dessous $\mu(t)$ la loi de probabilité de X_t sur E , $t \geq 0$. $\mu(0)$ est appelée la “loi initiale” du processus $\{X_t; t \geq 0\}$.

Proposition 7.1.2. *Soit $\{X_t, t \geq 0\}$ un processus markovien de sauts, de loi initiale μ et de matrices de transition $\{P(t), t > 0\}$. Pour tout n dans \mathbb{N} , $0 < t_1 < \dots < t_n$, la loi du vecteur aléatoire $(X_0, X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ est donnée par : pour tout i_0, i_1, \dots, i_n dans E ,*

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X_0 = i_0, X_{t_1} = i_1, X_{t_2} = i_2, \dots, X_{t_n} = i_n) \\ &= \mu_{i_0} P_{i_0 i_1}(t_1) P_{i_1 i_2}(t_2 - t_1) \times \dots \times P_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1}). \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $t > 0$,

$$\mu(t) = \mu(0)P(t)$$

au sens où $\mu_j(t) = \sum_{i \in E} \mu_i(0)P_{ij}(t)$, et pour toute fonction positive ou bornée $g : E \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g(X_t)/X_0 = i] &= (P(t)g)_i \\ &= \sum_{j \in E} P_{ij}(t)g_j. \end{aligned}$$

En outre, les matrices de transition $\{P(t), t > 0\}$ vérifient la relation de semi-groupe (équation de Chapman-Kolmogorov) :

$$P(s+t) = P(s)P(t),$$

au sens où pour tous les i, j dans E

$$P_{ij}(t+s) = \sum_{k \in E} P_{ik}(t)P_{kj}(s)$$

PREUVE: Il résulte immédiatement de la définition des probabilités conditionnelles et de la propriété de Markov que

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X_0 = i_0, X_{t_1} = i_1, \dots, X_{t_n} = i_n) \\ &= \mathbb{P}(X_0 = i_0)P(X_{t_1} = i_1/X_0 = i_0)\mathbb{P}(X_{t_2} = i_2/X_0 = i_0, X_{t_1} = i_1) \\ &\times \dots \times \mathbb{P}(X_{t_n} = i_n/X_0 = i_0, X_{t_1} = i_1, \dots, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}) \\ &= \mu_{i_0} P_{i_0 i_1}(t_1) P_{i_1 i_2}(t_2 - t_1) \times \dots \times P_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1}). \end{aligned}$$

Dans le cas $n = 1$, cette formule s'écrit :

$$\mathbb{P}(X_0 = i, X_t = j) = \mu_i P_{ij}(t)$$

et le second résultat s'en déduit en sommant sur $i \in E$. Par définition de $P(t)$,

$$\mathbb{P}(X_t = j / X_0 = i) = P_{ij}(t),$$

le troisième résultat s'en déduit en multipliant par g_j et sommant en $j \in E$.

Enfin la formule ci-dessus dans le cas $n = 2$ donne, après division par μ_{i_0}

$$\mathbb{P}(X_s = k, X_{s+t} = j / X_0 = i) = P_{ik}(s)P_{kj}(t)$$

le dernier résultat s'en déduit en sommant en $k \in E$. □

Nous allons maintenant présenter quelques exemples de processus markoviens de saut.

Exemple 7.1.3. *Un processus de Poisson $\{N_t; t \geq 0\}$ d'intensité λ est un processus de Markov à valeurs dans \mathbb{N} , de matrice de transition :*

$$P_{ij}(t) = \begin{cases} e^{-\lambda t} (\lambda t)^{j-i} / (j-i)!, & \text{si } j \geq i; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple 7.1.4. Processus du télégraphe *Etant donné un processus de Poisson $\{N_t\}$ d'intensité λ , et une v.a. X_0 à valeur dans $E = \{-1, +1\}$, indépendante de $\{N_t; t \geq 0\}$, on pose :*

$$X_t = X_0 (-1)^{N_t}, \quad t \geq 0.$$

$\{X_t, t \geq 0\}$ est un processus de Markov, de matrice de transition :

$$P_{+1+1}(t) = P_{-1-1}(t) = e^{-\lambda t} \sum_{n \geq 0} (\lambda t)^{2n} / (2n)!$$

$$P_{-1+1}(t) = P_{+1-1}(t) = e^{-\lambda t} \sum_{n \geq 0} (\lambda t)^{2n+1} / (2n+1)!$$

Exemple 7.1.5. Soit $\{N_t; t \geq 0\}$ un processus de Poisson d'intensité λ , et d'instants de saut $0 < T_1 < T_2 < T_3 < \dots < T_n < \dots$. On se donne en outre une chaîne de Markov en temps discret $\{Z_n; n \in \mathbb{N}\}$ à valeurs dans E , de matrice de transition $\{P_{ij}; i, j \in E\}$, indépendante de $\{N_t, t \geq 0\}$. Alors on peut montrer (voir exercice 7.11.1 ci-dessous) que

$$X_t = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n \mathbf{1}_{[T_n, T_{n+1}[}(t), \quad t \geq 0$$

est un processus markovien de saut.

7.2 Générateur infinitésimal

La propriété de semi-groupe fait que $P(t)$ est connu pour tout t dès qu'il est connu pour t petit. En fait, on va voir qu'il est entièrement déterminé par sa dérivée à droite en $t = 0$ (on sait que $P(0) = I$).

Théorème 7.2.1. Soit $\{P(t), t > 0\}$ le semi-groupe des matrices de transition d'un processus markovien de sauts $\{X_t, t \geq 0\}$.

Il existe une matrice $\{Q_{ij}; i, j \in E\}$ (appelée le **générateur infinitésimal** du semi-groupe $(P(t))$) qui vérifie

$$\begin{aligned} (i) \quad & Q_{ij} \geq 0 \text{ si } i \neq j \\ (ii) \quad & Q_{ii} = - \sum_{j \in E \setminus \{i\}} Q_{ij} \leq 0, \end{aligned}$$

(cette dernière égalité étant stricte sauf si l'état i est absorbant) et telle que, lorsque $h \downarrow 0$,

$$\begin{aligned} P_{ij}(h) &= hQ_{ij} + o(h) \text{ si } i \neq j \\ P_{ii}(h) &= 1 + hQ_{ii} + o(h). \end{aligned}$$

En outre, conditionnellement en $X_0 = i$, l'instant de premier saut T_1 et la position après le premier saut $Z_1 = X_{T_1}$ sont indépendants, T_1 de loi exponentielle de paramètre $q_i = -Q_{ii}$, et Z_1 de loi sur E donnée par $\{Q_{ij}/q_i; j \neq i\}$.

PREUVE: Remarquons tout d'abord que

$$\{T_1 > nh\} \subset \{X_0 = X_h = \dots = X_{nh}\} \subset \{T_1 > nh\} \cup \{T_2 - T_1 \leq h\}.$$

Comme $P(T_2 - T_1 \leq h) \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$, on a que si, $h \rightarrow 0$, $nh \rightarrow t$ (avec $nh \geq t$),

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_1 > t / X_0 = i) &= \lim \mathbb{P}(X_0 = X_h = \cdots = X_{nh} / X_0 = i) \\ &= \lim [P_{ii}(h)]^n \end{aligned}$$

L'existence de cette dernière limite entraîne que

$$\frac{1}{h}[1 - P_{ii}(h)] \rightarrow q_i \in [0, +\infty],$$

quand $h \rightarrow 0$, et donc

$$\mathbb{P}(T_1 > t / X_0 = i) = e^{-q_i t}.$$

D'où nécessairement $q_i < \infty$ et $q_i = 0$ ssi i est absorbant. On pose $Q_{ii} = -q_i$.

La démonstration de l'existence des limites de $\frac{1}{h}P_{ij}(h)$ pour $i \neq j$ se fait de façon analogue :

$$\begin{aligned} &\{T_1 \leq t, Z_0 = i, Z_1 = j\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0, nh \rightarrow t} \sum_{1 \leq m \leq n} \{X_0 = X_h = \cdots = X_{(m-1)h} = i, X_{mh} = j\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_1 \leq t, Z_1 = j / X_0 = i) &= \lim \frac{1 - P_{ii}(h)^n}{1 - P_{ii}(h)} P_{ij}(h) \\ &= \frac{1 - e^{-q_i t}}{q_i} \lim \frac{1}{h} P_{ij}(h) \end{aligned}$$

Donc $Q_{ij} = \lim \frac{1}{h} P_{ij}(h)$ existe pour $i \neq j$ et

$$\mathbb{P}(T_1 \leq t, Z_1 = j / X_0 = i) = (1 - e^{-q_i t}) \frac{Q_{ij}}{q_i}$$

d'où

$$\mathbb{P}(T_1 \leq t, Z_1 = j / X_0 = i) = \mathbb{P}(T_1 \leq t / X_0 = i) \mathbb{P}(Z_1 = j / X_0 = i)$$

et

$$\mathbb{P}(Z_1 = j / X_0 = i) = \frac{Q_{ij}}{q_i}.$$

Dans le cas $\text{card}E < \infty$, on déduit immédiatement du Théorème le :

Corollaire 7.2.2. (i) $\{P(t), t \geq 0\}$ est l'unique solution de l'équation de Kolmogorov "rétrograde"

$$\frac{dP(t)}{dt} = QP(t) \quad t > 0; \quad P(0) = I.$$

En outre $u(t, i) := E[g(X_t) | X_0 = i]$ satisfait aussi une équation de Kolmogorov rétrograde

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, i) = \sum_{j \in E} Q_{ij} u(t, j), & t > 0, i \in E; \\ u(0, i) = g(i), & i \in E. \end{cases}$$

(ii) $\{P(t), t \geq 0\}$ est aussi l'unique solution de l'équation de Kolmogorov progressive :

$$\frac{dP(t)}{dt} = P(t)Q, \quad t > 0; \quad P(0) = I.$$

En outre, la famille des lois de probabilité marginales $\{\mu(t), t \geq 0\}$ des v.a. $\{X_t; t \geq 0\}$ satisfait l'équation de Fokker-Planck :

$$\frac{\partial \mu_i(t)}{\partial t} = \sum_{j \in E} \mu_j(t) Q_{ji}, \quad t > 0, i \in E.$$

PREUVE: Pour établir l'équation de Kolmogorov rétrograde, il suffit de dériver $P_{ij}(t)$ en utilisant la propriété de semi-groupe sous la forme

$$P(t+h) = P(h)P(t).$$

L'équation pour u se déduit alors de l'équation obtenue en multipliant à droite par le vecteur colonne $\{g_i\}$. L'équation progressive s'obtient en dérivant à partir de la formule :

$$P(t+h) = P(t)P(h).$$

L'équation de Fokker-Planck s'en déduit alors en multipliant à gauche par le vecteur ligne $\{\mu_i(0)\}$.

La démonstration ci-dessus n'est pas rigoureuse dans le cas $\text{card}E = \infty$, puisqu'elle implique la permutation d'une dérivation et d'une sommation infinie. Nous donnerons plus loin une démonstration pour le cas $\text{card}E = \infty$.

7.3 Propriété de Markov forte

La notion de temps d'arrêt et la tribu \mathcal{F}_S^X sont définis comme à la section 6.3, en remplaçant $\{N_t; t \geq 0\}$ par $\{X_t; t \geq 0\}$.

Théorème 7.3.1. *Soit S un temps d'arrêt du processus markovien de sauts $\{X_t; t \geq 0\}$. Conditionnellement en $\{S < \infty\}$ et $\{X_S = i\}$, $\{X_{S+t}, t \geq 0\}$ est indépendant de \mathcal{F}_S^X , et sa loi est celle de $\{X_t; t \geq 0\}$ sachant que $X_0 = i$.*

PREUVE: On va se contenter de faire la démonstration dans le cas d'un temps d'arrêt constant $S \equiv s$. Le cas général s'en déduit comme pour le processus de Poisson (cf. Preuve de la Proposition 6.3.2).

Soit $0 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k < s$; $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_\ell$; $i, i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_\ell \in S$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X_{s+t_1} = j_1, \dots, X_{s+t_\ell} = j_\ell / X_{s_1} = i_1, \dots, X_{s_k} = i_k, X_s = i) \\ &= \frac{\mathbb{P}(X_{s_1} = i_1, \dots, X_{s_k} = i_k, X_s = i, X_{s+t_1} = j_1, \dots, X_{s+t_\ell} = j_\ell)}{\mathbb{P}(X_{s_1} = i_1, \dots, X_{s_k} = i_k, X_s = i)} \\ &= P_{ij_1}(t_1) P_{j_1 j_2}(t_2 - t_1) \times \dots \times P_{j_{\ell-1} j_\ell}(t_\ell - t_{\ell-1}) \\ &= \mathbb{P}(X_{t_1} = j_1, \dots, X_{t_\ell} = j_\ell / X_0 = i) \end{aligned}$$

□

Nous allons maintenant établir les équations de Kolmogorov dans le cas général, ainsi que généraliser le Théorème 7.2.1 pour la loi de (T_n, Z_n) .

Pour tout n , nous définissons la loi conditionnelle de (Z_n, T_n) sachant que $X_0 = Z_0 = i$:

$$R_n(i; j, B) = \mathbb{P}(Z_n = j, T_n \in B / Z_0 = i), \quad B \in \mathcal{B}_+.$$

Notons qu'il résulte du Théorème 7.2.1 que

$$R_1(i; j, B) = \begin{cases} Q_{ij} \int_B e^{-qt} dt, & \text{si } i \neq j; \\ 0, & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Il sera commode de considérer que R_0 est défini comme suit, avec B borélien quelconque de \mathbb{R}_+ :

$$R_0(i; j, B) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, 0 \in B; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

La propriété de Markov forte à l'instant T_m entraîne que

$$\mathbb{P}(Z_{m+n} = k, T_{m+n} \in B / \mathcal{F}_{T_m}^X) = R_n(X_{T_m}; k, B - T_m),$$

où nous avons utilisé la notation

$$B - t = \{s \in \mathbb{R}_+; s + t \in B\}$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_{m+n} = k, T_{m+n} \in B / X_0 = i) &= \mathbb{E}[R_n(Z_m; k, B - T_m) / X_0 = i] \\ &= \sum_{j \in E} \int_{\mathbb{R}_+} R_m(i; j, dt) R_n(j; k, B - t), \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$R_{m+n}(i; k, B) = \sum_{j \in E} \int_{\mathbb{R}_+} R_m(i; j, dt) R_n(j; k, B - t).$$

En sommant sur j et en intégrant par rapport à dt , on obtient l'équation fondamentale

$$R_{m+n}(i; k, du) = \sum_j \int_0^u R_m(i; j, dt) R_n(j; k, du - t),$$

où la mesure $R_n(j; k, du - t)$ est définie par

$$\int_{\mathbb{R}_+} R_m(j; k, du - t) f(u) = \int_{\mathbb{R}_+} R_m(j; k, du) f(t + u).$$

Il est clair que les $\{R_n, n \geq 1\}$ sont entièrement déterminés par R_1 et cette équation fondamentale.

Remarquons que

$$\begin{aligned} P_{ij}(s) &= \sum_{m \geq 0} \mathbb{P}(Z_m = j, T_m \leq s < T_{m+1} / Z_0 = i) \\ &= \sum_{m \geq 0} P(Z_m = j, T_m \leq s, T_{m+1} - T_m > s - T_m / Z_0 = i) \\ &= \sum_{m \geq 0} \mathbb{E}[\mathbb{P}(T_{m+1} - T_m > s - T_m / Z_m, T_m) \mathbf{1}_{\{Z_m = j, T_m \leq s\}} / Z_0 = i] \\ &= \sum_{m \geq 0} \mathbb{E}[e^{-qZ_m(s - T_m)} \mathbf{1}_{\{Z_m = j, T_m \leq s\}} / Z_0 = i] \\ &= \sum_{m \geq 0} \int_0^s e^{-q_j(s-t)} R_m(i; j, dt), \end{aligned}$$

où on a utilisé à la troisième égalité la propriété de Markov forte à l'instant T_m .

Donc d'après l'équation ci-dessus

$$P_{ij}(s) = \delta_{ij}e^{-q_i s} + \sum_{m \geq 1} \int_0^s e^{-q_j(s-t)} R_m(i; j, dt)$$

$$P_{ij}(s) = \delta_{ij}e^{-q_i s} + \sum_{m \geq 0, k \in E} \int_0^s e^{-q_j(s-t)} \int_0^t R_1(i; k, du) R_m(k; j, dt - u).$$

Soit

$$P_{ij}(s) = \delta_{ij}e^{-q_i s} + \sum_{k \in E} \int_0^s R_1(i; k, du) P_{kj}(s - u)$$

$$e^{q_i s} P_{ij}(s) = \delta_{ij} + \int_0^s e^{q_i t} \sum_{k \neq i} Q_{ik} P_{kj}(t) dt,$$

ce qui est une forme intégrale de l'équation $\frac{dP(s)}{ds} = QP(s)$.

On pourrait établir de façon analogue l'équation de Kolmogorov progressive.

Le raisonnement qui précède montre que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_1 = j, T_1 \in B, Z_2 = k, T_2 - T_1 \in C / Z_0 = i) \\ = \int_B \int_C R_1(i, j, dt) R_1(j, k, du) \end{aligned}$$

Cette formule se généralise à la loi de $((Z_1, T_1), \dots, (Z_n, T_n))$. Partant de cette loi jointe, on pourrait en déduire que le processus de saut correspondant $\{X_t, t \geq 0\}$ est markovien.

Remarque 7.3.2. Si on se donne un générateur quelconque Q , on peut définir R_1 , et donc la loi des (Z_i, T_i) . Mais la suite $\{T_n\}$ correspondante ne vérifie pas forcément la propriété $T_n \rightarrow \infty$ p.s. quand $n \rightarrow \infty$, i.e. le processus $\{X_t\}$ correspondant n'est pas forcément défini pour tout $t \geq 0$.

7.4 Chaîne de Markov incluse

Soit $\{X_t; t \geq 0\}$ un processus de Markov dont les temps de saut $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$ vérifient la condition de non explosion $T_n \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$. La suite $\{Z_n; n \in \mathbb{N}\}$ définie par

$$Z_n = X_{T_n} \quad (\text{avec } T_0 = 0)$$

est une chaîne de Markov en temps discret (c'est une conséquence de la propriété de Markov forte de $\{X_t\}$), appelée la "chaîne incluse", qui a la particularité que $Z_{n+1} \neq Z_n$ p.s., $\forall n \geq 0$. Sa matrice de transition P se calcule aisément en fonction du générateur Q de $\{X_t\}$:

$$P_{ij} = \begin{cases} (-Q_{ii})^{-1} Q_{ij}, & \text{si } j \neq i; \\ 0, & \text{si } j = i. \end{cases}$$

Posons, pour $n \geq 1$,

$$S_n = q_{Z_{n-1}}(T_n - T_{n-1}) \quad (\text{où } q_i = -Q_{ii}),$$

et pour $t \geq 0$,

$$N_t = \sup\left\{n; \sum_{k=1}^n S_k \leq t\right\}.$$

Alors $\{N_t; t \geq 0\}$ est un processus de Poisson d'intensité 1 (utiliser la propriété de Markov forte de $\{X_t\}$, et le fait que si $U \simeq$ exponentielle (λ) , $\lambda U \simeq$ exponentielle (1)).

Réciproquement, soit $\{N_t; t \geq 0\}$ est un processus de Poisson d'intensité 1, $\{Z_n; n \in \mathbb{N}\}$ une chaîne de Markov à valeurs dans E de matrice de transition P (telle que $P_{ii} = 0, \forall i \in E$) indépendante du processus de Poisson $\{N_t\}$, et $q : E \rightarrow \mathbb{R}_+^*$. On note $0 = T_0 < T_1 < T_2 < \dots$ les instants de saut du processus de Poisson, et on définit, pour $n \geq 1$,

$$S_n = \frac{T_n - T_{n-1}}{q(Z_{n-1})},$$

$$T'_n = S_1 + \dots + S_n.$$

Supposons satisfaite la condition de non explosion. Alors

$$X_t \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \geq 0} Z_n \mathbf{1}_{[T'_n, T'_{n+1}[}(t), \quad t \geq 0,$$

est un processus de Markov de générateur infinitésimal

$$Q_{ij} = \begin{cases} q_i P_{ij}, & \text{si } j \neq i; \\ -q_i, & \text{si } j = i. \end{cases}$$

On montre (cf exercice 7.11.3) que la condition de non explosion est satisfaite ssi

$$\sum_{n \geq 0} q_{Z_n}^{-1} = +\infty \text{ p.s.}$$

Cette dernière condition est toujours satisfaite d'une part si q est bornée, et d'autre part si la chaîne de Markov $\{Z_n\}$ est irréductible et récurrente (exercice).

7.5 Classification des états

Les classes d'équivalence du processus de Markov $\{X_t; t \geq 0\}$ sont celles de la chaîne incluse. En outre, un état $i \in E$ est dit récurrent (resp. transitoire) pour $\{X_t; t \geq 0\}$ s'il est récurrent (resp. transitoire) pour la chaîne incluse.

On a, comme dans le cas des chaînes en temps discret, le

Théorème 7.5.1. *Soit $\{X_t; t \geq 0\}$ un processus de Markov récurrent irréductible. Alors il existe une mesure invariante strictement positive (i.e. une mesure strictement positive π sur E telle que $\pi Q = 0$), unique à une constante multiplicative près.*

Pour distinguer entre récurrence positive ou nulle (cette question ne se pose que dans le cas $|E| = +\infty$), il ne suffit pas de regarder ce qu'il en est de la chaîne incluse, cf. Remarque 7.6.3 ci-dessous. Définissons l'instant du premier retour à l'état i comme :

$$R_i = \inf\{t \geq T_1; X_t = i\}$$

Définition 7.5.2. *L'état i est dit récurrent positif s'il est récurrent et si $\mathbb{E}_i(R_i) < \infty$, récurrent nul s'il est récurrent et si $\mathbb{E}_i(R_i) = +\infty$.*

A nouveau, dans le cas irréductible, tous les états sont soit transients, soit récurrents nuls, soit récurrents positifs, et suivant le cas on dit que le processus $\{X_t\}$ est transient, récurrent nul ou récurrent positif.

7.6 Comportement asymptotique

Nous allons tout d'abord indiquer brièvement une généralisation des résultats de la section 6.4, dont la démonstration est identique à ceux-là.

Supposons que $E = \mathbf{Z}^d$ (plus généralement, ce pourrait être n'importe quel groupe additif), et que pour tout t , $P_{ij}(t) = p_{j-i}(t)$, pour une certaine probabilité $p_i(t)$ sur \mathbf{Z}^d . Il est facile d'en déduire que le processus markovien de sauts $\{X_t; t \geq 0\}$, dont $\{P_{ij}(t)\}$ est le semi-groupe des matrices de transition, est un **processus à accroissements indépendants et stationnaires**, donc il existe m dans \mathbb{R}^d et V une matrice $d \times d$ tels que

$$E[X_t - X_0] = mt, \quad \text{Cov}[X_t - X_0] = Vt.$$

On peut alors montrer que quand $t \rightarrow \infty$

$$\frac{X_t}{t} \rightarrow m \quad \text{p.s.},$$

et

$$(Vt)^{-1/2}(X_t - mt) \rightarrow Z \text{ en loi,}$$

où Z est un vecteur aléatoire gaussien de dimension d , centré et de covariance la matrice identité. On a même que $\{(uV)^{-1/2}(X_{tu} - mtu), t \geq 0\}$ converge vers un mouvement brownien standard d -dimensionnel $\{B_t, t \geq 0\}$ i.e. avec $\text{Cov}(B_t) = tI$.

La classe des processus que nous venons d'examiner vérifie soit $\|X_t\| \rightarrow \infty$ quand $t \rightarrow \infty$ (en particulier si $m \neq 0$) donc le processus $\{X_t\}$ est transitoire, soit $\{X_t\}$ est récurrent, mais ses trajectoires ont des "oscillations de plus en plus grandes" quand $t \rightarrow \infty$. C'est le cas particulier du comportement en temps long d'une classe plus large de processus, pour laquelle pour tous $i, j \in E$,

$$P_{ij}(t) \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow \infty.$$

Nous allons maintenant décrire - sans démonstration, elles sont assez proches de celles du Chapitre 2 - un deuxième type de comportement, qui est à l'opposé de celui que nous venons de voir, et qui couvre en particulier le cas $\text{card}E < \infty$.

Théorème 7.6.1. *Soit $\{X_t, t \geq 0\}$ un processus markovien de sauts à valeurs dans E irréductible, de générateur infinitésimal Q .*

Alors il existe au plus une probabilité sur E $\{\pi_i, i \in E\}$ solution de l'“équation de Fokker–Planck stationnaire”

$$\pi Q \equiv 0, \text{ i.e. } \sum_{j \in E} \pi_j Q_{ji} = 0, \quad i \in E.$$

Une telle solution π existe ssi $\{X_t; t \geq 0\}$ est récurrent positif,

- a) $\pi P(t) = \pi, t \geq 0;$
- b) $\lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t) = \pi_j, i, j \in E;$
et plus généralement pour toute probabilité μ sur E , $(\mu P(t))_j \rightarrow \pi_j,$
 $j \in E;$
- c) quelle que soit la loi initiale $\mu,$

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s=i\}} ds \rightarrow \pi_i \text{ p.s.}$$

quand $t \rightarrow \infty, i \in E$, et plus généralement pour toute fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ qui soit π -intégrable,

$$\frac{1}{t} \int_0^t f(X_s) ds \rightarrow \sum_{i \in E} \pi_i f_i \text{ p.s. }, t \rightarrow \infty.$$

- d) pour tout i dans E , $\mathbb{E}_i(R_i) = (\pi_i q_i)^{-1}.$

Preuve de d) : π_i est la proportion du temps passé dans l'état i . Il suffit de considérer le processus partant de i . Pendant la première excursion (trajectoire entre l'instant 0 et l'instant du premier retour à l'état i , après l'avoir quitté), la proportion du temps passé dans l'état i vaut T_1/R_i . La même proportion, pendant les n premières excursions, vaut

$$(R_i^1 + \dots + R_i^n)^{-1} (T_1^1 + \dots + T_1^n) = \left(n^{-1} \sum_{k=1}^n R_i^k \right)^{-1} n^{-1} \sum_{k=1}^n T_1^k,$$

où $\{R_i^k; 1 \leq k \leq n\}$ (resp. $\{T_1^k; 1 \leq k \leq n\}$) est une suite i.i.d. de loi commune celle de R_i (resp. celle de T_1). Il reste à faire tendre n vers l'infini, et à remarquer que $\mathbb{E}_i(T_1) = q_i^{-1}$. \square

On retrouve la même dichotomie que dans le cas du temps discret : dans le cas récurrent irréductible, le processus est récurrent positif s'il existe une

probabilité invariante, et récurrent nul si toute mesure invariante est de masse infinie. Dans le cas $|E| < \infty$, il n'existe pas d'état récurrent nul.

Dans le cas du temps continu, tout processus de Markov est apériodique, d'où la propriété b) du théorème.

La probabilité π est appelée la **probabilité invariante** du processus de Markov $\{X_t; t \geq 0\}$. Notons qu'une telle probabilité existe toujours dans le cas $\text{card}E < \infty$. a) nous dit que si $\mu(0) = \pi$, $\mu(t) = \pi$ pour tout $t > 0$. En outre, toujours si $\mu(0) = \pi$, le processus $\{X_t; t \geq 0\}$ est **stationnaire** au sens où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$, la loi du vecteur aléatoire $(X_{t_1+s}, X_{t_2+s}, \dots, X_{t_n+s})$ ne dépend pas de $s \geq 0$, ce qui résulte de a) et de la Proposition 2.1.2. b) nous dit que pour tout $\mu(0)$, $\mu(t) \rightarrow \pi$ quand $t \rightarrow \infty$. Enfin le résultat c), appelé théorème ergodique, est une généralisation de la loi forte des grands nombres. Il dit que la proportion du temps passé entre 0 et t dans l'état i converge vers π_i quand t tend vers l'infini.

Remarque 7.6.2. L'équation $\pi Q = 0$ s'écrit $\forall i \in E$,

$$\sum_{j \neq i} \pi_j Q_{ji} = \pi_i \sum_{j \neq i} Q_{ij}.$$

Le membre de gauche de cette égalité s'interprète comme le flux entrant dans l'état i à l'équilibre en provenance des différents états, et le membre de droite, qui vaut aussi $\pi_i \sum_{j \neq i} Q_{ij}$, comme le flux sortant de i à l'équilibre, vers les divers états. L'équation $\pi Q = 0$ dit donc qu'à l'équilibre, les nombre moyen par unité de temps de départs et d'arrivées à chaque état sont égaux.

Remarque 7.6.3. Si Q est le générateur infinitésimal d'un processus markovien de sauts $\{X_t, t \geq 0\}$, notons P la matrice de transition de la chaîne incluse, et \mathbf{q} la matrice diagonale telle que $\mathbf{q}_i = -Q_{ii}$. Alors $Q = \mathbf{q}(P - I)$, et dans le cas récurrent irréductible π est une mesure invariante de $\{X_t\}$ ssi $\pi' = \mathbf{q}\pi$ est une mesure invariante de sa chaîne incluse, puisque $\pi Q = 0$ ssi $\pi' P = \pi'$. On comprend alors aisément comment fabriquer des exemples où le processus en temps continu est récurrent positif (resp. récurrent nul), et sa chaîne incluse récurrente nulle (resp. récurrente positive). On trouvera de tels exemples ci-dessous à la fin de la section 11.2.

On a aussi dans ce contexte une généralisation du théorème de la limite centrale.

Théorème 7.6.4. *Supposons que le processus markovien de sauts $\{X_t; t \geq 0\}$ est irréductible, et qu'il possède une probabilité invariante π . Soit $f \in L^2(E, \pi)$ de la forme $f = Qg$, avec $g \in L^2(E, \pi)$ [ceci entraîne que $\langle \pi, f \rangle = \sum_i \pi_i f_i = \sum_{ij} \pi_i Q_{ij} g_j = 0$].*

On pose

$$C(f) := -2 \sum_{i \in E} f_i g_i \pi_i,$$

que l'on supposera non nul (alors $C(f) > 0$). Alors

$$\frac{1}{\sqrt{tC(f)}} \int_0^t f(X_s) ds \rightarrow Z,$$

en loi, quand $t \rightarrow \infty$, où Z est une v.a.r. gaussienne centrée réduite.

On a aussi la convergence de $\left\{ \frac{1}{\sqrt{uC(f)}} \int_0^{tu} f(X_s) ds, t \geq 0 \right\}$ vers un mouvement brownien $\{B_t, t \geq 0\}$, quand $u \rightarrow \infty$.

7.7 Réversibilité

Etant donné un processus markovien de sauts $\{X_t; t \geq 0\}$, et $T > 0$, $\{\hat{X}_t^T = X_{T-t}, 0 \leq t \leq T\}$ est aussi markovien. Si la loi de X_0 est une probabilité invariante π , alors \hat{X}^T est homogène. Notons \hat{Q} son générateur infinitésimal. On a le

Théorème 7.7.1. $\hat{Q} = Q$ ssi la relation d'équilibre ponctuel

$$\pi_i Q_{ij} = \pi_j Q_{ji}, \quad \forall i, j \in E,$$

est satisfaite. Dans ce cas, on dit que le processus $\{X_t\}$ est réversible (pour la probabilité π , qui est nécessairement invariante).

PREUVE: : On a, pour les mêmes raisons que la formule analogue pour le temps discret,

$$\hat{P}_{ij}(t) = \frac{\pi_j}{\pi_i} P_{ji}(t),$$

d'où l'on déduit en prenant la dérivée en $t = 0$

$$\hat{Q}_{ij} = \frac{\pi_j}{\pi_i} Q_{ji}.$$

Le résultat est maintenant évident.

Remarque 7.7.2. Comme dans le cas des chaînes en temps discret, un processus markovien de saut irréductible récurrent positif n'est pas nécessairement réversible. A nouveau, un contre-exemple est donné par le cas où pour un certain couple $i \neq j$, $Q_{ij} = 0 \neq Q_{ji}$, ce qui n'est pas contradictoire avec l'irréductibilité dès que $\text{card}E \geq 3$.

Remarque 7.7.3. Comme dans le cas du temps discret, déterminer un générateur Q connaissant une probabilité invariante π n'est pas difficile. Le plus simple est de chercher Q telle que le processus correspondant soit réversible par rapport à π , donc de chercher Q générateur infinitésimal irréductible, tel que la quantité $\pi_i Q_{ij}$ soit symétrique en i, j .

Déterminer la probabilité invariante, connaissant le générateur infinitésimal irréductible, est en général plus difficile. On peut chercher à résoudre l'équation

$$\pi_i Q_{ij} = \pi_j Q_{ji},$$

mais celle-ci n'a de solution que dans le cas réversible. Dans le cas non réversible, il faut résoudre l'équation $\pi Q = 0$. Si on sait deviner π à une constante multiplicative près, on peut utiliser le résultat suivant

Théorème 7.7.4. Étant donnée une probabilité π sur E , on pose pour $j \neq i$

$$\hat{Q}_{ij} = \frac{\pi_j}{\pi_i} Q_{ji}.$$

Si

$$\sum_{j \neq i} \hat{Q}_{ij} = \sum_{j \neq i} Q_{ij},$$

alors π est une probabilité invariante, et \hat{Q} (avec $\hat{Q}_{ii} = -\sum_{j \neq i} \hat{Q}_{ij}$) est le générateur du processus retourné.

PREUVE: : En utilisant la première, puis la seconde identité de l'énoncé, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{j \neq i} \pi_j Q_{ji} &= \pi_i \sum_{j \neq i} \hat{Q}_{ij} \\ &= \pi_i \sum_{j \neq i} Q_{ij} \\ &= -\pi_i Q_{ii}, \end{aligned}$$

soit l'égalité $\pi Q = 0$. La seconde partie de l'énoncé est alors une conséquence de la formule contenue dans la preuve du théorème 7.7.1. \square

Notons que si l'on sait deviner le générateur du processus retourné, on en déduit la probabilité invariante à une constante multiplicative près, qui se calcule à l'aide d'une seule sommation.

7.8 Processus semi-markovien de saut

Comme dans le cas des chaînes en temps discret, un processus semi-markovien est un processus de sauts à valeurs dans un ensemble au plus dénombrable E , dont l'évolution future n'oublie pas totalement le passé, au sens où cette évolution dépend à la fois de l'état présent, et du temps écoulé depuis le début de la présente visite à cet état. Ce cadre permet de s'affranchir de la contrainte que les temps de séjour dans les différents états suivent des lois exponentielles. Ces lois pourront être très générales.

Plus précisément, à tout état $i \in \mathbb{E}$, on associe une loi de probabilité sur \mathbb{R}_+ de densité arbitraire f_i . On note $\bar{F}_i(t) = \int_t^\infty f(s)ds$, que l'on suppose strictement positif pour tout $t > 0$, et

$$\lambda_i(t) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{F}_i(t)^{-1} f_i(t).$$

On se donne en outre une probabilité de transition P sur $E \times E$, dont tous les termes diagonaux sont nuls (c'est la matrice de transition de la chaîne incluse). On supposera en outre la matrice de transition P irréductible.

Le processus semi-markovien $\{X_t, t \geq 0\}$ peut alors être décrit comme suit. Si $X_0 = i$, le processus reste à l'état i pendant un temps aléatoire T_1 , de loi de densité f_i . A l'instant T_1 , le processus saute dans un nouvel état, dont le choix est indépendant de T_1 , de loi $P_{i,\cdot}$ sur $E \setminus \{i\}$. Notons que l'on pourrait faire dépendre la matrice de transition de la durée du séjour dans l'état que l'on quitte. On tire ensuite un second temps de séjour, toujours indépendamment des tirages précédents,...

Notons que la chaîne incluse est toujours une chaîne de Markov, de matrice de transition P . Considérons le processus $\{(X_t, Z_t)\}$, où Z_t désigne le temps écoulé depuis le dernier saut avant l'instant t . Notons que les trajectoires du processus $\{Z_t\}$ sont très simples : elles sont constituées de morceaux de ligne droite de pente 1, avec retour en 0 à chaque saut du processus $\{X_t\}$. Il n'est pas trop difficile de montrer la

Proposition 7.8.1. $\{(X_t, Z_t), t \geq 0\}$ est un processus de Markov homogène irréductible à valeurs dans $E \times \mathbb{R}_+$.

L'espace d'état de ce processus de Markov n'étant pas dénombrable, nous ne savons pas si les résultats du Théorème 7.6.1 s'appliquent. Nous admettrons cependant que c'est le cas, nous allons identifier le générateur infinitésimal du processus et, sous une hypothèse supplémentaire, exhiber une probabilité solution de l'équation de Fokker-Planck stationnaire.

L'espace d'état n'étant pas continu, le générateur infinitésimal est un opérateur non borné, dont nous allons préciser l'action sur un sous-ensemble dense de son domaine. On notera $C_c^1(E \times \mathbb{R}_+)$ l'espace des fonctions $\varphi : E \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tout $i \in E$, $s \rightarrow \varphi(i, s)$ est de classe C^1 , et qui sont nulles dès que soit la première variable i est en dehors d'un sous-ensemble fini de E , soit la seconde variable s est en dehors d'un compact de \mathbb{R}_+ . On notera $A_{t,t+h}(k)$ l'événement "le processus $\{X_t\}$ a k sauts sur l'intervalle $]t, t+h]$ ". Pour $\varphi \in C_c^1(E \times \mathbb{R}_+)$, calculons

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\varphi(X_{t+h}, Z_{t+h}) | X_t = i, Z_t = s] &= \mathbb{E} [\varphi(X_{t+h}, Z_{t+h}) \mathbf{1}_{A_{t,t+h}(0)} | X_t = i, Z_t = s] \\ &\quad + \mathbb{E} [\varphi(X_{t+h}, Z_{t+h}) \mathbf{1}_{A_{t,t+h}(1)} | X_t = i, Z_t = s] + o(h) \\ &= \varphi(i, s+h) \frac{\bar{F}_i(s+h)}{\bar{F}_i(s)} \\ &\quad + \int_s^{s+h} \sum_{j \in E} P_{ij} \varphi(j, s+h-r) \lambda_i(r) dr + o(h) \end{aligned}$$

On déduit aisément de ce qui précède que (en utilisant la notation $(P\varphi)(i, s) = \sum_j P_{ij} \varphi(j, s)$)

$$\begin{aligned} (Q\varphi)(i, s) &= \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} (\mathbb{E} [\varphi(X_{t+h}, Z_{t+h}) | X_t = i, Z_t = s] - \varphi(i, s)) \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial s}(i, s) - \lambda_i(s) \varphi(i, s) + \lambda_i(s) (P\varphi)(i, 0). \end{aligned}$$

On va maintenant établir la

Proposition 7.8.2. Si la matrice de transition P est celle d'une chaîne de Markov irréductible récurrence positive, d'unique probabilité invariante $\{\pi_i, i \in E\}$, et si les quantités

$$\bar{T}_i = \int_0^\infty s f_i(s) ds$$

sont finies et vérifient $\sum_{i \in E} \pi_i \bar{T}_i < \infty$, alors la probabilité $\mu(i, s) ds$ sur $E \times \mathbb{R}_+$, définie par

$$\mu(i, s) = \frac{\pi_i}{\sum_j \pi_j \bar{T}_j} \exp\left(-\int_0^s \lambda_i(r) dr\right),$$

est solution de l'équation de Fokker-Planck stationnaire

$$\sum_i \int_0^\infty (Q\varphi)(i, s) \mu(i, s) ds = 0, \quad \forall \varphi \in C_c^1(E \times \mathbb{R}_+).$$

PREUVE: Notons que μ est bien une probabilité, qui vérifie

$$(i) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial s}(i, s) + \lambda_i(s) \mu(i, s) = 0,$$

$$(ii) \quad \mu(i, 0) = \sum_j \mu(j, 0) P_{ji}.$$

Il résulte de (i) que $\mu(i, s) = \mu(i, 0) \exp(-\int_0^s \lambda_i(r) dr)$. D'où (ii) se réécrit

$$(ii') \quad \mu(i, 0) = \sum_j \left(\int_0^\infty \lambda_j(s) \mu(j, s) ds \right) P_{ji}.$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} \langle Q\varphi, \mu \rangle &= \sum_i \int_0^\infty (Q\varphi)(i, s) \mu(i, s) ds \\ &= \sum_i \int_0^\infty \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s}(i, s) - \lambda_i(s) \varphi(i, s) + \lambda_i(s) (P\varphi)(i, 0) \right) \mu(i, s) ds \\ &= - \sum_i \int_0^\infty \varphi(i, s) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s}(i, s) + \lambda_i(s) \mu(i, s) \right) ds \\ &\quad - \sum_i \varphi(i, 0) \mu(i, 0) + (P\varphi)(i, 0) \int_0^\infty \lambda_i(s) \mu(i, s) ds. \end{aligned}$$

Il résulte de (i) + (ii') que la dernière expression est nulle. □ En admettant que le Théorème 7.6.1 s'applique au processus $\{(X_t, Z_t)\}$, on en déduit que sous les hypothèses de la Proposition, le processus $\{(X_t, Z_t)\}$ est récurrent positif, et que la loi de (X_t, Z_t) converge, quand $t \rightarrow \infty$, vers la probabilité invariante. On en déduit, en considérant la première marginale

Corollaire 7.8.3. *Pour tout $i \in E$, quand $t \rightarrow \infty$,*

$$\mathbb{P}(X_t = i) \rightarrow \int_0^\infty \mu(i, s) ds = \frac{\pi_i \bar{T}_i}{\sum_j \pi_j \bar{T}_j}.$$

7.9 Application aux EDP discrétisées

Soit D un domaine borné de \mathbb{R}^2 (le résultat qui suit est en fait vrai en dimension quelconque), de frontière ∂D lipschitzienne. On suppose pour fixer les notations que l'origine $0 \in D$. On considère le problème de Dirichlet :

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in D; \\ u(x) = f(x), & x \in \partial D; \end{cases}$$

avec $f \in C(D^c)$. Il est bien connu que cette équation admet une solution unique u élément de $C(D)$.

Etant donné $h > 0$, soit $h\mathbf{Z}^2$ l'ensemble des points du plan dont les coordonnées sont des multiples entiers relatifs de h . On pose $D_h = D \cap h\mathbf{Z}^2$. ∂D_h est constitué des points de $D^c \cap h\mathbf{Z}^2$ qui sont à distance h d'au moins un point de D_h , et $\bar{D}_h = D_h \cup \partial D_h$. e_1 et e_2 désignant les deux vecteurs de base, on définit l'opérateur approché Δ_h par :

$$(\Delta_h v)(i) = \frac{1}{4} \sum_{h=1}^2 (v(i + he_i) + v(i - he_i)) - v(i).$$

D'après l'Exercice 7.11.6, la solution du problème de Dirichlet discrétisé

$$\begin{cases} \Delta_h u_h(i) = 0, & i \in D_h; \\ u_h(i) = f(i), & i \in \partial D_h; \end{cases}$$

est donnée par la formule $u_h(x) = \mathbb{E}[f(X_{T_{D_h^c}^h}^h) | X_0^h = x]$, où $\{X_t^h; t \geq 0\}$ est un processus markovien de sauts de générateur infinitésimal $\frac{1}{2}\Delta_h$, à valeurs dans $h\mathbf{Z}^2$, et

$$T_{D_h^c}^h = \inf\{t \geq 0; X_t^h \in D_h^c\}.$$

Remarquons que $\{X_t^h, t \geq 0\}$ a même loi que $\{hX_{h^{-1}t}^1, t \geq 0\}$, et que d'après le début de la section 2.3 ce dernier processus converge vers un mouvement

brownien standard unidimensionnel, quand $h \rightarrow 0$. Il n'est pas trop difficile (à condition tout de même notamment de bien comprendre cette notion de convergence de processus!) d'en déduire que

$$u_h(x) \rightarrow u(x) = \mathbb{E}[f(B_{T_{D^c}}) | B_0 = x],$$

(où $T_{D^c} = \inf\{t \geq 0; B_t \in D^c\}$), cette dernière formule donnant la solution du problème de Dirichlet. On a ainsi une preuve (alternative aux méthodes classiques d'analyse numérique) de la convergence de u_h vers u .

Notons enfin que le problème de Dirichlet discrétisé pourrait aussi s'interpréter en terme d'une chaîne de Markov en temps discret, de matrice de transition $\Delta_h + I$.

Ces interprétations probabilistes permettent aussi d'utiliser des méthodes de Monte Carlo pour le calcul approché de solutions d'EDP. Ces méthodes sont très utilisées dans certains cas où les méthodes d'analyse numérique "classique" ne sont pas efficaces, ou sont inutilisables (en particulier dans les cas de dimension trop grande), cf. [22].

7.10 Le recuit simulé (suite)

On choisit une matrice $Q = \{Q_{ij}, i, j \in E\}$ qui soit le générateur infinitésimal d'une chaîne de Markov en temps continu réversible par rapport à la probabilité π . Pour fixer les idées, on choisit pour $i \neq j$

$$Q_{ij} = \mathbf{1}_{\{(i,j) \in G\}} \exp \left[\frac{\beta}{2} (U_j - U_i) \right],$$

où G est un graphe non orienté dans E , i.e. une collection de paires de point de E , choisie de telle sorte que le processus de générateur Q_{ij} soit irréductible (ce qui revient à dire que $\forall i, j \in E, \exists n$ et i_1, i_2, \dots, i_n tels que $(i, i_1) \in G, (i_1, i_2) \in G, \dots, (i_n, j) \in G$).

On définit la **forme de Dirichlet** associée à Q comme la forme bilinéaire sur \mathbb{R}^E :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\varphi, \varphi) &= \langle \varphi, -Q\varphi \rangle_\pi \\ &= - \sum_{i,j} \varphi_i Q_{ij} \varphi_j \pi_i \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} |\varphi_i - \varphi_j|^2 Q_{ij} \pi_i, \end{aligned}$$

où on a utilisé la réversibilité et deux fois l'identité $\sum_j Q_{ij} = 0$, donc $-Q : \ell^2(\pi) \rightarrow \ell^2(\pi)$ est autoadjoint semi défini positif.

Définition 7.10.1. On appelle **trou spectral** de Q la quantité :

$$\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{\varphi \text{ non constante}} \frac{\mathcal{E}(\varphi, \varphi)}{\text{Var}_\pi(\varphi)},$$

$$\text{où } \text{Var}_\pi(\varphi) = \sum_{i \in E} \varphi_i^2 \pi_i - \left(\sum_{i \in E} \varphi_i \pi_i \right)^2.$$

Lemme 7.10.2. Q étant le générateur infinitésimal d'un processus de Markov irréductible à valeurs dans un espace fini E , son trou spectral vérifie

$$\lambda > 0.$$

PREUVE: D'après la formule ci-dessus pour $\mathcal{E}(\varphi, \varphi)$, le quotient

$$\frac{\mathcal{E}(\varphi, \varphi)}{\text{Var}_\pi(\varphi)}$$

reste inchangé si l'on ajoute à φ une constante. On peut donc se contenter de minimiser ce rapport pour φ tel que $\mathbb{E}_\pi(\varphi) = 0$, d'où

$$\lambda = \inf_{\varphi \neq 0; \mathbb{E}_\pi(\varphi) = 0} \frac{\langle \varphi, -Q\varphi \rangle_\pi}{\langle \varphi, \varphi \rangle_\pi},$$

et λ est la plus petite valeur propre de $-Q$, considéré comme opérateur linéaire sur $\ell^2(\pi)$, restreint à l'orthogonal des constantes. Comme Q est autoadjoint semi défini positif, il suffit de montrer que l'espace propre associé à la valeur propre zéro est restreint aux constantes. Si ce n'est pas le cas, $\exists \varphi \neq$ constante t.q.

$$\begin{aligned} \sum_j Q_{ij} \varphi_j &= 0, \quad \forall i \in E, \\ \sum_j \pi_i Q_{ij} \varphi_j &= 0. \end{aligned}$$

Par la relation d'équilibre ponctuel, on a aussi

$$\sum_j \pi_j \varphi_j Q_{ji} = 0, \quad \forall i \in E.$$

Si cette relation est satisfaite, elle l'est aussi avec φ remplacé par $\varphi +$ constante, donc en particulier on peut supposer que $\varphi_i \geq 0, \forall i \in E$.

Comme $\varphi \neq$ constante, on a trouvé une mesure $\{\pi_j \varphi_j, j \in E\}$ non proportionnelle à π , qui est invariante pour la chaîne. Ceci contredit l'irréductibilité. \square

Soit maintenant $\{X_t, t \geq 0\}$ un processus de Markov de générateur infinitésimal Q . Pour tout $t > 0$, on note $\mu(t) = (\mu_i(t); i \in E)$ la loi de X_t . On pose

$$\varepsilon(t) = \sum_{i \in E} \left(\frac{\mu_i(t)}{\pi_i} - 1 \right)^2 \pi_i,$$

et on remarque que $\varepsilon(t) = 0$ ssi $\mu(t) = \pi$.

Lemme 7.10.3. λ désignant le trou spectral de Q ,

$$\varepsilon(t) \leq \varepsilon(0)e^{-\lambda t}.$$

PREUVE: On remarque tout d'abord que

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \sum_i \left(\frac{\mu_i(t)}{\pi_i} - 1 \right)^2 \pi_i \\ &= \sum_i \left(\frac{\mu_i(t)}{\pi_i} \right)^2 \pi_i - 1. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{dt}(t) &= 2 \sum_i \frac{\mu_i(t) \mu_i'(t)}{\pi_i} \\ &= 2 \sum_{i,j} \frac{\mu_i(t) \mu_j(t) Q_{ji}}{\pi_i} \\ &= 2 \sum_{i,j} \frac{\mu_i(t)}{\pi_i} \times \frac{\mu_j(t)}{\pi_j} \times \pi_j Q_{ji} \\ &= 2 \left\langle Q \left(\frac{\mu(t)}{\pi} \right), \frac{\mu(t)}{\mu} \right\rangle_{\pi} \\ &\leq -2\lambda \text{Var}_{\pi} \left(\frac{\mu(t)}{\pi} \right) \\ &= -2\lambda \varepsilon(t). \end{aligned}$$

Soit

$$\frac{d}{dt} \log \varepsilon(t) \leq -2\lambda.$$

□

On a montré que $\mu_t \rightarrow \pi$ à vitesse exponentielle (comparer avec le théorème 2.6.6).

On en arrive maintenant au “recuit”. On va faire dépendre β de t , et le faire tendre vers l’infini (et donc la “température”, son inverse, vers zéro) quand $t \rightarrow \infty$. Plus précisément, Δ étant une constante à déterminer, on choisit

$$\beta(t) = \frac{1}{\Delta} \log(1+t),$$

donc $\beta(0) = 0$ et $\beta(t) \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow \infty$. Bien sûr, la chaîne n’est plus homogène, le générateur infinitésimal Q , le trou spectral λ , la mesure invariante π , et la constante de normalisation Z deviennent des fonctions de t : $Q(t)$, $\lambda(t)$, $\pi(t)$, $Z(t)$. Notons que $\pi(0)$ est la mesure uniforme sur E , $Z(0) = |E|^{-1}$, alors que $\pi(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \pi(t)$ est la mesure uniforme sur les zéros de U (i.e. sur les maxima de U).

Notre but est de montrer le $[M \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{i \in E} (-U_i)]$:

Théorème 7.10.4. *Si $\Delta > M$, $\mu(t) \rightarrow \pi(\infty)$ quand $t \rightarrow \infty$.*

Nous allons tout d’abord montrer le :

Lemme 7.10.5.

$$\lambda(t) \geq \lambda(0) \left(\frac{1}{1+t} \right)^{\frac{M}{\Delta}}.$$

PREUVE: Choisissons φ tel que $\mathbb{E}_{\pi(0)}[\varphi] = 0$. Alors par définition de $\lambda(0)$,

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j} |\varphi_i - \varphi_j|^2 Q_{ij}(0) \pi_i(0) \geq \lambda(0) \sum_i \varphi_i^2 \pi_i(0).$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} Q_{ij}(t) \pi_i(t) &= Q_{ij}(0) \frac{e^{\beta(t) \frac{U_i + U_j}{2}}}{Z(t)} \\ &\geq Q_{ij}(0) \frac{e^{-\beta(t)M} |E|}{Z(t)} \pi_i(0) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_t(\varphi, \varphi) &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} |\varphi_i - \varphi_j|^2 Q_{ij}(t) \pi_i(t) \\
&\geq \frac{e^{-\beta(t)M} |E|}{2Z(t)} \sum_{i,j} |\varphi_i - \varphi_j|^2 Q_{ij}(0) \pi_i(0) \\
&\geq \lambda(0) e^{-\beta(t)M} \sum_i \varphi_i^2 \frac{1}{Z(t)} \\
&\geq \lambda(0) e^{-\beta(t)M} \sum_i \varphi_i^2 \pi_i(t) \\
&\geq \lambda(0) e^{-\beta(t)M} \text{Var}_{\pi(t)}(\varphi).
\end{aligned}$$

Les deux termes extrêmes de cette inégalité étant invariants par addition d'une constante à φ , l'inégalité résultante est vraie sans la restriction que $\mathbb{E}_{\pi(0)}[\varphi] = 0$. Le lemme est établi, puisque

$$e^{-\beta(t)M} = \left(\frac{1}{1+t} \right)^{\frac{M}{\Delta}}.$$

Preuve du théorème : Il suffit de montrer que $\varepsilon(t) \rightarrow 0$, où

$$\varepsilon(t) = \sum_i \left(\frac{\mu_i(t)}{\pi_i(t)} - 1 \right)^2 \pi_i(t)$$

$$\sum_i \frac{\mu_i(t)^2}{\pi_i(t)} - 1$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\varepsilon}{dt}(t) &= \sum_i \frac{d}{dt} \left[\frac{\mu_i(t)^2}{\pi_i(t)} \right] \\
&= \sum_i \pi_i(t)^{-2} \left[2\mu_i(t) \frac{d\mu_i}{dt}(t) \pi_i(t) - \mu_i(t)^2 \frac{d\pi_i}{dt}(t) \right] \\
&= -2\mathcal{E}_t \left(\frac{\mu(t)}{\pi(t)}, \frac{\mu(t)}{\pi(t)} \right) - \beta'(t) \sum_i U_i \frac{\mu_i^2(t)}{\pi_i^2(t)} \pi_i(t) \\
&\quad + \beta'(t) \sum_{i,j} \frac{U_j e^{\beta(t)U_j}}{Z^2(t)} \times \frac{\mu_i^2(t)}{\pi_i^2(t)} e^{\beta(t)U_i} \\
&\leq -2\lambda(t)\varepsilon(t) + \beta'(t)M(\varepsilon(t) + 1) \\
&\leq -(2\lambda(t) - M(\beta'(t)))\varepsilon(t) + M\beta'(t) \\
&\leq - \left(\frac{2\lambda(0)}{(1+t)^{M/\Delta}} - \frac{M}{\Delta(1+t)} \right) \varepsilon(t) + \frac{M}{\Delta(1+t)}
\end{aligned}$$

Comme $\Delta > M$, $(1+t)^{-M/\Delta} \gg (1+t)^{-1}$ quand $t \rightarrow \infty$, il existe $c > 0$ tel que, pour t assez grand :

$$\frac{d\varepsilon}{dt}(t) \leq -c(1+t)^{-M/\Delta}\varepsilon(t) + \frac{M}{\Delta}(1+t)^{-1},$$

et le théorème résulte du

Lemme 7.10.6. Soit $x, b \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$, $a \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$ tels que

- (i) $\int_0^\infty a(t) dt = +\infty$;
- (ii) $b(t) \searrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$;
- (iii) $\frac{dx}{dt}(t) \leq -a(t)(x(t) - b(t))$.

Alors $x(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$.

PREUVE:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(x(t) \exp \left(\int_0^t a(s) ds \right) \right) &= e^{\int_0^t a(s) ds} \left(\frac{dx}{dt}(t) + a(t)x(t) \right) \\
&\leq e^{\int_0^t a(s) ds} a(t)b(t).
\end{aligned}$$

Donc, en intégrant, on obtient :

$$x(t) \leq x(0)e^{-\int_0^t a(s) ds} + \int_0^t e^{-\int_s^t a(r) dr} a(s)b(s) ds.$$

Le second membre de l'inégalité ci-dessus est la solution d'une EDO linéaire, qui majore $x(t)$. Donc il suffit d'établir le résultat pour $x(t)$ solution de l'EDO, c'est à dire que l'on peut supposer que :

$$\frac{dx}{dt}(t) = -a(t)(x(t) - b(t)).$$

On pose $y(t) = x(t) - b(t)$. Il suffit de montrer que $y(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$.

$$\frac{dy}{dt}(t) = -a(t)y(t) - b'(t).$$

Notons que $b'(t) \leq 0$, et $-\int_t^\infty b'(s)ds = b(t) < \infty$. Donc pour $t \geq N$,

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-\int_0^t a(s)ds} y(0) - \int_0^t e^{-\int_s^t a(r)dr} b'(s)ds \\ &\leq e^{-\int_0^N a(s)ds} y(0) + \int_N^\infty |b'(s)|ds + e^{-\int_N^t a(r)dr} \int_0^N e^{-\int_s^N a(r)dr} |b'(s)|ds. \end{aligned}$$

Soit $\delta > 0$ arbitraire. On choisit N assez grand pour que la somme des deux premiers termes du membre de droite soit plus petit que $\frac{\delta}{2}$. En choisissant alors t assez grand, le troisième terme à son tour est plus petit que $\frac{\delta}{2}$. Le lemme est établi.

Remarque 7.10.7. La fonction $\beta(t) = \frac{1}{\Delta} \log(1+t)$ tend trop lentement vers l'infini quand $t \rightarrow \infty$, pour être utilisée en pratique. On peut montrer des résultats plus faibles que $\mu(t) \rightarrow \pi(\infty)$ avec une fonction β qui croît plus vite qu'un logarithme (fonction puissance).

7.11 Exercices

Exercice 7.11.1. Soit $\{T_n, n \geq 1\}$ un processus ponctuel de Poisson d'intensité λ , et $\{Z_n, n \geq 0\}$ une chaîne de Markov indépendante de $\{T_n, n \geq 1\}$ à valeurs dans E , de matrice de transition $P_{ij}, i, j \in E$. On pose

$$X_t = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n \mathbf{1}_{[T_n, T_{n+1}[}(t), \quad t \geq 0.$$

Montrer que $\{X_t, t \geq 0\}$ est un processus markovien de sauts dont on précisera la matrice de transition, le générateur infinitésimal, et la loi de l'instant du premier saut.

Exercice 7.11.2. Soit $\{X_t; t \geq 0\}$ un processus markovien de sauts à valeurs dans l'ensemble fini ou dénombrable E , de générateur infinitésimal $\{Q_{ij}; i, j \in E\}$. On suppose que $\lambda := \sup_i -Q_{ii} < \infty$. Soit $\{N_t; t \geq 0\}$ le processus de comptage des sauts de $\{X_t\}$, et $\{N'_t; t \geq 0\}$ un processus de Poisson d'intensité λ .

Comparer $\mathbb{P}(N_t \geq n)$ et $\mathbb{P}(N'_t \geq n)$, ainsi que $\mathbb{E}[f(N_t)]$ et $\mathbb{E}[f(N'_t)]$, avec f une fonction croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{R} . Montrer que l'exercice 7.11.1 fournit une autre démonstration de ce résultat.

Exercice 7.11.3. On reprend la construction de la section 7.4, et on pose, pour $n \geq 1$:

$$A_n = T_n - T_{n-1}, \quad B_n = 1/q(Z_{n-1}).$$

On rappelle que les deux suites $\{A_n\}$ et $\{B_n\}$ sont indépendantes, la suite $\{A_n\}$ étant i.i.d. de loi commune la loi exponentielle de paramètre 1. Le but de l'exercice est de montrer l'affirmation du cours :

$$(*) \quad \sum_{n \geq 1} A_n B_n = +\infty \text{ p.s.} \Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} B_n = +\infty \text{ p.s.}$$

a Montrer que (*) est une conséquence du fait que pour toute suite $\{b_n, n \geq 1\}$ d'éléments de \mathbb{R}_+^* , (**) $\sum_{n \geq 1} A_n b_n = +\infty \text{ p.s.} \Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} b_n = +\infty$.

Dans la suite, on notera $\Lambda_n = \sum_{i=1}^n A_i b_i$.

b Montrer que si $\sum_{n \geq 1} b_n < \infty$, $\sum_{n \geq 1} A_n b_n < \infty \text{ p.s.}$ (on calculera $\mathbb{E}(\Lambda_\infty)$).

c Montrer que si la suite $\{b_n\}$ n'est pas bornée, $\Lambda_\infty = +\infty \text{ p.s.}$

d On suppose que $\sup_n b_n < \infty$, et $\sum_{n \geq 1} b_n = +\infty$.

Montrer que $(\mathbb{E}\Lambda_n)^{-2} \text{Var}\Lambda_n \rightarrow 0$, quand $n \rightarrow \infty$.

En déduire que quelque soit M , pour n assez grand,

$$\mathbb{P}(\Lambda_n \leq M) \leq \mathbb{P}(|\Lambda_n - \mathbb{E}\Lambda_n| \geq 2^{-1}\mathbb{E}\Lambda_n),$$

et que $\Lambda_\infty = +\infty \text{ p.s.}$

e Conclure que (*) est vraie.

Exercice 7.11.4. Soit $\{N_t, t \geq 0\}$ et $\{P_t, t \geq 0\}$ deux processus de Poisson indépendants, d'intensité respective λ et μ .

a Montrer que $\{X_t, t \geq 0\}$ défini par

$$X_t = N_t - P_t$$

est un processus markovien de sauts irréductible à valeurs dans \mathbf{Z} , dont on précisera le générateur infinitésimal.

b On suppose $\lambda \neq \mu$. Montrer que $\{X_t/t\}$ et $\{X_t\}$ convergent p.s. dans $\bar{\mathbb{R}}$ quand $t \rightarrow \infty$. Préciser la limite de $\{X_t\}$ suivant le signe de $\lambda - \mu$. Montrer que $\{X_t\}$ est transitoire.

c On suppose que $\lambda = \mu$. Préciser la loi de la chaîne incluse. Dédurre des exercices 2.10.4 et 2.10.6 que $\{X_t\}$ est récurrent nul.

Exercice 7.11.5. Soit $\{X_t\}$ un processus markovien de sauts de générateur infinitésimal Q . On note $q_i = -Q_{ii}$, $i \in E$. Montrer que si π est une probabilité invariante de $\{X_t\}$, alors la mesure $\hat{\pi}$ définie par

$$\hat{\pi}_i = q_i \pi_i, \quad i \in E$$

est une mesure invariante de la chaîne incluse.

Exercice 7.11.6. a Soit $\{X_t, t \geq 0\}$ un processus markovien de sauts à valeurs dans E , de générateur infinitésimal $\{Q_{ij}; i, j \in E\}$. Soit F une partie de E . On définit

$$T_F := \begin{cases} \inf\{t; X_t \in F\}, & \text{si un tel } t \text{ existe;} \\ \infty, & \text{sinon,} \end{cases}$$

la fonction $u : E \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$u(i) = \mathbb{E}[h(X_{T_F}) \mathbf{1}_{\{T_F < \infty\}} | X_0 = i],$$

où h est une application bornée de F dans \mathbb{R} , et la fonction $v : E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ par

$$v(x) := \mathbb{E}[T_F | X_0 = x].$$

Montrer que T_F est un temps d'arrêt.

Montrer que u et v vérifient respectivement les équations :

$$\begin{aligned} Qu(i) &= 0, & i \in E \setminus F \\ u(i) &= h(i), & i \in F; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Qv(i) + 1 &= 0, & i \in E \setminus F \\ v(i) &= 0, & i \in F; \end{aligned}$$

(on introduira le conditionnement par $(T_1, X(T_1))$).

- b** On considère maintenant le cas d'un processus de naissance et de mort sur $E = \mathbf{Z}$, i.e. le générateur infinitésimal Q satisfaisant $Q_{i,i+1} = \alpha(i)$, $Q_{i,i-1} = \beta(i)$, $Q_{i,i} = -\alpha(i) - \beta(i)$, dans le cas particulier $\alpha(i) = \alpha$, $\beta(i) = \beta$, $i \in \mathbf{Z}$ ($\alpha, \beta > 0$). On pose $F = \{1, 2, \dots, N-1\}^c$, où N est un entier positif. Calculer $u(x) = \mathbb{E}[X_{T_F} | X_0 = i]$, $i \in \mathbf{Z}$. Montrer que T_F est p.s. fini. Déterminer la loi conditionnelle de la v.a. X_{T_F} , sachant que $X_0 = i$.

Exercice 7.11.7. Etant donné un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ muni d'une filtration $\{\mathcal{F}_t\}$ (i.e. une collection croissante indexée par $t \in \mathbb{R}_+$ de sous-tribus de \mathcal{A}), on appelle **martingale** (par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}$) un processus stochastique $\{M_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ qui vérifie :

$$M_t \text{ est intégrable, } \forall t \geq 0; \mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s, \forall 0 \leq s \leq t.$$

- a** Soit $\{M_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ une martingale continue à droite et S un temps d'arrêt borné par une constante t . Montrer que $\mathbb{E}[M_S] = \mathbb{E}[M_t] = \mathbb{E}[M_0]$.
- b** Soit $\{X_t, t \geq 0\}$ un processus markovien de sauts à valeurs dans E , de générateur infinitésimal $\{Q_{ij}; i, j \in E\}$, et f une application bornée de E dans \mathbb{R} . Montrer que $\{M_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ définie par

$$M_t = f(X_t) - \int_0^t Qf(X_s) ds$$

est une martingale par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t^X\}$;

- c** On reprend les notations de la deuxième partie de l'exercice précédent. Calculer $\mathbb{E}(T_F | X_0 = i)$ (pour le cas $\alpha \neq \beta$, on utilisera les résultats des deux questions précédentes avec la fonction $f(i) = i$ et le temps d'arrêt $S = \inf(T_F, t)$, puis on fera tendre t vers l'infini; pour le cas $\alpha = \beta$, on fera le même calcul, avec $f(i) = i^2$). On admettra que le résultat de la question **b** s'applique à ces deux fonctions, bien qu'elles ne soient pas bornées.

Chapitre 8

Processus de renouvellement et processus semi-markoviens

Chapitre 9

Files d'attente et réseaux

Les processus markoviens de saut servent à modéliser les files d'attente. Celles-ci ont d'abord été étudiées pour les besoins du téléphone, puis pour ceux de la recherche opérationnelle. On est passé ensuite à l'étude des réseaux de files d'attente, lesquels servent à évaluer les performances des systèmes informatiques, et aussi des systèmes de production.

Le modèle mathématique de base des files d'attente est le suivant. Des clients arrivent suivant un certain processus. Quand un client arrive, si un guichet est libre il se présente à celui-ci et commande à être servi. Sinon il se met en attente, et sera servi lorsqu'un guichet sera libre (et que les clients arrivés avant lui auront été servis - à moins qu'un système de priorités plus complexe ne soit mis en place). Les temps de service suivent une certaine loi (qui dans certains modèles plus complexes que ceux que nous allons considérer pourrait dépendre du type de client). Nous supposerons implicitement que la "salle d'attente" est de capacité infinie, et qu'aucun client n'est rejeté, sauf mention explicite du contraire.

Pour nous, la file d'attente sera caractérisée par la loi des arrivées, la loi des temps de service et le nombre de guichets disponibles. On supposera toujours les temps de service i.i.d. et indépendants du processus des arrivées.

9.1 File d'attente M/M/1

M comme "sans mémoire" ou "markovien". 1 est le nombre de guichets. On suppose que le processus des arrivées est un processus de Poisson d'intensité λ , et que les temps de service sont i.i.d. de loi commune la loi expo-

entielle (μ). Le nombre de clients présents dans le système (au guichet + en attente) est alors un processus markovien de saut à valeurs dans \mathbb{N} , et générateur infinitésimal Q donné par :

$$Q_{i,i+1} = \lambda, \quad i \in \mathbb{N}; \quad Q_{i,i-1} = \mu, \quad i \geq 1; \quad Q_{ij} = 0 \text{ si } |i - j| \geq 2;$$

et donc

$$Q_{00} = -\lambda, \quad Q_{ii} = -(\lambda + \mu), \quad i \geq 1.$$

En effet, fixons $t \geq 0$ et $i \geq 1$. Si on note $\{N_s\}$ le processus des arrivées, et S le temps d'attente à partir de t pour que le service en cours à l'instant t se termine, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{t+h} = i + 1 / X_t = i) &= \mathbb{P}(N_{t+h} - N_t = 1, S > h) + o(h) \\ &= e^{-\lambda h} \lambda h e^{-\mu h} + o(h), \end{aligned}$$

$$h^{-1} P_{i,i+1}(h) \rightarrow \lambda, \quad h \rightarrow 0.$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{t+h} = i - 1 / X_t = i) &= \mathbb{P}(N_{t+h} - N_t = 0, S \leq h) + o(h) \\ &= e^{-\lambda h} (1 - e^{-\mu h}) + o(h), \end{aligned}$$

$$h^{-1} P_{i,i-1}(h) \rightarrow \mu, \quad h \rightarrow 0.$$

On a utilisé l'indépendance du processus des arrivées et du temps de service. Si on conditionnait en outre par des valeurs passées de $\{X_s\}$ avant t , le résultat ne serait pas affecté, à cause du caractère markovien de $\{N_s\}$ et du caractère exponentiel de la loi de S (cf. exercice 6.5.1).

En outre, par le même raisonnement, pour $|j - i| \geq 2$,

$$\mathbb{P}(X_{t+h} = j / X_t = i) = o(h).$$

La file d'attente $M/M/1$ est un "processus de naissance et de mort" en temps continu, irréductible sur \mathbb{N} . Si $\lambda > \mu$, le nombre moyen d'arrivées par unité de temps est supérieur au nombre moyen de départs par unité de temps, et $X_t \rightarrow +\infty$ p.s. Le processus est transient.

Dans le cas $\lambda = \mu$, le processus est récurrent nul. Dans le cas $\lambda < \mu$, le processus est récurrent positif. Sa probabilité invariante est donnée par :

$$\pi_i = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i.$$

Pour la justification de ces affirmations, voir l'exercice 9.13.1 ci-dessous. A l'équilibre, le nombre moyen de clients présents dans le système est :

$$\mathbb{E}_\pi(X_t) = \sum_{i=1}^{\infty} i\pi_i = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}.$$

L'espérance du temps de retour en 0 est :

$$\mathbb{E}_0(R_0) = \frac{1}{q_0\pi_0} = \frac{\mu}{\lambda(\mu - \lambda)}$$

Le temps moyen entre deux périodes où le guichet est vide vaut

$$\mathbb{E}_0(R_0) - \frac{1}{q_0} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

Calculons le temps moyen passé par un client dans le système. Conditionnellement au fait de trouver i clients devant lui en arrivant, le temps moyen passé par un client est $(i + 1)/\mu$. Donc le temps moyen est :

$$\mathbb{E}_\pi(X_t + 1)/\mu = \frac{1}{\mu - \lambda}.$$

L'argument ci-dessus, qui peut sembler contradictoire (pourquoi l'état de la file au moment d'une arrivée est-il le même que celui de la file à un instant arbitraire ?), est correct asymptotiquement, au sens où la loi du nombre de clients que le n -ième arrivé trouve devant lui converge vers la probabilité invariante de X_t , quand $n \rightarrow \infty$, cf. l'exercice 9.13.2 ci-dessous. En outre, c'est une conséquence du Théorème qui suit, où $\{X_t\}$ désigne le nombre de clients présents dans une file d'attente non nécessairement de type M/M/1. Formulons trois hypothèses, qui sont en particulier vérifiées dans le cas markovien récurrent positif :

$$t^{-1} \int_0^t X(s) ds \rightarrow \bar{X} \text{ p.s., quand } t \rightarrow \infty, \quad (\text{H1})$$

où \bar{X} est une constante,

$$\exists \text{ une suite aléatoire } t_n \rightarrow \infty, \text{ quand } n \rightarrow \infty \text{ t. q. } X_{t_n} = 0, \quad (\text{H2})$$

et on suppose en outre que les durées de séjour de tous les clients sont finies, et que si D_n désigne la durée du séjour du n -ième client arrivé après l'instant 0, il existe une constante \bar{D} telle que

$$\bar{D} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n D_k. \quad (\text{H3})$$

Théorème 9.1.1. (*Formule de Little*) *On considère un système de service tel que le nombre moyen d'arrivées par unité de temps soit égal à λ , et qui vérifie les hypothèses (H1), (H2) et (H3) ci-dessus. Alors*

$$\bar{X} = \lambda \bar{D}.$$

PREUVE: Désignons par $N(t)$ le nombre de clients arrivés avant t , et $\{t_n, n \in \mathbb{N}\}$ une suite telle que $X_{t_n} = 0, \forall n$ et $t_n \rightarrow \infty$, quand $n \rightarrow \infty$. Alors il n'est pas difficile de vérifier que si $X_0 = 0$:

$$\sum_{k=1}^{N(t_n)} D_k = \int_0^{t_n} X_s ds.$$

Donc

$$\frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} X_s ds = \frac{N(t_n)}{t_n} \times \frac{1}{N(t_n)} \sum_1^{N(t_n)} D_k.$$

Il reste à faire tendre $n \rightarrow \infty$, en utilisant les hypothèses. Le cas $X_0 \neq 0$ s'en déduit puisque les durées de séjour des clients présents à l'instant 0 sont finies. \square

Notons que la formule de Little est très intuitive.

9.2 File d'attente M/M/1/K

En pratique, on ne peut pas en général avoir un nombre arbitraire de clients en attente. Dans le modèle $M/M/1/K$, les arrivées sont poissonniennes d'intensité λ , les temps de service de loi exponentielle de paramètre μ , il y a un serveur, et la "salle d'attente" contient au plus K clients (dont celui en train de se faire servir). Ceci signifie que tout client qui arrive quand la salle d'attente est pleine est rejeté.

Le nombre de clients présents dans le système est alors un processus markovien de saut à valeurs dans $\{0, 1, 2, \dots, K\}$. Son générateur infinitésimal est donné par

$$\begin{aligned} Q_{i,i+1} &= \lambda, \quad 0 \leq i \leq K-1; \quad Q_{i,i-1} = \mu, \quad 1 \leq i \leq K; \\ Q_{ij} &= 0 \text{ si } |i-j| > 2. \text{ Donc en outre} \\ Q_{00} &= -\lambda, \quad Q_{ii} = -(\lambda + \mu), \quad 1 \leq i \leq K-1; \quad Q_{KK} = -\mu. \end{aligned}$$

Ce processus de Markov est irréductible, à valeurs dans un ensemble fini, donc récurrent positif. Sa probabilité invariante π se calcule aisément.

On trouve $\pi_i = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \frac{1 - \lambda/\mu}{1 - (\lambda/\mu)^{K+1}}$, $0 \leq i \leq K$, dans le cas $\lambda \neq \mu$. Dans

le cas $\lambda = \mu$, on a $\pi_i = \frac{1}{K+1}$.

La probabilité qu'un client arrivant soit rejeté est égale à la proportion du temps où la file est pleine, soit $\pi_K = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^K \frac{1 - \frac{\lambda}{\mu}}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{K+1}}$ si $\lambda \neq \mu$,

$\pi_K = \frac{1}{K+1}$ si $\lambda = \mu$.

9.3 File d'attente M/M/s

On revient au cas d'une "salle d'attente" de capacité infinie, mais on suppose maintenant qu'il y a s guichets ("serveurs") disponibles. Les temps de service aux différents guichets sont bien sûr mutuellement indépendants. Il n'est pas difficile de voir que :

$$Q_{01} = \lambda, \quad Q_{0i} = 0, \quad i > 1;$$

pour $1 \leq i \leq s$,

$$Q_{i,i+1} = \lambda, \quad Q_{i,i-1} = i\mu, \quad Q_{ij} = 0, \quad |i-j| > 1;$$

pour $i \geq s$,

$$Q_{i,i+1} = \lambda, \quad Q_{i,i-1} = s\mu, \quad Q_{ij} = 0, \quad |i-j| > 1.$$

Le seul calcul nouveau à faire est le suivant : si S_1, \dots, S_i sont i.i.d. exponentielles (μ),

$$\mathbb{P}(S_1 \wedge \dots \wedge S_i > h) = (e^{-\mu h})^i.$$

Donc la probabilité qu'il y ait au moins un départ dans un intervalle de temps de longueur h , lorsque i guichets sont occupés, est

$$1 - e^{-i\mu h},$$

et

$$\frac{1 - e^{-i\mu h}}{h} \rightarrow i\mu.$$

En outre, la probabilité qu'il y ait au moins deux départs pendant un intervalle de temps de longueur h est un $o(h)$.

$\{X_t\}$ est récurrent positif si $\lambda < \mu s$. Dans ce cas, on peut chercher une probabilité invariante en cherchant une solution de l'équation d'équilibre ponctuel :

$$\pi_i Q_{i,i+1} = \pi_{i+1} Q_{i+1,i}.$$

On trouve que

$$\pi_i / \pi_0 = \begin{cases} (\lambda/\mu)^i / i!, & \text{si } 0 \leq i \leq s; \\ (\lambda/\mu)^i / s^{i-s} s!, & \text{si } i > s. \end{cases}$$

Les deux cas qui conduisent à une formule simple sont le cas $s = 1$ (déjà traité, loi géométrique) et le cas $s = \infty$, auquel cas $\pi_0 = e^{-\lambda/\mu}$, et

$$\pi_i = e^{-\lambda/\mu} (\lambda/\mu)^i / i!,$$

i.e. la probabilité invariante est la loi de Poisson (λ/μ) .

On a le **Théorème de Burke** : si $\lambda < s\mu$, à l'équilibre le processus des départs est un processus de Poisson d'intensité λ . En effet, $\{X_t\}$ est réversible par rapport à π . Donc "à l'équilibre" (i.e. sous \mathbb{P}_π), $\{X_{T-t}; 0 \leq t \leq T\}$ a même loi de $\{X_t, 0 \leq t \leq T\}$, et les départs de $\{X_t\}$ sont les arrivées de $\{X_{T-t}\}$.

Calculons maintenant la probabilité qu'un client arrive alors que tous les serveurs sont occupés (et donc qu'il soit mis en attente avant d'être servi). Celle-ci est égale à la proportion du temps pendant laquelle tous les serveurs sont occupés, donc à

$$\begin{aligned} \sum_{i=s}^{\infty} \pi_i &= \pi_0 \frac{s^s}{s!} \sum_{i=s}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu s} \right)^i \\ &= \pi_0 \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \times \frac{\mu s}{\mu s - \lambda}, \end{aligned}$$

avec

$$\pi_0 = \left[\sum_{i=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^i}{i!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \times \frac{\mu s}{\mu s - \lambda} \right]^{-1}.$$

La formule que nous venons d'obtenir fait partie des formules d'Erlang.

Enfin, posons nous la question de savoir ce qui est le plus efficace, du point de vue de l'utilisateur, pour faire face à des arrivées poissonniennes d'intensité 2λ : deux serveurs en parallèle, avec temps de service de loi exponentielle de paramètre μ (solution 1), ou bien un seul serveur, avec temps de service de loi exponentielle de paramètre 2μ (solution 2) ($\lambda < \mu$) ?

Calculons les temps de séjour moyen des clients dans le système, dans les deux cas. Dans la première solution, à l'équilibre la loi du nombre de clients est donnée par $\pi_0 = \frac{1 - \lambda/\mu}{1 + \lambda/\mu}$; $\pi_i = 2 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \frac{1 - \lambda/\mu}{1 + \lambda/\mu}$, $i \geq 1$.

Donc le nombre moyen de clients présents dans le système vaut

$$\begin{aligned} \bar{X}_1 &= 2 \frac{1 - \lambda/\mu}{1 + \lambda/\mu} \sum_{i=1}^{\infty} i \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \\ &= \frac{2\lambda/\mu}{(1 - \lambda/\mu)(1 + \lambda/\mu)} \end{aligned}$$

Donc d'après la formule de Little la durée moyenne de séjour est

$$\bar{D} = \frac{\bar{X}_1}{2\lambda} = \frac{1}{(\mu - \lambda)(1 + \lambda/\mu)}$$

Dans la seconde solution,

$$\bar{D}_2 = \frac{1}{(\mu - \lambda)2}$$

Mais $1 + \lambda/\mu < 2$, donc $\bar{D}_2 < \bar{D}_1$, et la solution d'un seul serveur, avec temps de service de loi $\exp(2\mu)$, est la solution préférable.

9.4 File d'attente M/M/s/s : Central téléphonique

On considère la file $M/M/s$, mais cette fois sans salle d'attente, i.e. tout client arrivant alors que les s guichets sont occupés est rejeté.

Le nombre X_t de clients dans le système à l'instant t constitue un processus de Markov à valeurs dans $\{0, 1, \dots, s\}$, avec le générateur infinitésimal :

$$Q_{01} = \lambda, \quad Q_{0i} = 0, \quad i > 1;$$

si $0 < i < s$,

$$Q_{i,i+1} = \lambda, \quad Q_{i,i-1} = i\mu, \quad Q_{ij} = 0, \quad |i - j| > 1;$$

$$Q_{s,s-1} = s\mu, \quad Q_{sj} = 0, \quad j \neq s, j \neq s - 1.$$

La probabilité invariante est la “loi de Poisson tronquée” :

$$\pi_i = \frac{(\lambda/\mu)^i}{i!} / \sum_{j=0}^s \frac{(\lambda/\mu)^j}{j!}, \quad 0 \leq i \leq s.$$

Par le théorème ergodique, la proportion de temps pendant laquelle le système est plein, qui est aussi la proportion d'appels perdus, est

$$\pi_s = \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} / \sum_{j=0}^s \frac{(\lambda/\mu)^j}{j!},$$

expression qui a reçu le nom de “formule d'Erlang”.

9.5 Atelier de réparation

Une usine fait fonctionner s machines. Chacune d'elles tombe en panne au taux λ (l'instant de panne est une v.a. de loi exponentielle de paramètre λ). L'usine est équipée d'un atelier de réparation. Les temps de réparation sont exponentiels de paramètre μ .

Désignons par X_t le nombre de machines en état de marche à l'instant t à valeurs dans $E = \{0, 1, \dots, s\}$. $\{X_t\}$ est un processus markovien de saut. Son générateur infinitésimal est le même que celui de la file $M/M/s/s$, mais avec λ et μ intervertis ! Donc la probabilité invariante de ce processus est

$$\pi_i = \frac{(\mu/\lambda)^i}{i!} / \sum_{j=0}^s \frac{(\mu/\lambda)^j}{j!}, \quad 0 \leq i \leq s.$$

Le taux de panne global est

$$\begin{aligned}\lambda_g &= \sum_{i=1}^s \lambda_i \pi_i \\ &= \mu \sum_{i=0}^{s-1} \frac{(\mu/\lambda)^i}{i!} / \sum_{j=0}^s \frac{(\mu/\lambda)^j}{j!}\end{aligned}$$

Le nombre moyen de machines réparées par unité de temps vaut

$$\begin{aligned}n_r &= \mu(1 - \pi_s) \\ &= \lambda_b\end{aligned}$$

9.6 Files d'attente en série

Supposons que les clients demandent deux services : ils font d'abord la queue au guichet A, puis au guichet B, dont les deux temps de service sont indépendants, le temps de service de A suivant une exponentielle (α), et celui de B une loi exponentielle (β).

Quelle est la longueur moyenne de la file au guichet B? Notons $\{X_t\}$ le nombre de clients (en service ou en attente) au guichet A, $\{Y_t\}$ le nombre de clients au guichet B.

Les arrivées au guichet A sont supposées former un processus de Poisson d'intensité λ . Si $\lambda > \alpha$, $X_t \rightarrow \infty$, on peut admettre qu'il y a toujours des clients en A, et ils sortent suivant un processus de Poisson d'intensité α . Si $\lambda < \alpha$, d'après le théorème de Burke les départs de A forment un processus de Poisson d'intensité λ . Il est donc naturel de prétendre que le processus des arrivées en B est un processus de Poisson d'intensité $\lambda \wedge \alpha$. Donc $\{Y_t\}$ est récurrent positif ssi $\lambda \wedge \alpha < \beta$, et dans ce cas la longueur moyenne de la file en B est $\frac{\alpha \wedge \lambda}{\beta - \alpha \wedge \lambda}$. Les deux files sont récurrentes positives si $\lambda < \alpha \wedge \beta$. Dans ce cas, à l'équilibre, le temps moyen passé par un client dans le système A+B est

$$\frac{1}{\alpha - \lambda} + \frac{1}{\beta - \lambda}.$$

9.7 File d'attente M/G/∞

Les arrivées forment encore un processus de Poisson d'intensité λ . Les temps de service sont i.i.d., de loi commune "générale", de fonction de répartition $F(t) = \mathbb{P}(T \leq t)$. Il y a une infinité de serveurs, ce qui simplifie énormément l'analyse, en évitant toute interaction entre les clients.

Le nombre de clients arrivés avant t suit une loi de Poisson de paramètre λt . Conditionnons par $N_t = n$. Si l'on énumère les n clients arrivés de façon aléatoire, alors les temps d'arrivée A_1, \dots, A_n de ces clients sont i.i.d. de loi uniforme sur $[0, t]$ (cf. exercice 6.5.4).

Pour chacun de ces clients, le service n'est pas terminé avec probabilité

$$p = \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{P}(T > s) ds = \frac{1}{t} \int_0^t (1 - F(s)) ds.$$

Donc la loi conditionnelle de X_t , sachant que $N_t = n$, est la loi binomiale (n, p) . Finalement

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_t = k) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_t = k / N_t = n) \mathbb{P}(N_t = n) \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} C_k^n p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda t} (\lambda t)^n / n! \\ &= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda p t)^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p)t)^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= e^{-\lambda p t} (\lambda p t)^k / k! \end{aligned}$$

Donc la loi de X_t est la loi de Poisson de paramètre $\lambda \int_0^t (1 - F(s)) ds$. Notons que

$$\int_0^{\infty} (1 - F(s)) ds = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(T > s) ds = \mathbb{E}(T).$$

Si $\mathbb{E}(T) < \infty$, la file a comme loi limite, la loi de Poisson $(\lambda \mathbb{E}(T))$.

9.8 File d'attente M/G/1

Les arrivées forment encore un processus de Poisson d'intensité λ . Les temps de service sont i.i.d., de loi commune "générale" (mais supposée absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue), de fonction de

répartition $F(t) = \mathbb{P}(S \leq t)$. On note $\bar{F}(t) = 1 - F(t)$, que l'on suppose strictement positif pour tout $t > 0$, et $\mu(t) = \bar{F}(t)^{-1}f(t)$, où $f(t) = \frac{d}{dt}F(t)$ est la densité de la loi de S . Il y a un seul serveur. On suppose satisfaire la condition suivante qui assure le caractère récurrent positif de la file

$$\lambda \mathbb{E}(S) < 1.$$

On note comme précédemment X_t le nombre de clients dans la file (i.e. en train de se faire servir ou en attente) à l'instant t . Du fait que la loi des temps de service n'est pas exponentielle, le processus $\{X_t, t \geq 0\}$ n'est pas markovien. Cependant, comme dans le cas des processus semi-markoviens de la section 7.8, X_t est une composante d'un processus de Markov. Désignons par Z_t le temps écoulé depuis le début du service en cours à l'instant t . $Z_t = 0$ si aucun service n'est en cours à l'instant t . Notons que Z_t est une fonction de la trajectoire passée de $\{X\}$. C'est le temps écoulé depuis le dernier instant de saut négatif de X , si celui-ci a abouti à une valeur ≥ 1 , sinon c'est le temps écoulé depuis la dernière arrivée alors que la file était vide. Il n'est pas très difficile de montrer la

Proposition 9.8.1. *Le couple $\{(X_t, Z_t), t \geq 0\}$ est un processus de Markov homogène irréductible à valeurs dans $\mathbb{N} \times \mathbb{R}_+$.*

Nous allons maintenant identifier le générateur infinitésimal de ce processus de Markov, puis exhiber une solution de l'équation de Fokker-Planck stationnaire associée. On va préciser l'action du générateur infinitésimal Q sur les fonctions de l'espace $C^1(E \times \mathbb{R}_+)$ des fonctions $\varphi : E \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tout $i \in E$, $s \rightarrow \varphi(i, s)$ est de classe C^1 . Soit $h > 0$ destiné à tendre vers 0, $t > 0$. On note $N_{t,t+h}$ l'événement "il n'y a ni arrivée ni départ entre t et $t+h$ ", $A_{t,t+h}$ l'événement "il y a une arrivée et pas de départ entre t et $t+h$ ", $D_{t,t+h}$ l'événement "il y a un départ et pas d'arrivée entre t et $t+h$ ".

Si $i \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [\varphi(X_{t+h}, Z_{t+h}) | X_t = i, Z_t = s] &= \mathbb{E} [\varphi(X_{t+h}, Z_{t+h}); N_{t,t+h} | X_t = i, Z_t = s] \\
&+ \mathbb{E} [\varphi(X_{t+h}, Z_{t+h}); A_{t,t+h} | X_t = i, Z_t = s] \\
&+ \mathbb{E} [\varphi(X_{t+h}, Z_{t+h}); D_{t,t+h} | X_t = i, Z_t = s] + o(h) \\
&+ \int_s^{s+h} \varphi(i-1, r) \mu(r) dr + o(h) \\
&= \varphi(i, s+h) e^{-\lambda h} \frac{\bar{F}(s+h)}{\bar{F}(s)} + \varphi(i+1, s+h) \lambda h e^{-\lambda h} \frac{\bar{F}(s+h)}{\bar{F}(s)} \\
&+ \int_s^{s+h} \varphi(i-1, r) \mu(r) dr + o(h)
\end{aligned}$$

On en déduit par un calcul élémentaire que si $i \geq 1$,

$$\begin{aligned}
(Q\varphi)(i, s) &= \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} [\mathbb{E} [\varphi(X_{t+h}, Z_{t+h}) | X_t = i, Z_t = s] - \varphi(i, s)] \\
&= \frac{\partial \varphi}{\partial s}(i, s) + \lambda [\varphi(i+1, s) - \varphi(i, s)] + \mu(s) [\varphi(i-1, 0) - \varphi(i, s)].
\end{aligned}$$

D'un autre coté,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [\varphi(X_{t+h}, Z_{t+h}) | X_t = 0, Z_t = 0] &= \mathbb{E} [\varphi(X_{t+h}, Z_{t+h}); N_{t,t+h} | X_t = 0, Z_t = 0] \\
&+ \mathbb{E} [\varphi(X_{t+h}, Z_{t+h}); A_{t,t+h} | X_t = 0, Z_t = 0] + o(h) \\
&= \varphi(0, 0) e^{-\lambda h} + \int_t^{t+h} \varphi(1, t+h-r) \lambda e^{\lambda(r-t)} dr + o(h).
\end{aligned}$$

D'où

$$(Q\varphi)(0, 0) = \lambda [\varphi(1, 0) - \varphi(0, 0)].$$

On peut maintenant établir la

Proposition 9.8.2. *L'unique solution de l'équation de Fokker–Planck stationnaire associée au générateur Q peut être décrite comme la loi d'un couple aléatoire (X, Z) à valeurs dans $E \times \mathbb{R}_+$, où*

$$\mathbb{P}(X = 0) = \pi(0) = 1 - \lambda \mathbb{E}(S),$$

et si $\varphi \in C(E \times \mathbb{R}_+)$,

$$\mathbb{E} [\varphi(X, Z); X \geq 1] = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \varphi(i, s) \pi(i, s) ds,$$

où la fonction $\pi(i, s)$ est caractérisée par la donnée de sa “fonction génératrice en i ” $G(r, s) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} r^i \pi(i, s)$, $|r| \leq 1$:

$$G(r, s) = \frac{\lambda r(1-r)(1-\lambda \mathbb{E}(S))}{\mathbb{E}(e^{-\lambda(1-r)S}) - r} \exp\left(-\lambda(1-r)s - \int_0^s \mu(s') ds'\right).$$

PREUVE: Le fait qu’une loi de la forme de l’énoncé satisfasse l’équation de Fokker–Planck stationnaire signifie que pour tout $\varphi \in C^1(E \times \mathbb{R}_+)$,

$$(Q\varphi)(0, 0)\pi(0) + \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^{\infty} (Q\varphi)(i, s)\pi(i, s)ds = 0.$$

Ceci est vrai dès que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial s}(1, s) + (\lambda + \mu(s))\pi(1, s) &= 0, \\ \frac{\partial \pi}{\partial s}(i, s) + (\lambda + \mu(s))\pi(i, s) &= \lambda\pi(i-1, s), \quad i \geq 2, \end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned} \lambda\pi(0) &= \int_0^{\infty} \mu(s)\pi(1, s)ds, \\ \pi(1, 0) &= \int_0^{\infty} \mu(s)\pi(2, s)ds + \lambda\pi(0), \\ \pi(i, 0) &= \int_0^{\infty} \mu(s)\pi(i+1, s)ds, \quad i \geq 2. \end{aligned}$$

La résultat annoncé se déduit de ces formules par un calcul assez élémentaire. \square

Admettons que les résultats du Théorème 7.6.1 s’appliquent au processus $\{(X_t, Z_t), t \geq 0\}$. En intégrant par rapport à s , on obtient la fonction génératrice de la loi limite de X_t , quand $t \rightarrow \infty$, qui est

$$1 - \lambda \mathbb{E}(S) + \int_0^{\infty} G(r, s) = \frac{(1-s)(1-\lambda \mathbb{E}(S))\mathbb{E}(e^{-\lambda(1-r)S})}{\mathbb{E}(e^{-\lambda(1-r)S}) - s}.$$

9.9 Réseau de Jackson ouvert

On considère un réseau constitué de N stations interconnectées. Chaque station p ($1 \leq p \leq N$) doit traiter les clients qui arrivent de l’extérieur, ainsi que ceux qui lui sont envoyés par les autres stations.

Dans le modèle de Jackson, les arrivées exogènes à la station p forment un processus de Poisson d'intensité λ_p^0 . Chaque station est une file d'attente. Le taux avec lequel les clients quittent la station p est $\mu_p(n)$, si n clients sont à la station p . Par exemple

$$\mu_p(n) = \begin{cases} \mu_p \mathbf{1}_{\{n>0\}}, & \text{dans le cas d'un serveur } M/M/1; \\ n \wedge s_p \mu_p, & \text{dans le cas de } s \text{ guichets : file } M/M/s. \end{cases}$$

Un client quittant la station p se dirige vers la station q avec la probabilité r_{pq} ($1 \leq q \leq N$), et quitte le réseau avec la probabilité r_{p0} . On suppose pour simplifier que $r_{pp} = 0$, $1 \leq p \leq N$; cette hypothèse peut être levée sans difficulté.

Le processus $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^N)$ des nombres de clients présents aux stations $1, \dots, N$ à l'instant t est un processus markovien de sauts à valeurs dans l'espace $E = \mathbb{N}_+^N$.

On note $e_p = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ le vecteur dont seule la p -ième coordonnée est non nulle et vaut 1.

Les seuls termes hors diagonaux non nuls du générateur infinitésimal du processus $\{X_t\}$ sont donnés par

$$\begin{cases} Q_{i, i+e_p} = \lambda_p^0, & i \in E, \quad 1 \leq p \leq N; \\ Q_{i+e_p, i} = \mu_p(i_p + 1)r_{p0}, & i \in E \quad 1 \leq p \leq N; \\ Q_{i+e_p, i+e_q} = \mu_p(i_p + 1)r_{pq}, & 1 \leq p \neq q \leq N, \quad i \in E. \end{cases}$$

On dit que le réseau est "sans capture" si pour tout $p \in \{1, \dots, N\}$, $\exists n \geq 0$, $p_1, \dots, p_n \in \{1, \dots, N\}$ tels que

$$r_{pp_1} r_{p_1 p_2} \cdots r_{p_{n-1} p_n} r_{p_n 0} > 0 \quad (9.1)$$

On considère l'équation

$$\lambda_p^0 + \sum_{q \neq p} \lambda_q r_{qp} = \lambda_p, \quad 1 \leq p \leq N; \quad (9.2)$$

d'inconnues λ_p , $1 \leq p \leq N$.

Lemme 9.9.1. *Sous l'hypothèse (9.1), l'équation (9.2) a une unique solution positive et finie.*

PREUVE: Soit R la matrice $N \times N$, de coordonnés $R_{pq} = r_{pq}$. L'équation 9.2 s'écrit sous forme vectorielle

$$\lambda(I - R) = \lambda^0,$$

qui a la solution unique finie

$$\lambda^0 = \lambda K,$$

avec $K = \sum_0^{\infty} R^n$, à condition que cette série converge dans $\mathbb{R}^{N \times N}$.

Considérons la matrice markovienne

$$P = \begin{pmatrix} r_{10} & & & \\ r_{20} & & R & \\ r_{N0} & & & \\ 1 & 0 \cdots 0 & & \end{pmatrix}$$

L'hypothèse (9.1) entraîne que les états $1, 2, \dots, N$ sont transitoires pour la chaîne à valeurs dans $\{0, 1, 2, \dots, N\}$ de matrice de transition P , donc d'après l'exercice 2.4.6.

$$\sum_0^{\infty} (P^n)_{ij} < \infty, \quad 1 \leq i, j \leq N.$$

Mais $(P^n)_{ij} = (R^n)_{ij}$, $1 \leq i, j \leq N$, d'où le résultat.

On peut maintenant établir le :

Théorème 9.9.2. *Sous l'hypothèse (9.1), si en outre pour tout $1 \leq p \leq N$,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \prod_{r=1}^n \frac{\lambda_p}{\mu_p(r)} < \infty,$$

alors le processus markovien de saut $\{X_t\}$ à valeurs dans E admet l'unique probabilité invariante

$$\pi_i = \prod_{p=1}^N \pi_{i_p}^p,$$

où pour $1 \leq p \leq N$, la probabilité π^p sur \mathbb{N} est définie par

$$\pi_n^p = b_p \frac{\lambda_p^n}{\prod_{r=1}^n \mu_p(r)},$$

$$\text{où } b_p = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{r=1}^n \frac{\lambda_p}{\mu_p(r)} \right)^{-1}.$$

Avant de démontrer ce théorème, précisons ce résultat dans deux cas particuliers.

Corollaire 9.9.3. *Cas $\mu_p(n) = \mu_p \mathbf{1}_{\{n>0\}}$ (Réseau de files $M/M/1$). Si (9.1) est satisfaite et $\lambda_p < \mu_p$, alors le processus $\{X_t\}$ admet la probabilité invariante $\pi_i = \prod_{p=1}^N \pi_{i_p}^p$, où*

$$\pi_i = \prod_{p=1}^N \pi_{i_p}^p, \text{ où}$$

$$\pi_n^p = \left(1 - \frac{\lambda_p}{\mu_p}\right) \left(\frac{\lambda_p}{\mu_p}\right)^n, \quad 1 \leq p \leq N, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Corollaire 9.9.4. *Cas $\mu_p(n) = \mu_p \times (n \wedge s_p)$ (Réseau de files $M/M/s_p$). Si (9.1) est satisfaite et $\lambda_p < \mu_p s_p$, alors le processus $\{X_t\}$ admet la probabilité invariante $\pi_i = \prod_{p=1}^N \pi_{i_p}^p$, avec*

$$\pi_n^p = b_p \left(\frac{\lambda_p}{\mu_p}\right)^n / (n \wedge s_p)!,$$

avec

$$b_p = \left[\sum_{r=0}^{s_p-1} \frac{(\lambda_p/\mu_p)^r}{r!} + \frac{(\lambda_p/\mu_p)^{s_p}}{s_p!} \left(\frac{1}{1 - \lambda_p/\mu_p s_p} \right) \right]^{-1}$$

Preuve du théorème 9.9.2 : Si une probabilité invariante π existe, et si \hat{Q} désigne le générateur infinitésimal du processus retourné, alors on a :

$$\begin{aligned} \pi_i Q_{i,i+e_p} &= \pi_{i+e_p} \hat{Q}_{i+e_p,i} \\ \pi_{i+e_p} Q_{i+e_p,i} &= \pi_i \hat{Q}_{i,i+e_p} \\ \pi_{i+e_q} Q_{i+e_p,i+e_q} &= \pi_{i+e_p} \hat{Q}_{i+e_p,i+e_q}. \end{aligned}$$

Si π existe et est donnée par la formule de l'énoncé, alors

$$\begin{aligned} \hat{Q}_{i+e_p,i} &= \frac{\lambda_p^0}{\lambda_p} \mu_p (i_p + 1) \\ \hat{Q}_{i,i+e_p} &= \lambda_p r_{p0} \\ \hat{Q}_{i+e_p,i+e_q} &= \frac{\lambda_q}{\lambda_p} r_{pq} \mu_p (i_p + 1) \end{aligned}$$

La formule pour π est alors correcte pourvu que pour tout $i \in E$ (cf. Remarque 7.7.3) :

$$\sum_{j \neq i} \hat{Q}_{ij} = \sum_{j \neq i} Q_{ij}$$

Or

$$\sum_{j \neq i} Q_{ij} = \sum_{p=1}^N (\lambda^0 + \mu_p(i_p)),$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{j \neq i} \hat{Q}_{ij} &= \sum_{p=1}^N \left(\lambda_p r_{p0} + \frac{\lambda_p^0}{\lambda_p} \mu_p(i_p) + \sum_{q \neq p} \lambda_q r_{qp} \frac{\mu_p(i_p)}{\lambda_p} \right) \\ &= \sum_{p=1}^N (\lambda_p r_{p0} + \mu_p(i_p)), \end{aligned}$$

où on a utilisé l'égalité (9.2). Mais en sommant l'égalité (9.2) sur p , on obtient

$$\begin{aligned} \sum_p \lambda_p^0 &= \sum_p \lambda_p (1 - \sum_q r_{pq}) \\ &= \sum_p \lambda_p r_{p0} \end{aligned}$$

d'où l'égalité désirée. \square

Il résulte de la preuve du Théorème les formules pour le générateur infinitésimal du processus retourné, d'où l'on déduit le

Corollaire 9.9.5. *Si les conditions du Théorème 9.9.2 sont satisfaites, et $\{X_t\}$ est initialisée avec la probabilité invariante, alors le processus retourné en temps $\hat{X}_t = X_{T-t}$, $0 \leq t \leq T$, est un processus markovien de saut, qui s'interprète comme un réseau de Jackson avec N files interconnectées, de paramètres :*

Intensité des arrivées exogènes à la station p :

$$\hat{\lambda}_p^0 = \lambda_p r_{p0};$$

Probabilité de routage de p vers q :

$$\hat{r}_{pq} = \frac{\lambda_q}{\lambda_p} r_{qp}$$

Probabilité de sortie du système au moment de quitter la station p :

$$\hat{r}_{p0} = \frac{\lambda_p^0}{\lambda_p}$$

Taux de service à la station p :

$$\hat{\mu}_p(i_p) = \mu_p(i_p).$$

En outre, les processus de sortie du système pour le processus initial à partir des stations $\{1, \dots, N\}$ sont des processus de Poisson indépendantes d'intensités respectives $\lambda_p r_{p0}$.

9.10 Réseau de Jackson fermé

On reprend le modèle de la section précédente, en supposant cette fois qu'il n'y a pas d'arrivée exogène – $\lambda_p^0 = 0, \forall p$, ni de sortie du système – $r_{p0} = 0, \forall p$, soit

$$r_{pp} = 0, \sum_{q=1}^N r_{pq} = 1.$$

La matrice $R = (r_{pq})_{1 \leq p, q \leq N}$ est donc markovienne. On la supposera **irréductible** dans toute la suite.

Sous ces hypothèses, il y a clairement conservation du nombre de clients dans le réseau. On notera $I (> 0)$ ce nombre.

Ici le processus $\{X_t\}$ est un processus markovien de saut à valeurs dans

$$E(I) = \{i \in \mathbb{N}_+^N, i_1 + \dots + i_p = I\}.$$

Le générateur infinitésimal de $\{X_t\}$ est donné par

$$Q_{i+e_p, i+e_q} = \mu_p(i_p + 1)r_{pq}, \quad p \neq q, \quad i \in E(I).$$

Soit $\{\lambda_p, 1 \leq p \leq N\}$ la probabilité sur $\{1, \dots, N\}$ invariante par R . On montre alors, par exemple par la même méthode qu'à la section précédente, le

Théorème 9.10.1. *Si R est irréductible, alors le processus $\{X_t\}$ admet l'unique probabilité invariante*

$$\pi_i = G(I)^{-1} \prod_{p=1}^N \frac{\lambda_p^{i_p}}{\prod_{r=1}^{i_p} \mu_p(r)},$$

avec

$$G(I) = \sum_{i \in E(I)} \prod_{p=1}^N \frac{\lambda_p^{i_p}}{\prod_{r=1}^{i_p} \mu_p(r)}.$$

La principale difficulté est de calculer la constante de normalisation (aussi appelée “fonction de partition”) $G(I)$. Dès que les valeurs de I et de N ne sont pas petites, le cardinal de $E(I)$ (qui vaut C_{I+N-1}^{N-1}) rend le calcul de $G(I)$ par sommation directe impossible.

Supposons maintenant pour toute la suite de cette section que $\mu_p(r) = \mu_p \mathbf{1}_{\{r>0\}}$. Notons $\rho_p = \lambda_p / \mu_p$.

Nombre moyen de clients Soit $1 \leq k < I$. Pour tout $j \in E(I - k)$, notons que

$$\pi_{j+k e_p}^I G(I) = \pi_j^{I-k} \rho_p^k G(I - k),$$

si l'on note π^I la probabilité invariante sur $E(I)$.

Donc si $\{X_t\}$ est initialisée avec la probabilité invariante π^I , et si $1 \leq k < I$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_t^p \geq k) &= \sum_{j \in E(I-k)} \pi_{j+k e_p}^I \\ &= \frac{G(I-k)}{G(I)} \rho_p^k \sum_{j \in E(I-k)} \pi_j^{I-k} \\ &= \frac{G(I-k)}{G(I)} \rho_p^k. \end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{E}X_t^p = \sum_{k=1}^I \rho_p^k \frac{G(I-k)}{G(I)},$$

où $G(0) = 1$.

Intensité des arrivées A l'équilibre, l'intensité des départs de la station p vers la station q vaut :

$$d_{pq} = \sum_{i \in E(I), i_p > 0} \pi_i Q_{i, i - e_p + e_q}$$

De la bijection entre $\{i \in E(I), i_p > 0\}$ et $E(I - 1)$, et de l'identité

$$\pi_i^I G(I) = \pi_{i - e_p}^{I-1} G(I - 1) \rho_p,$$

on déduit la formule

$$d_{pq} = \frac{\lambda_p r_{pq} G(I - 1)}{G(I)}.$$

On obtient alors, par un argument de retournement du temps, la formule suivante pour l'intensité des arrivées à la station p

$$a_p = \frac{\lambda_p G(I - 1)}{G(I)}.$$

Calcul de la fonction de partition Considérons les fonctions génératrices

$$\Phi_p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\rho_p z)^n = \frac{1}{1 - \rho_p z}, \quad 1 \leq p \leq N, \quad |z| \leq 1.$$

En comparant les coefficients des z^j dans les deux membres, on obtient l'égalité

$$\sum_{n=0}^{\infty} G(n) z^n = \prod_{p=1}^N \Phi_p(z)$$

Soit

$$\beta_p(z) = \prod_{q=1}^p \Phi_q(z), \quad 1 \leq p \leq N, \quad |z| \leq 1.$$

On a

$$\beta_p(z)(1 - \rho_p z) = \beta_{p-1}(z), \quad p > 1.$$

Notons $T(k, p)$ le coefficient de z^k dans $\beta_p(z)$. On a

$$T(k, p) - \rho_p T(k - 1, p) = T(k, p - 1), \quad k \geq 1, \quad p > 1,$$

avec $T(0, p) = 1$, $p \geq 1$ et $T(k, 1) = \rho_1^k$, $n \geq 0$.

On en déduit un algorithme de calcul de $G(I) = T(I, N)$, de complexité $O(I \times N)$, qui consiste à calculer les $T(k, p)$ ligne par ligne pour $1 \leq p \leq N$ (i.e. pour des valeurs croissantes de k).

9.11 Réseau téléphonique

On considère un réseau téléphonique constitué de N canaux interconnectés. L'établissement d'une communication requiert l'usage exclusif des n canaux demandés pour la communication. Si un ou plusieurs des canaux demandés est occupé, l'appel est rejeté. Sinon, la communication est établie, et dure un temps aléatoire, de loi exponentielle de paramètre μ_n . Les appels demandant n canaux arrivent suivant un processus de Poisson d'intensité λ_n . Les flux d'arrivées de type différent et les durées des communications sont mutuellement indépendants.

Soit $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^P)$ où X_t^n représente le nombre de communications établies à l'instant t , qui utilisent n canaux. X_t est un processus markovien de saut à valeurs dans

$$E = \{i = (i_1, \dots, i_P) \in \mathbb{N}^P \mid \bar{i} \leq N\},$$

où $\bar{i} = i_1 + 2i_2 + \dots + Pi_P$, de générateur infinitésimal Q , dont les seuls termes hors diagonaux non nuls sont donnés par :

$$\begin{aligned} Q_{i+e_n, i} &= \mu_n \times (i_n + 1), \\ Q_{i, i+e_n} &= \lambda_n \frac{C_{N-\bar{i}}^n}{C_N^n}, \end{aligned}$$

où $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ i.e. le vecteur de E dont toutes les coordonnées sont nulles, sauf la n -ième qui vaut 1. Notons que $C_{N-\bar{i}}^n / C_N^n$ est la probabilité de non-rejet si $X_t = i$. Posons $\tau_n = (C_N^n)^{-1} \lambda_n$.

Probabilité invariante

Théorème 9.11.1. *Le processus markovien de saut $\{X_t\}$ décrit ci-dessus est réversible par rapport à sa probabilité invariante*

$$\pi_i = \pi_0 \frac{N!}{(N - \bar{i})!} \prod_{n=1}^P \left\{ \left(\frac{\tau_n}{\mu_n n!} \right)^{i_n} \frac{1}{i_n!} \right\}$$

PREUVE: Cherchons une solution à l'équation d'équilibre local

$$\pi_i \tau_n \frac{(N - \bar{i})!}{n!(N - \bar{i} - n)!} = \pi_{i+e_n} \mu_n (i_n + 1), \quad i \in E, \quad 1 \leq n \leq P, \quad \bar{i} + e_n \in E;$$

Soit

$$\pi_{i+e_n} = \frac{\tau_n}{\mu_n} \frac{1}{i_n + 1} \frac{(N - \bar{v})!}{n!(N - \bar{v} - n)!} \pi_i.$$

Donc si $i_n \geq 1$,

$$\pi_i = \frac{\tau_n}{\mu_n n!} \frac{1}{i_n} \frac{(N - \bar{v} + n)!}{(N - \bar{v})!} \pi_{i-e_n}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \pi_i &= \pi_{i-i_1 e_1} \left(\frac{\lambda_1}{\mu_1} \right)^{i_1} \frac{1}{i_1!} \frac{(N - \bar{v} + i_1)!}{(N - \bar{v})!} \\ \pi_i &= \pi_{i-i_1 e_1 - i_2 e_2} \left(\frac{\lambda_1}{\mu_1} \right)^{i_1} \frac{1}{i_1!} \left(\frac{\lambda_2}{\mu_2} \right)^{i_2} \frac{1}{i_2!} \frac{(N - \bar{v} + i_1 + 2i_2)!}{(N - \bar{v})!} \end{aligned}$$

La formule de l'énoncé s'obtient en poursuivant ce calcul. □

Il reste à calculer π_0 . Posons

$$x_n = \frac{\tau_n}{\mu_n n!}, \quad x = (x_1, \dots, x_P),$$

$$G(N, x) = \sum_{i \in E} \frac{N!}{(N - \bar{v})!} \prod_{n=1}^P \frac{x_n^{i_n}}{i_n!}.$$

Alors $\pi_0 = G(N, x)^{-1}$. On verra ci-dessous un algorithme de calcul de la fonction de partition $G(N, x)$.

Probabilité de rejet En régime stationnaire, l'intensité des fins de communication mettant en jeu n canaux vaut

$$\sum_{i \in E} \mu_n i_n \pi_i = \mathbb{E}(X_t^n) \mu_n.$$

La réversibilité entraîne que cette quantité est égale à l'intensité des communications mettant en jeu n canaux qui sont acceptés. Donc le rapport taux d'acceptation/taux de demande pour les communications mettant en jeu n canaux, qui représente la probabilité d'acceptation, vaut $\mathbb{E}(X_t^n) \mu_n / \lambda_n$. Il reste donc à calculer le

Nombre moyen de communications mettant en jeu n canaux.

$$\sum_{i \in E} i_n \pi_i = G(N, x)^{-1} \sum_{i \in E} \frac{N!}{(N - \bar{i})!} i_n \prod_{m=1}^P \frac{x_m^{i_m}}{i_m!}$$

Or

$$\frac{\partial}{\partial x_n} G(N, x) = \sum_{i \in E} \frac{N!}{(N - \bar{i})!} \frac{x_n^{i_n - 1}}{(i_n - 1)!} \prod_{m \neq n} \frac{x_m^{i_m}}{i_m!}$$

Donc

$$\sum_{i \in E} i_n \pi_i = x_n G(N, x)^{-1} \frac{\partial}{\partial x_n} G(N, x).$$

Avec la convention $n! = -\infty$ si $n < 0$, on a

$$\frac{\partial}{\partial x_n} G(N, x) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{i_P=0}^{\infty} \frac{N!}{(N - \bar{i})!} \frac{x_n^{i_n - 1}}{(i_n - 1)!} \prod_{m \neq n} \frac{x_m^{i_m}}{i_m!}$$

soit encore

$$\frac{\partial}{\partial x_n} G(N, x) = \frac{N!}{(N - n)!} \sum_{i_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{i_P=0}^{\infty} \frac{(N - n)!}{(N - n - \bar{i})!} \prod_m \frac{x_m^{i_m}}{i_m!},$$

donc

$$\frac{\partial}{\partial x_n} G(N, x) = \frac{N!}{(N - n)!} G(N - n, x),$$

et

$$\mathbb{E} X_t^n = \frac{\lambda_n}{\mu_n} \frac{G(N - n, x)}{G(N, x)}.$$

Probabilité de rejet (suite) La probabilité de rejet d'une communication mettant en jeu n canaux vaut donc

$$p_n = 1 - \frac{G(N - n, x)}{G(N, x)}.$$

Calcul de la fonction de partition On peut établir des équations de récurrence pour des $G(N, x)$, analogues à celles que nous avons obtenues dans le cas des réseaux de Jackson fermés.

Considérons, pour $z \in \mathbf{C}$, la fonction génératrice :

$$g(z, x) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{z^N}{N!} G(N, x),$$

avec $G(0, x) = 1$. On peut montrer que

$$g(z, x) = \exp \left[z + \sum_{n=1}^P x_n z^n \right],$$

d'où l'on déduit les formules de récurrence

$$G(0, x) = 1$$

$$G(N, x) = G(N-1, x) + \sum_{n=1}^N nx_n \frac{(N-1)!}{(N-n)!} G(N-n, x), \quad N = 1, 2, \dots, P;$$

$$G(N, x) = G(N-1, x) + \sum_{n=1}^P nx_n \frac{(N-1)!}{(N-n)!} G(N-n, x), \quad N \geq P.$$

9.12 Réseau de Kelly

On va maintenant considérer les réseaux “multiclasse”, aussi appelés “réseaux de Kelly”. La principale différence avec les réseaux de Jackson est que le trajet suivi par un client donné n'est pas le résultat de tirages aléatoires qui sont les mêmes pour tous, mais c'est un trajet déterministe qui dépend de la classe dont fait partie ce client.

Plus précisément, on considère des clients de classe $j = 1, 2, \dots, J$, où $J \in \mathbf{N}$.

Puisque les clients sont maintenant différents les uns des autres, pour étudier l'évolution des flux dans le réseau il convient de préciser le système de priorité dans chaque file, qui jusqu'à présent n'avait pas réellement d'importance (dans la mesure où l'on s'intéresse aux flux globaux, et non à ce qu'il advient d'un client particulier).

Afin de fixer les notations, considérons tout d'abord le cas de :

9.12.1 Une seule file d'attente

Les arrivées sont constituées de J flots de Poisson d'intensité respective $\lambda_1, \dots, \lambda_J$, λ_j désignant l'intensité des arrivées de clients de classe j .

Quelle que soit sa classe, un client qui arrive dans la file alors que n clients y sont déjà présents, sera placé en position ℓ ($= 1, \dots, n+1$), avec probabilité $\gamma(\ell, n)$ [avec $\sum_{\ell=1}^{n+1} \gamma(\ell, n) = 1$].

Si n clients sont présents dans la file, le client en position ℓ reçoit un service exponentiel de paramètre $\Phi(n)\delta(\ell, n)$, avec $\sum_{\ell=1}^n \delta(\ell, n) = 1$. Globalement, le serveur travaille donc avec une "intensité" $\Phi(n) > 0$, dès que $n > 0$.

L'état de la file est décrit par un processus de Markov à valeurs dans

$$E = \emptyset \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{1, \dots, J\}^n$$

Un point $c \in E$ est une suite de longueur $n = |c|$

$$c = (c_1, \dots, c_n),$$

avec $c_i \in \{1, \dots, J\}$, $1 \leq i \leq n$.

Précisons les transitions possibles de la chaîne X_t à valeurs dans E , qui décrit l'état de la file d'attente à l'instant t . Deux transitions sont possibles à partir de l'état c :

1. ajout d'un client de la classe j , inséré entre le $i-1$ -ème et le i -ème client ($1 \leq j \leq J$, $1 \leq i \leq n+1$, $n \geq 0$) : soit transition de l'état c à l'état

$$A_i^j(c) = (c_1, \dots, c_{i-1}, j, c_{i+1}, \dots, c_n);$$

2. départ du client qui était au rang i dans la file, soit transition de l'état c à l'état

$$S_i(c) = (c_1, \dots, c_{i-1}, c_{i+1}, \dots, c_n)$$

La matrice de transition Q est entièrement caractérisée par ses termes hors diagonaux, donnés par :

$$Q_{c, A_i^j(c)} = \lambda_j \gamma(i|c|), \quad 1 \leq i \leq |c| + 1, \quad 1 \leq j \leq J;$$

$$Q_{c, S_i(c)} = \Phi(|c|)\delta(i, |c|), \quad 1 \leq i \leq |c|.$$

Notons que la classe d'un client n'influe ni sur la façon dont il est placé dans la file, ni sur son service.

Exemple 9.12.1. File $M/M/K/PAPS(FIFO)$ (comme "premier arrivé premier servi", en anglais "first in first out")

$$\begin{aligned}\Phi(n) &= n \wedge K \\ \delta(\ell, n) &= \begin{cases} 1/n \wedge K, & \text{si } 1 \leq \ell \leq n \wedge K, \\ 0 & \text{si } \ell > n \wedge K, \end{cases} \\ \gamma(\ell, n) &= \begin{cases} 0, & \text{si } \ell = 1, \dots, n \\ 1, & \text{si } \ell = n + 1 \end{cases}\end{aligned}$$

Exemple 9.12.2. File $M/M/K/DAPS(LIFO)$ (comme "dernier arrivé premier servi", "last in first out")

Φ et gamma sont comme dans l'exemple précédent, et cette fois

$$\delta(\ell, n) = \begin{cases} 1/n \wedge K, & \text{si } (n - K)^+ \leq \ell \leq n, \quad , n \neq 0 \\ 0, & \text{si } \ell \leq (n - K)^+ \end{cases}$$

Exemple 9.12.3. File $M/M/1/\text{service partagé}$ (process sharing)

$\Phi(n) = \Phi > 0$, le choix de γ est sans importance, et

$$\delta(\ell, n) = \frac{1}{n}, \quad 1 \leq \ell \leq n.$$

La chaîne de Markov $\{X_t\}$ de générateur Q ainsi précisé est clairement irréductible.

On a en outre le

Théorème 9.12.4. La file d'attente à plusieurs classes de clients est récurrente positive ssi

$$Z = \sum_{c \in E} \prod_{\ell=1}^{|c|} \frac{\lambda_{c_\ell}}{\Phi(\ell)} < \infty,$$

et dans ce cas la probabilité invariante est

$$\pi_c = Z^{-1} \prod_{\ell=1}^{|c|} \frac{\lambda_{c_\ell}}{\Phi(\ell)}, \quad c \in E.$$

En outre à l'équilibre, pour $1 \leq j \leq J$, le processus des départs des clients de la classe j est un processus de Poisson d'intensité λ_j .

PREUVE: On va utiliser le théorème 7.7.4. On pose donc

$$\begin{aligned}
\hat{Q}_{c,A_i^j(c)} &= \frac{\pi_{A_i^j(c)}}{\pi_c} Q_{A_i^j(c),c} \\
&= \frac{\lambda_j}{\Phi(|c|+1)} \Phi(|c|+1) \delta(i, |c|+1) \\
&= \lambda_j \delta(i, |c|+1) \\
\hat{Q}_{c,S_i(c)} &= \frac{\Phi(|c|)}{\lambda_i} Q_{S_i(c),c} \\
&= \frac{\Phi(|c|)}{\lambda_i} \lambda_i \gamma(i, |c|-1) \\
&= \Phi(|c|) \gamma(i, |c|-1)
\end{aligned}$$

On remarque que

$$\sum_{i=1}^{|c|+1} \hat{Q}_{c,A_i^j(c)} = \lambda_j = \sum_{i=1}^{|c|+1} Q_{c,A_i^j(c)}$$

et

$$\sum_{i=1}^{|c|} \hat{Q}_{c,S_i(c)} = \Phi(|c|) = \sum_{i=1}^{|c|} Q_{c,S_i(c)},$$

donc il résulte du Théorème 7.7.4 que sous l'hypothèse du présent théorème, π est la probabilité invariante, et \hat{Q} le générateur du processus retourné, et les arrivées de clients de la classe j forment un processus de Poisson d'intensité

$$\lambda_j = \sum_{i=1}^{|c|+1} \hat{Q}_{c,A_i^j(c)}. \quad \square$$

Remarquons que le nombre total de clients dans la file est un processus de Markov de naissance et de mort de générateur infinitésimal Q caractérisé par

$$Q_{i,i+1} = \sum_{j=1}^J \lambda_j; \quad Q_{i,i-1} = \Phi(i).$$

Mais la description détaillée ci-dessus va être indispensable dans ce qui suit.

9.12.2 Réseau de files d'attente multi-classe

On considère maintenant un réseau constitué de N noeuds, chacun étant une file d'attente du type ci-dessus. Pour chaque $1 \leq j \leq J$, les clients de la

classe j arrivent dans le réseau suivant un processus de Poisson d'intensité λ_j . Chaque client de la classe j se présente d'abord à la file $f_1^j \in \{1, \dots, N\}$, puis lorsqu'il quitte cette file il rejoint la file f_2^j , et ainsi de suite jusqu'à la file $f_{n_j}^j$, d'où il quitte définitivement le réseau. C'est à dire que le j -ème flot suit la route $f_1^j, f_2^j, \dots, f_{n_j}^j$ dans le réseau. Pour chaque noeud i , $1 \leq i \leq N$, les fonctions Φ, δ, γ associées au noeud i sont notées $\Phi_i, \delta_i, \gamma_i$.

Il n'y a pas de raison d'interdire à certains des circuits $f_1^j, \dots, f_{n_j}^j$ de repasser plusieurs fois en un même noeud du réseau. Pour cette raison, et afin de rendre le système markovien, il faut associer à chaque client présent dans cette file, outre sa classe, le nombre de files déjà visitées.

L'état de la i -ème file d'attente ($1 \leq i \leq N$) est donc décrit par le vecteur

$$x_i = ((c_{i_1}, s_{i_1}), \dots, (c_{i_{m_i}}, s_{i_{m_i}}))$$

où c_{ik} désigne la classe du client à la k -ième position, et s_{ik} le nombre de files qu'il a déjà visitées (y compris celle en cours). Donc $1 \leq c_{ik} \leq J$ et $1 \leq s_{ik} \leq n_{c_{ik}}$. L'espace d'états décrivant la file au noeud i est

$$E_i = \emptyset \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{1, \dots, J\}^n$$

$$X_t = (X_t^1, \dots, X_t^N), \quad \text{où}$$

$X_t^i \in E_i$ est l'état de la file au noeud i à l'instant t . Le processus markovien de sauts $\{X_t\}$ prend ses valeurs dans $E = \prod_{i=1}^N E_i$. C'est un processus irréductible.

Les transitions possibles à partir de l'état $x = (x_1, \dots, x_N)$ sont les suivantes :

1. Un client de classe j arrive, suivant un processus de Poisson d'intensité λ_j , dans le réseau au noeud f_1^j . Le couple $(j, 1)$ est inséré en ℓ -ième position dans cette file avec probabilité $\gamma_{f_1^j}(\ell, |c_{f_1^j}|)$. Ceci se produit avec l'intensité

$$\lambda_j \gamma_{f_1^j}(\ell, |c_{f_1^j}|)$$

2. Un client de classe j à l'étape $s < n_j$ de sa route, à la place ℓ de la file au noeud f_s^j , quitte celle-ci pour la place m de la file f_{s+1}^j , avec l'intensité

$$\Phi_{f_s^j}(|c_{f_s^j}|) \delta_{f_s^j}(\ell, |c_{f_s^j}|) \gamma_{f_{s+1}^j}(m, |c_{f_{s+1}^j}|).$$

A l'issue de cette transition, le couple $(j, s+1)$ est à la place m dans la file au noeud f_{s+1}^j .

3. Un client de classe j à l'étape n_j de sa route, à la place ℓ de la file au noeud $f_{n_j}^j$, quitte le réseau. Ceci se produit avec l'intensité

$$\Phi_{f_{n_j}^j}(|c_{f_{n_j}^j}|) \delta_{f_{n_j}^j}(\ell, |c_{f_{n_j}^j}|).$$

On pose

$$Z = \sum_{x \in E} \prod_{i=1}^N \prod_{k=1}^{|x_i|} \frac{\lambda_{c_{ik}}}{\Phi_i(k)}$$

On a le résultat suivant, qui se démontre comme le théorème précédent.

Théorème 9.12.5. *Si $Z < \infty$, alors $\{\pi_x, x \in E\}$ défini par*

$$\pi_x = Z^{-1} \prod_{i=1}^N \pi_{x_i}^i,$$

avec

$$\pi_{x_i}^i = \prod_{k=1}^{|x_i|} \frac{\lambda_{c_{ik}}}{\Phi_i(k)},$$

est la probabilité invariante du processus $\{X_t\}$ qui décrit les clients présents dans le réseau de files d'attente multiclassées. En outre, à l'équilibre, le processus de sortie des clients de classe j est un processus de Poisson d'intensité λ_j , $1 \leq j \leq J$.

9.13 Exercices

Exercice 9.13.1. *On étudie le processus de Markov $\{X_t\}$ sur \mathbb{N} qui modélise la file d'attente $M/M/1$, i.e. le processus markovien de sauts de générateur infinitésimal*

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

- **a** *Montrer que la chaîne incluse de ce processus est la marche aléatoire réfléchie en 0 de l'exercice 2.10.7, avec $p = \lambda/(\lambda + \mu)$.*

- **b** En déduire que le processus $\{X_t\}$ est transient dans le cas $\lambda > \mu$, récurrent dans le cas $\lambda \leq \mu$.
- **c** Montrer que $\{X_t\}$ est récurrent nul dans le cas $\lambda = \mu$, récurrent positif dans le cas $\lambda < \mu$ (on montrera que dans le premier (resp. le second) cas, la mesure $(1, 1, 1, 1, \dots)$ (resp. la mesure géométrique de paramètre λ/μ) est invariante).

Exercice 9.13.2. On considère la file $M/M/1$ $\{X_t, t \geq 0\}$, et on définit la suite aléatoire $\{Y_n = X_{T_n^-}, n \geq 1\}$, où $\{T_1, T_2, \dots\}$ désignent les instants d'arrivées successives de clients à partir de l'instant 0, et $X_{T_n^-} \geq 0$ est donc le nombre de clients que le n -ième arrivant trouve devant lui dans la file.

- 1 Montrer que $\{Y_n, n \geq 1\}$ est une chaîne de Markov à valeurs dans \mathbb{N} . Préciser sa matrice de transition. Montrer que cette chaîne est irréductible et apériodique.
- 2 On se place dans le cas $\lambda < \mu$. Montrer que la probabilité géométrique π de paramètre λ/μ (qui est la probabilité invariante du processus markovien de sauts $\{X_t, t \geq 0\}$), est la probabilité invariante de la chaîne $\{Y_n, n \geq 1\}$, et que la loi de Y_n converge vers π quand $n \rightarrow \infty$.
- 3 Montrer que la formule de Little dans le cas particulier de la file $M/M/1$ est une conséquence du résultat de la question précédente.
- 4 On suppose maintenant que la file est initialisée avec sa probabilité invariante (i.e. loi de $X_0 = \pi$). Calculer la loi de $X_{T_1^-}$. Montrer que pour toute fonction f croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{R} , $\mathbb{E}f(X_{T_1^-}) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i f(i)$, et que l'on a l'inégalité stricte pour certaines fonctions croissantes f . Ce résultat vous paraît-il conforme à l'intuition ? Pourquoi la loi de $X_{T_1^-}$ diffère-t-elle de la loi π ? Comparer avec le résultat de l'exercice 6.5.3.

Chapitre 10

Introduction aux Mathématiques Financières

Introduction

Le but de ce cours est de présenter les modèles mathématiques permettant de résoudre le problème de la fixation des prix (pricing) des options “européennes” et “américaines”, ainsi que de préciser les stratégies de couverture associées. On présentera en particulier la célèbre formule de Black et Scholes, obtenue par leurs auteurs en 1972, et qui a été un des arguments pour l’attribution récente du prix Nobel d’économie à Black et Merton (Scholes étant décédé).

On va présenter en parallèle le modèle discret de Cox, Ross et Rubinstein, et le modèle continu de Black et Scholes.

L’intérêt du modèle discret est de permettre de démontrer les résultats de façon élémentaire ; celui du modèle continu est d’aboutir aux formules qui sont celles utilisées couramment par les professionnels de la finance.

10.1 Les concepts de base

10.1.1 Option

Une option est un contrat aux termes duquel son détenteur a le *droit* (et non l’obligation) d’acheter (s’il s’agit d’une option d’achat, *call* en anglais) ou de vendre (s’il s’agit d’une option de vente, *put* en anglais) une quantité

fixée d'un actif donné (qui peut être une action, une obligation, une devise, une matière première, ...) à un prix fixé à l'avance (appelé prix d'exercice), à une date (l'échéance) fixée à l'avance dans le cas d'une option européenne; une option américaine peut au contraire être exercée à n'importe quelle date entre celle de la signature du contrat et la date d'échéance.

Dans le cas d'un call européen d'échéance T , sur une action dont le cours à l'instant t est S_t , de prix d'exercice K , le détenteur de l'option gagne à l'instant T $(S_T - K)_+$. Dans le cas d'un put, le gain du détenteur de l'option à l'instant T est $(K - S_T)_+$. Le gain du détenteur (donc de l'acheteur) de l'option est la perte du vendeur de l'option. La prime est censée compenser cette perte.

La théorie mathématique des options traite deux problèmes :

- a) fixation du prix de l'option (en anglais *pricing*), autrement dit du montant de la prime que l'acheteur de l'option devra régler à son vendeur au moment de la signature du contrat ;
- b) *couverture* : comment le vendeur de l'action va pouvoir gérer la prime qu'il encaisse au moment de la signature du contrat, pour compenser, dans le cas d'une option européenne une perte de $(S_T - K)_+$ (resp. $(K - S_T)_+$).

10.1.2 Arbitrage

Une des hypothèses que l'on est amené à faire dans l'étude mathématique des options est l'*absence d'opportunité d'arbitrage*, i.e. l'impossibilité de gagner de l'argent sans risque. Cette hypothèse entraîne une relation dite de *parité entre call et put* européens, portant sur le même sous-jacent avec même prix d'exercice K et même échéance T , à savoir l'identité :

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

où C_t est le prix du call, P_t celui du put, S_t le prix sous-jacent, et r le taux constant auquel on peut emprunter ou placer de l'argent (on a ici une hypothèse essentielle de tous les modèles qui vont suivre, qui n'est pas très réaliste).

Supposons la relation de parité non satisfaite, i.e. supposons qu'à l'instant t on ait par exemple :

$$C_t - P_t > S_t - Ke^{-r(T-t)}.$$

(un raisonnement analogue peut être fait dans le cas $<$). On va en déduire une opportunité d'arbitrage. A l'instant t , on achète une action (ou obligation, ou ...) et un put, et on vend un call. Cette opération dégage un profit net égal à :

$$X_t = C_t - P_t - S_t.$$

Si $X_t > 0$, on place X_t aux taux r jusqu'à la date T ; sinon on emprunte $-X_t$ au même taux jusqu'à la date T .

A la date T , deux cas peuvent se présenter :

1. $S_T > K$: alors le call est exercé (et on n'exerce pas le put) : on encaisse K , et on solde le prêt (ou l'emprunt), donc on se retrouve avec une richesse égale à :

$$K + e^{r(T-t)}(C_t - P_t - S_t) > 0.$$

2. $S_T \leq K$: on exerce le put (le call n'est pas exercé), et on solde comme ci-dessus, donc on se retrouve avec la même richesse que ci-dessus.

Dans les deux cas, on réalise à l'instant T un gain > 0 , avec une mise de fonds nulle à l'instant t : c'est un exemple d'arbitrage.

10.1.3 Marchés viables et complets

Un marché est dit *viable* s'il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage.

Un marché est dit *complet* si tout actif conditionnel à l'instant T (i.e. toute fonction de $\{S_t, 0 \leq t \leq T\}$, en particulier de S_T , en particulier $(S_T - K)_+$ ou $(K - S_T)_+$) est simulable, i.e. s'il existe une stratégie admissible dont la valeur à l'instant T est égale à $(S_T - K)_+$ (resp. $(K - S_T)_+$).

La notion de stratégie admissible sera précisée ci-dessous, dans les deux modèles discret et continu. Le juste prix du call (resp. put) européen sera alors la valeur initiale d'une stratégie admissible de valeur finale $(S_T - K)_+$ (resp. $(K - S_T)_+$). Une telle stratégie réalise la couverture de l'option.

10.2 Options européennes dans le modèle discret

10.2.1 Le modèle

On va considérer un modèle en temps discret avec un seul actif risqué, dont le cours à l'instant t sera noté S_t , $t = 0, 1, \dots, T$; et un actif sans risque

dont le cours à l'instant t sera noté R_t .

On suppose qu'il existe $r > 0$ tel que

$$R_{t+1} = R_t(1 + r),$$

On supposera pour simplifier que $R_0 = 1$, donc

$$R_t = (1 + r)^t, \quad 0 \leq t \leq T.$$

On suppose que S_0 est une constante, et qu'il existe des v.a. i.i.d. ξ_t , $1 \leq t \leq T$, prenant leurs valeurs dans l'ensemble $\{a, b\}$, avec $0 < a < b$, telles que

$$S_{t+1} = S_t \xi_{t+1}, \quad t = 0, 1, \dots, T-1.$$

Notre espace de probabilité est $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, avec $\Omega = \{a, b\}^T$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, et \mathbb{P} est tel que sous \mathbb{P} les ξ_t , $1 \leq t \leq T$ sont i.i.d et $\mathbb{P}(\xi_1 = a) > 0$, $\mathbb{P}(\xi_1 = b) > 0$.

Nous définissons le *prix actualisé* à l'instant t de l'actif risqué comme la quantité

$$\tilde{S}_t = \frac{S_t}{R_t}, \quad t = 0, 1, \dots, T.$$

10.2.2 Stratégie admissible

Une *stratégie de gestion* est une suite aléatoire $\{(X_t, Y_t), t = 0, 1, \dots, T\}$ à valeurs dans \mathbb{R}^2 , telle que si

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{-1} &= \mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\} \\ \mathcal{F}_t &= \sigma\{\xi_1, \dots, \xi_t\}, \quad t \geq 1, \end{aligned}$$

(X_t, Y_t) est \mathcal{F}_{t-1} -mesurable, pour tout $0 \leq t \leq T$. On dit que la suite $\{(X_t, Y_t)\}$ est *prévisible*.

La valeur du *portefeuille* à l'instant t est donné par :

$$V_t(X, Y) = X_t R_t + Y_t S_t,$$

et sa *valeur actualisée* est la quantité

$$\tilde{V}_t(X, Y) = \frac{V_t(X, Y)}{R_t} = X_t + Y_t \tilde{S}_t.$$

La stratégie est dite *autofinancée* si

$$X_t R_t + Y_t S_t = X_{t+1} R_t + Y_{t+1} S_t$$

ou de façon équivalente

$$V_{t+1}(X, Y) - V_t(X, Y) = X_{t+1}(R_{t+1} - R_t) + Y_{t+1}(S_{t+1} - S_t)$$

ou encore

$$X_t + Y_t \tilde{S}_t = X_{t+1} + Y_{t+1} \tilde{S}_t.$$

i.e.

$$\tilde{V}_{t+1}(X, Y) - \tilde{V}_t(X, Y) = Y_{t+1}(\tilde{S}_{t+1} - \tilde{S}_t).$$

Autrement dit, avec les notations $\Delta S_t = S_t - S_{t-1}$, $\Delta \tilde{S}_t = \tilde{S}_t - \tilde{S}_{t-1}$, on a la

Proposition 10.2.1. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *La stratégie $\{(X_t, Y_t); 0 \leq t \leq T\}$ est autofinancée.*
- (ii) *Pour tout $1 \leq t \leq T$,*

$$V_t(X, Y) = V_0(X, Y) + \sum_{s=1}^t (X_s \Delta R_s + Y_s \Delta S_s).$$

- (iii) *Pour tout $1 \leq t \leq T$,*

$$\tilde{V}_t(X, Y) = \tilde{V}_0(X, Y) + \sum_{s=1}^t Y_s \Delta \tilde{S}_s$$

On a en outre la

Proposition 10.2.2. *Pour tout processus prévisible $\{Y_t, 0 \leq t \leq T\}$ et toute valeur initiale V_0 (déterministe!) du portefeuille, il existe un unique processus prévisible $\{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ tel que la stratégie $\{(X_t, Y_t), 0 \leq t \leq T\}$ soit autofinancée, et corresponde à un portefeuille de valeur initiale V_0 .*

Preuve

La condition d'autofinancement impose que, pour tout $0 \leq t \leq T$,

$$\begin{aligned} \tilde{V}_t(X, Y) &= X_t + Y_t \tilde{S}_t \\ &= V_0 + \sum_{s=1}^t Y_s \Delta \tilde{S}_s, \end{aligned}$$

ce qui définit X_t . La prévisibilité est facile à vérifier.

Définition 10.2.3. Une stratégie (X, Y) est dite admissible si elle est autofinancée et vérifie $V_t(X, Y) \geq 0, \forall 0 \leq t \leq T$.

Définition 10.2.4. Une stratégie d'arbitrage est une stratégie admissible (X, Y) telle que $V_0(X, Y) = 0$ et $V_T(X, Y) \neq 0$, ou équivalentement $V_0(X, Y) = 0$ et $\tilde{V}_T(X, Y) \neq 0$.

10.2.3 Martingales

Définition 10.2.5. Une suite $\{M_t, 0 \leq t \leq T\}$ est adaptée si M_t est \mathcal{F}_t mesurable, $0 \leq t \leq T$; est une martingale si elle est adaptée et pour $1 \leq t \leq T$,

$$\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_{t-1}] = M_{t-1}.$$

Proposition 10.2.6. Soit $\{M_t, 0 \leq t \leq T\}$ une martingale, et $\{Y_t, 0 \leq t \leq T\}$ une suite prévisible. Alors la suite $\{M(Y)_t, 0 \leq t \leq T\}$ définie par :

$$\begin{aligned} M(Y)_0 &= Y_0 M_0 \\ M(Y)_t &= Y_0 M_0 + \sum_{1 \leq s \leq t} Y_s \Delta M_s, \quad t \geq 1 \end{aligned}$$

est une martingale.

Preuve Il suffit de remarquer que

$$\mathbb{E}[Y_t \Delta M_t | \mathcal{F}_{t-1}] = Y_t \mathbb{E}[\Delta M_t | \mathcal{F}_{t-1}] = 0,$$

où l'on a utilisé successivement le caractère prévisible de Y , et la propriété de martingale de M .

10.2.4 Le marché est viable et complet

Théorème 10.2.7. Le marché défini ci-dessus est viable (i.e. il n'existe pas de stratégie d'arbitrage) ssi $a < 1 + r < b$.

Preuve

Il n'est pas difficile de montrer que si $1 + r \notin]a, b[$, il existe une stratégie d'arbitrage (exercice).

Réciproquement, si $a < 1 + r < b$, la probabilité \mathbb{P}^* sur (Ω, \mathcal{F}) telle que sous \mathbb{P}^* les ξ_t sont i.i.d tels que

$$\mathbb{E}^*(\xi_t) = 1 + r.$$

(appelée *probabilité risque neutre*) est équivalente à \mathbb{P} (car $\mathbb{P}^*(\xi_1 = a) > 0$ et $\mathbb{P}^*(\xi_1 = b) > 0$). Mais, sous \mathbb{P}^* , $\{\tilde{S}_t\}$ est une martingale, donc d'après la proposition 10.2.6, $\tilde{V}(X, Y)$ est une martingale pour toute stratégie (X, Y) . Donc si $V_0(X, Y) = 0$, $\mathbb{E}^*\tilde{V}_T(X, Y) = 0$. La condition d'admissibilité impose $\tilde{V}_T(X, Y) \geq 0$ p.s., donc $\tilde{V}_T(X, Y) \equiv 0$. \diamond

Pour alléger les notations, on posera $c = 1 + r$. Il est facile de vérifier que l'on a :

$$\mathbb{P}^*(\xi_1 = a) = \frac{b - c}{b - a}, \quad \mathbb{P}^*(\xi_1 = b) = \frac{c - a}{b - a}$$

Théorème 10.2.8. *Si $a < 1 + r < b$, le marché défini ci-dessus est complet, i.e. pour toute v.a. \mathcal{F}_T mesurable $H \geq 0$, il existe une stratégie admissible (X, Y) telle que $V_T(X, Y) = H$. En outre pour tout $0 \leq t < T$,*

$$V_t(X, Y) = \frac{R_t}{R_T} \mathbb{E}^*(H | \mathcal{F}_t).$$

Preuve

S'il existe une stratégie admissible telle que $V_T(X, Y) = H$, alors d'après la proposition 10.2.1 (iii), pour tout $0 \leq t < T$,

$$\frac{H}{R_T} = \tilde{V}_t(X, Y) + \sum_{s=t+1}^T Y_s \Delta \tilde{S}_s.$$

Donc, sous \mathbb{P}^* , $\{\tilde{V}_t(X, Y); 0 \leq t \leq T\}$ est une martingale, d'où :

$$\tilde{V}_t(X, Y) = \mathbb{E}^* \left(\frac{H}{R_T} | \mathcal{F}_t \right),$$

soit encore

$$V_t(X, Y) = \frac{R_t}{R_T} \mathbb{E}^*(H | \mathcal{F}_t).$$

Notons en particulier que $H \geq 0$ entraîne alors $V_t(X, Y) \geq 0$, donc s'il existe une stratégie autofinancée qui produit la suite $\{V_t(X, Y); 0 \leq t \leq T\}$ ci-dessus, elle est admissible. Au vu de la proposition 10.2.2, il reste à montrer

qu'il existe une suite prévisible $\{Y_t; 0 \leq t \leq T\}$ telle que

$$\sum_{s=1}^T Y_s \Delta \tilde{S}_s = \frac{H}{R_T} - \mathbb{E}^* \left(\frac{H}{R_T} \right).$$

La suite $\{Y_t; 1 \leq t \leq T\}$ est caractérisée par :

$$Y_t \tilde{S}_{t-1} \left(\frac{\xi_t}{c} - 1 \right) = \mathbb{E}^*(\tilde{H} | \mathcal{F}_t) - \mathbb{E}^*(\tilde{H} | \mathcal{F}_{t-1}),$$

où $\tilde{H} := H/R_T$, soit

$$Y_t = \frac{c(\mathbb{E}^*(\tilde{H} | \mathcal{F}_t) - \mathbb{E}^*(\tilde{H} | \mathcal{F}_{t-1}))}{\tilde{S}_{t-1}(\xi_t - c)}.$$

Il reste donc à montrer que Y_t est \mathcal{F}_{t-1} -mesurable (i.e. ne dépend pas de $\xi_t!$).

Notons $\xi^{t-1} := (\xi_1, \dots, \xi_{t-1})$. Alors la v.a. $\frac{\mathbb{E}^*(\tilde{H} | \mathcal{F}_t)}{\tilde{S}_{t-1}}$ est une fonction du couple (ξ^{t-1}, ξ_t) .

Posons

$$g_t(\xi^{t-1}, \xi_t) := c \frac{\mathbb{E}^*(\tilde{H} | \mathcal{F}_t)}{\tilde{S}_{t-1}}.$$

On a

$$Y_t = \frac{g_t(\xi^{t-1}, \xi_t) - \mathbb{E}^*(g_t(\xi^{t-1}, \xi_t) | \mathcal{F}_{t-1})}{\xi_t - c}.$$

Notons que

$$\mathbb{E}^*(g_t(\xi^{t-1}, \xi_t) | \mathcal{F}_{t-1}) = g_t(\xi^{t-1}, a) \frac{b-c}{b-a} + g_t(\xi^{t-1}, b) \frac{c-a}{b-a},$$

donc

$$Y_t = \frac{(g_t(\xi^{t-1}, \xi_t) - g_t(\xi^{t-1}, a)) \frac{b-c}{b-a} + (g_t(\xi^{t-1}, \xi_t) - g_t(\xi^{t-1}, b)) \frac{c-a}{b-a}}{\xi_t - c}.$$

Il reste à remarquer que dans les deux cas $\xi_t = a$ et $\xi_t = b$, on a :

$$Y_t = \frac{g_t(\xi^{t-1}, b) - g_t(\xi^{t-1}, a)}{b-a}.$$

Remarque 10.2.9. La dernière formule donne la fraction de la richesse à investir dans l'actif risqué, à chaque instant t , pour réaliser une stratégie de couverture. Notons la forme particulière du membre de droite, qui s'apparente à une "dérivée approchée". Dans le cas du modèle continu du chapitre suivant, on aura une dérivée, d'où la terminologie "produit dérivé" utilisée pour désigner les options.

10.2.5 Prix du call et du put

Nous allons maintenant préciser la formule pour $V_t(X, Y)$ dans les deux cas du call et du put. Notons

$$p = \frac{b - c}{b - a} = \mathbb{P}^*(\xi_1 = a),$$

donc

$$1 - p = \mathbb{P}^*(\xi_1 = b).$$

Dans le cas du call européen,

$$V_t(X, Y) = c^{-(T-t)} \mathbb{E}^* \left[(S_t \prod_{s=t+1}^T \xi_s - K)_+ | \mathcal{F}_t \right].$$

Mais pour tout $0 \leq k \leq T - t$,

$$\mathbb{P}^* \left(\prod_{s=t+1}^T \xi_s = a^k b^{T-t-k} \right) = \frac{(T-t)!}{k!(T-t-k)!} p^k (1-p)^{T-t-k}.$$

Donc

$$V_t(X, Y) = c^{-(T-t)} \sum_{k=0}^{T-t} \frac{(T-t)!}{k!(T-t-k)!} p^k (1-p)^{T-t-k} (S_t k - K)_+,$$

et dans le cas du put européen,

$$V_t(X, Y) = c^{-(T-t)} \sum_{k=0}^{T-t} \frac{(T-t)!}{k!(T-t-k)!} p^{k(1-p)^{T-t-k}} (K - S_t k)_+.$$

10.2.6 La formule de Black–Scholes

Nous allons maintenant établir les formules du modèle continu de la section suivante (à savoir la formule de Black–Scholes) par passage à la limite sur le modèle discret, avant de la réobtenir directement à partir du modèle continu dans la section suivante.

On suppose maintenant que, T étant un réel positif arbitraire, t prend les valeurs

$$0, \frac{1}{N}, \dots, \frac{[NT]}{N},$$

et que

$$S_t = S_0 \prod_{k=1}^{[Nt]} \xi_k^N$$

$$\tilde{S}_t = S_0 \exp \left(\sum_{k=1}^{[Nt]} \eta_k^N \right),$$

avec

$$\eta_k^N = \log \xi_k^N - \frac{r}{N}.$$

On suppose que les η_k^N prennent leurs valeurs dans l'ensemble $\{-\frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\}$. Cela signifie, par rapport aux notations ci-dessus, que (les indices supérieurs N ne sont pas des exposants!) :

$$c^N = \exp(r/N), \quad a^N = \exp(r/N - \sigma/\sqrt{N}), \quad b^N = \exp(r/N + \sigma/\sqrt{N}).$$

La formule pour le prix du call (resp. du put) devient donc, si $Z_t^N := \sum_{k=1}^{[Nt]} \eta_k^N$,

$$\mathbb{E}^* \left[(S_0 \exp(Z_T^N) - K e^{-rT})_+ \right]$$

(resp.

$$\mathbb{E}^* \left[(K e^{-rT} - S_0 \exp(Z_T^N))_+ \right]).$$

Il reste à trouver la loi limite de Z_T^N quand $N \rightarrow \infty$ sous \mathbb{P}^* . On a le

Théorème 10.2.10. Si $Z_t^N := \sum_{k=1}^{[Nt]} \eta_k^N$ et pour chaque N les $\{\eta_k^N, k \geq 0\}$ sont i.i.d. à valeurs dans $\{-\frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\}$, avec $\mathbb{E}\eta_k^N = \mu_N$, et $N\mu_N \rightarrow \mu$ quand $N \rightarrow \infty$, alors sous \mathbb{P} , quand $N \rightarrow \infty$,

$$Z_t^N \Rightarrow \mu t + \sigma B_t, \quad t \geq 0.$$

Preuve On sait (cf. par exemple Breiman [*Probability*] page 180) que si une v.a.r. X admet un moment d'ordre 3, pour tout $r \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}(\exp(irX)) = 1 + ir\mathbb{E}(X) - \frac{r^2}{2}\mathbb{E}(X^2) - i\frac{r^3}{6}(\mathbb{E}(X^3) + \delta(X, r)),$$

avec $|\delta(X, r)| \leq 3\mathbb{E}(|X|^3)$. Donc

$$\mathbb{E}(\exp(ir\eta_k^N)) = 1 + ir\mu_N - \frac{r^2\sigma^2}{2N} + O(N^{-3/2}),$$

donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\exp(irZ_t^N)) &= \left(1 + ir\mu_N - \frac{r^2\sigma^2}{2N} + O(N^{-3/2})\right)^{[Nt]} \\ &\rightarrow \exp\left(ir\mu t - \frac{r^2\sigma^2 t}{2}\right). \end{aligned}$$

quand $N \rightarrow \infty$. ◇

Pour pouvoir appliquer ce théorème, il nous reste à calculer l'espérance de η_k^N sous \mathbb{P}^* . Cette dernière probabilité est caractérisée par l'identité

$$\mathbb{E}^* \exp(\eta_k^N) = 1,$$

soit, avec $p_a := \mathbb{P}^*(\eta_k^N = -\frac{\sigma}{\sqrt{N}})$,

$$\exp(-\frac{\sigma}{\sqrt{N}})p_a + \exp(\frac{\sigma}{\sqrt{N}})p_b = 1,$$

d'où

$$p_a = \frac{e^{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} - 1}{e^{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} - e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{N}}}}, \quad p_b = \frac{1 - e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{N}}}}{e^{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} - e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{N}}}},$$

et

$$\mathbb{E}^* \eta_k^N = -\frac{\sigma^2}{2N} + o\left(\frac{1}{N}\right).$$

Il résulte alors du théorème 10.2.10 que sous \mathbb{P}^* ,

$$Z_t^N \Rightarrow -\frac{\sigma^2}{2}t + \sigma B_t.$$

On en déduit la formule limite pour le prix du call :

$$C_0 = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(S_0 e^{-\frac{\sigma^2 T}{2} + \sigma \sqrt{T} y} - K e^{-rT} \right)_+ e^{-y^2/2} dy,$$

et celle du put

$$P_0 = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(K e^{-rT} - S_0 e^{-\frac{\sigma^2 T}{2} + \sigma \sqrt{T} y} \right)_+ e^{-y^2/2} dy.$$

Ces formules se réécrivent comme suit en fonction de la fonction de répartition F de la loi normale centrée réduite.

$$\begin{aligned} C_0 &= S_0 F(d_1) - K e^{-rT} F(d_2), \\ P_0 &= K e^{-rT} F(-d_2) - S_0 F(-d_1), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{1}{\sigma \sqrt{T}} \log \left(\frac{S_0}{K} \right) + \frac{r \sqrt{T}}{\sigma} + \frac{\sigma \sqrt{T}}{2}, \\ d_2 &= \frac{1}{\sigma \sqrt{T}} \log \left(\frac{S_0}{K} \right) + \frac{r \sqrt{T}}{\sigma} - \frac{\sigma \sqrt{T}}{2}. \end{aligned}$$

Notons que l'on retrouve bien la parité call-put, à condition de remarquer que $F(d_i) + F(-d_i) = 1$, $i = 1, 2$.

10.3 Le modèle et la formule de Black-Scholes

On va maintenant considérer un modèle où le cours du sous-jacent S_t varie en temps continu, $t \in \mathbb{R}_+$, et le cours S_t prend ses valeurs lui aussi dans \mathbb{R}_+ .

10.3.1 Introduction au calcul stochastique

Toutes les v.a. et les processus qui suivent seront définis sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Le modèle de Black-Scholes stipule que

$$S_t = S_0 \exp(\mu t + \sigma B_t),$$

où $\mu \in \mathbb{R}$ est la *dérive* et $\sigma \in \mathbb{R}$ est appelée la *volatilité*. $\{B_t, t \geq 0\}$ est un *mouvement brownien (standard)*.

Définition 10.3.1. *Un processus stochastique $\{B_t, t \geq 0\}$ est appelé mouvement brownien si ses trajectoires sont continues, $B_0 = 0$ et*

- (i) *pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$, la suite $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ est une suite de v.a. indépendantes ;*
- (ii) *pour tout $0 \leq s < t$, la loi de $B_t - B_s$ est la loi $N(0, t - s)$.*

On en déduit que le processus $\{\log\left(\frac{S_t}{S_0}\right), t \geq 0\}$ est à accroissements indépendants (i.e. possède lui aussi la propriété (i) de la définition), et que pour $0 \leq s < t$, la loi de $\log\frac{S_t}{S_s}$ est la loi $N(\mu(t-s), \sigma^2(t-s))$. Le processus $\{S_t\}$ est appelé *mouvement brownien géométrique*.

Une propriété fondamentale du mouvement brownien est donnée par la

Proposition 10.3.2. *Soit $t > 0$, et $0 = t_0^n < t_1^n < \dots < t_n^n = t$ une suite de subdivisions de l'intervalle $[0, t]$ telle que $\sup_{k \leq n} (t_k^n - t_{k-1}^n) \rightarrow 0$, quand $n \rightarrow \infty$.*

Alors

$$\sum_{k=1}^n (B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n})^2 \rightarrow t,$$

en moyenne quadratique, quand $n \rightarrow \infty$.

Preuve

On a

$$\mathbb{E} \sum_{k=1}^n (B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n})^2 = t.$$

Or

$$\begin{aligned} \text{Var} \left(\sum_{k=1}^n (B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n})^2 \right) &= \sum_{k=1}^n \text{Var} \left[(B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n})^2 \right] \\ &= 2 \sum_{k=1}^n (t_k^n - t_{k-1}^n)^2 \\ &\leq 2t \sup_{k \leq n} (t_k^n - t_{k-1}^n) \\ &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

quand $n \rightarrow \infty$. ◇

Ce résultat indique que les trajectoires du mouvement brownien sont très irrégulières. Si elles étaient dérivables (avec une dérivée intégrable), la limite ci-dessus ne serait pas t mais 0 (exercice). Malgré cela, on va définir une *intégrale stochastique* du type

$$\int_0^t \varphi_s dB_s, \quad t \geq 0,$$

(que l'on ne peut pas écrire $\int_0^t \varphi_s \frac{dB_s}{ds} ds$, parce que la dérivée $\frac{dB_s}{ds}$ n'existe pas).

Commençons par considérer le cas d'une fonction $\{f(s), s \geq 0\}$, *déterministe*, telle que

$$\int_0^T f^2(s) ds < \infty.$$

Alors on va définir *l'intégrale de Wiener*

$$\int_0^t f(s) dB_s, \quad \text{pour } 0 \leq t \leq T.$$

Supposons tout d'abord que f est en escalier, c'est à dire

$$f(s) = \sum_{k=1}^n f_k \mathbf{1}_{]t_k, t_{k+1}]}]$$

avec $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq T$. Alors une définition naturelle de l'intégrale de Wiener est

$$\int_0^t f(s) dB_s = \sum_{k=1}^n f_k (B_{t \wedge t_{k+1}} - B_{t \wedge t_k})$$

On déduit aisément des propriétés du mouvement brownien que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \int_0^t f(s) dB_s &= 0 \\ \mathbb{E} \left[\left(\int_0^t f(s) dB_s \right)^2 \right] &= \mathbb{E} \left| \sum_{k=1}^n f_k (B_{t \wedge t_{k+1}} - B_{t \wedge t_k}) \right|^2 \\ &= \sum_{k=1}^n f_k^2 (t \wedge t_{k+1} - t \wedge t_k) \\ &= \int_0^t f^2(s) ds. \end{aligned}$$

La formule d'isométrie

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t f(s) dB_s \right)^2 \right] = \int_0^t f^2(s) ds$$

permet d'étendre la définition de l'intégrale de Wiener, des fonctions en escalier à toutes les fonctions de carré intégrable. On vérifie aisément que le processus

$$\left\{ \int_0^t f(s) dB_s, 0 \leq t \leq T \right\}$$

est un processus gaussien, à accroissements indépendants, de moyenne nulle, et il vérifie

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t f(s) dB_s \right)^2 \right] = \int_0^t f^2(s) ds, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Nous allons maintenant indiquer la construction de l'intégrale d'Itô. Pour cela, il nous faut introduire la filtration du mouvement brownien :

$$\mathcal{F}_t \triangleq \mathcal{F}_t^B = \sigma\{B_s; 0 \leq s \leq t\} \vee \mathcal{N},$$

i.e. \mathcal{F}_t est la plus petite tribu qui rend mesurables toutes les v.a. B_s , pour $0 \leq s \leq t$, et qui contient en outre les ensembles de \mathbb{P} -mesure nulle de la tribu \mathcal{F} .

Notons $M^2(0, T)$ le sous-espace de Hilbert de $L^2(\Omega \times [0, T], \mathcal{F} \otimes B([0, T]), d\mathbb{P} \times dt)$ des classes d'équivalence des processus $\{\varphi_t(\omega), \omega \in \Omega, 0 \leq$

$t \leq T$ qui sont tels que pour tout $0 \leq t \leq T$, la v.a. φ_t est \mathcal{F}_t mesurable. On dit qu'un tel processus $\{\varphi_t\}$ est *adapté*.

La construction que nous avons faite de l'intégrale de Wiener s'étend à l'intégrale d'Itô comme suit. On considère tout d'abord des processus de la forme

$$\varphi_s(\omega) = \sum_{k=1}^n \varphi_k(\omega) \mathbf{1}_{]t_k, t_{k+1}]}(s),$$

où φ_k est supposée \mathcal{F}_{t_k} mesurable et de carré intégrable, $1 \leq k \leq n$. Pour un tel φ ,

$$\int_0^t \varphi_s dB_s \triangleq \sum_{k=1}^n \varphi_k (B_{t \wedge t_{k+1}} - B_{t \wedge t_k}).$$

On va utiliser de façon répétée le fait suivant qui résulte de la propriété (i) du mouvement brownien et de la définition de \mathcal{F}_t (exercice) : $\forall 0 \leq s < t$, \mathcal{F}_s et $B_t - B_s$ sont indépendants. Alors

$$\mathbb{E} \int_0^t \varphi_s dB_s = 0$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\int_0^t \varphi_s dB_s \right)^2 \right] &= \sum_k \mathbb{E} \left[\varphi_k^2 (B_{t \wedge t_{k+1}} - B_{t \wedge t_k})^2 \right] \\ &\quad + 2 \sum_{\ell < k} \mathbb{E} \left[\varphi_\ell (B_{t \wedge t_{\ell+1}} - B_{t \wedge t_\ell}) \varphi_k (B_{t \wedge t_{k+1}} - B_{t \wedge t_k}) \right] \\ &= \sum_k \mathbb{E}(\varphi_k^2)(t \wedge t_{k+1} - t \wedge t_k) \\ &= \mathbb{E} \int_0^t \varphi_s^2 ds. \end{aligned}$$

A nouveau, la propriété d'isométrie que nous venons d'établir permet d'étendre l'intégrale d'Itô à tout $\varphi \in M^2[0, T]$.

On a le

Théorème 10.3.3. *Pour tout $\varphi \in M^2[0, T]$, $0 \leq t \leq T$, l'intégrale d'Itô*

vérifie

$$\mathbb{E} \int_0^t \varphi_s dB_s = 0,$$

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t \varphi_s dB_s \right)^2 \right] = \mathbb{E} \int_0^t \varphi_s^2 ds.$$

En outre le processus $\{\int_0^t \varphi_s dB_s, 0 \leq t \leq T\}$ est une martingale, puisque si $0 < s < t$,

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t \varphi_r dB_r \mid \mathcal{F}_s \right] = \int_0^s \varphi_r dB_r.$$

Nous admettons que l'on peut étendre l'intégrale d'Itô à des $\{\varphi_t\}$ adaptés qui vérifient seulement

$$\int_0^T \varphi_t^2 dt < \infty \text{ p. s.}$$

Cependant, pour un tel $\{\varphi_t\}$ on ne sait pas a priori si la v.a. $\int_0^t \varphi_s dB_s$ est intégrable, et les trois formules du théorème 10.3.3 n'ont plus de raison d'être vraies. On a cependant toujours l'inégalité (exercice)

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t \varphi_s dB_s \right)^2 \right] \leq \mathbb{E} \int_0^t \varphi_s^2 ds$$

Nous pouvons maintenant établir la *formule d'Itô* :

Théorème 10.3.4. *Si $\Phi \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, alors pour tout $t > 0$,*

$$\begin{aligned} \Phi(t, B_t) &= \Phi(0, B_0) + \int_0^t \Phi'_s(s, B_s) ds \\ &\quad + \int_0^t \Phi'_x(s, B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t \Phi''_{xx}(s, B_s) ds. \end{aligned}$$

Preuve Pour simplifier, on va considérer seulement le cas d'une fonction $\Phi \in C_b^2(\mathbb{R})$ et on va montrer qu'alors

$$\Phi(B_t) = \Phi(0) + \int_0^t \Phi'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t \Phi''(B_s) ds.$$

Posons $t_k^n = \frac{k}{n}t$, $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$. Alors

$$\begin{aligned}\Phi(B_t) - \Phi(0) &= \sum_{k=1}^n (\Phi(B_{t_k^n}) - \Phi(B_{t_{k-1}^n})) \\ &= \sum_{k=1}^n \Phi'(B_{t_{k-1}^n})(B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \Phi''(\Theta_k^n)(B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n})^2\end{aligned}$$

par la formule de Taylor à l'ordre 2, avec Θ_k^n appartenant à l'intervalle $[B_{t_{k-1}^n}, B_{t_k^n}]$. Il résulte de la formule d'isométrie de l'intégrale d'Itô que

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left(\left| \int_0^t \Phi'(B_s) dB_s - \sum_{k=1}^n \Phi'(B_{t_{k-1}^n})(B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n}) \right|^2 \right) &= \mathbb{E} \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} |\Phi'(B_s) - \Phi'(B_{t_{k-1}^n})|^2 ds \\ &\rightarrow 0 \text{ par convergence dominée.}\end{aligned}$$

On remarque ensuite que

$$\begin{aligned}&\left| \sum_{k=1}^n (\Phi''(B_{t_{k-1}^n}) - \Phi''(\Theta_k^n)) (B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n})^2 \right| \\ &\leq \sup_k |\Phi''(B_{t_{k-1}^n}) - \Phi''(\Theta_k^n)| \sum_{k=1}^n (B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n})^2 \\ &\rightarrow 0\end{aligned}$$

en probabilité, quand $n \rightarrow \infty$. Enfin une variante de l'argument de la preuve de la proposition 10.3.2 permet de montrer que

$$\sum_{k=1}^n \Phi''(B_{t_{k-1}^n})(B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n})^2 \rightarrow \int_0^t \Phi''(B_s) ds,$$

quand $n \rightarrow \infty$. Plus précisément, on montre d'une part que

$$\mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=1}^n \Phi''(B_{t_{k-1}^n}) \left[(B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n})^2 - (t_k^n - t_{k-1}^n) \right] \right)^2 \right] \rightarrow 0,$$

et d'autre part que

$$\sum_{k=1}^n \Phi''(B_{t_{k-1}^n})(t_k^n - t_{k-1}^n) \rightarrow \int_0^t \Phi''(B_s) ds.$$

◇

La formule d'Itô se généralise comme suit.

On appelle *processus d'Itô* un processus $\{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ de la forme

$$X_t = x + \int_0^t \psi_s ds + \int_0^t \varphi_s dB_s, \quad (10.1)$$

où $x \in \mathbb{R}$, ψ et φ sont des processus adaptés tels que

$$\int_0^T (|\psi_t| + |\varphi_t|^2) dt < \infty \text{ p.s.}$$

On a alors le résultat suivant, dont la preuve est analogue à celle du Théorème 10.3.4 :

Théorème 10.3.5. *Si $\{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ est un processus d'Itô de la forme (10.1), et $\Phi \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, alors pour tout $t > 0$,*

$$\begin{aligned} \Phi(t, X_t) &= \Phi(0, x) + \int_0^t \Phi'_s(s, X_s) ds \\ &+ \int_0^t \Phi'_x(s, X_s) \psi_s ds + \int_0^t \Phi'_x(s, X_s) \varphi_s dB_s \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \Phi''_{xx}(s, X_s) \varphi_s^2 ds. \end{aligned}$$

On aura besoin de la formule d'Itô multidimensionnelle : on considère un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^k \{B_t\}$ (constitué de k mouvements browniens réels mutuellement indépendants), ψ_t adapté à valeurs dans \mathbb{R}^d , φ_t adapté à valeurs dans $\mathbb{R}^{d \times k}$. Alors si $x \in \mathbb{R}^d$, le processus

$$X_t = x + \int_0^t \psi_s ds + \int_0^t \varphi_s dB_s, \quad 0 \leq t \leq T$$

est un processus d'Itô à valeurs dans \mathbb{R}^d .

Si maintenant $\Phi \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^d)$, on a la formule d'Itô :

$$\begin{aligned} \Phi(t, X_t) &= \Phi(0, x) + \int_0^t \Phi'_s(s, X_s) ds + \int_0^t \langle \Phi'_x(s, X_s), \psi_s \rangle ds \\ &\quad + \int_0^t \langle \Phi'_x(s, X_s), \varphi_s dB_s \rangle + \frac{1}{2} \int_0^t \text{Tr}[\Phi''_{xx}(s, X_s) \varphi_s \varphi_s^*] ds \end{aligned}$$

10.3.2 Équations différentielles stochastiques

Soit $f, g : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\sup_{0 \leq t \leq T} (|f(t, 0)| + |g(t, 0)|) < \infty$$

et en outre il existe K tel que

$$|f(t, x) - f(t, y)| + |g(t, x) - g(t, y)| \leq K|x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, t \in [0, T] \quad (10.2)$$

La condition (10.2) est appelée condition de Lipschitz. On a le

Théorème 10.3.6. *Sous les conditions ci-dessus, en particulier (10.2), pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'EDS*

$$X_t = x + \int_0^t f(s, X_s) ds + \int_0^t g(s, X_s) dB_s, \quad 0 \leq t \leq T,$$

admet une unique solution $X \in M^2(0, T)$.

Preuve Notons F l'application de l'espace $M^2(0, T)$ dans lui-même définie par

$$F(X)_t = x + \int_0^t f(s, X_s) ds + \int_0^t g(s, X_s) dB_s, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Une solution de l'EDS est un point fixe de F . Or pour que F admette un unique point fixe, il suffit qu'elle soit une contraction stricte pour une norme bien choisie sur $M^2(0, T)$.

Appliquons la formule d'Itô au processus d'Itô $F(X)_t - F(Y)_t$ et à la fonction $\Phi(t, x) = e^{-\lambda t}|x|^2$ ($\lambda > 0$ qui sera choisi plus loin). On obtient

$$\begin{aligned} & e^{-\lambda T} |F(X)_T - F(Y)_T|^2 + \lambda \int_0^T e^{-\lambda t} |F(X)_t - F(Y)_t|^2 dt \\ &= 2 \int_0^T e^{-\lambda t} (F(X)_t - F(Y)_t) (f(t, X_t) - f(t, Y_t)) dt \\ &+ 2 \int_0^T e^{-\lambda t} (F(X)_t - F(Y)_t) (g(t, X_t) - g(t, Y_t)) dB_t + \int_0^T e^{-\lambda t} |g(t, X_t) - g(t, Y_t)|^2 dt. \end{aligned}$$

Nous allons prendre l'espérance dans cette identité; nous admettrons que l'intégrale stochastique est intégrable et d'espérance nulle. Il vient, en utilisant en outre la condition de Lipschitz :

$$\begin{aligned} & e^{-\lambda T} \mathbb{E} |F(X)_T - F(Y)_T|^2 + \lambda \mathbb{E} \int_0^T e^{-\lambda t} |F(X)_t - F(Y)_t|^2 dt \\ &= \mathbb{E} \int_0^T e^{-\lambda t} [2(F(X)_t - F(Y)_t)(f(t, X_t) - f(t, Y_t)) + |g(t, X_t) - g(t, Y_t)|^2] dt \\ &\leq \mathbb{E} \int_0^T e^{-\lambda t} [2K |F(X)_t - F(Y)_t| \times |X_t - Y_t| + K^2 |X_t - Y_t|^2] dt. \end{aligned}$$

Il résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwartz que

$$\begin{aligned} 2K \mathbb{E} \int_0^T e^{-\lambda t} |F(X)_t - F(Y)_t| \times |X_t - Y_t| dt &\leq \mathbb{E} \int_0^T e^{-\lambda t} |F(X)_t - F(Y)_t|^2 dt \\ &+ K^2 \mathbb{E} \int_0^T e^{-\lambda t} |X_t - Y_t|^2 dt. \end{aligned}$$

Donc

$$(\lambda - 1) \mathbb{E} \int_0^T e^{-\lambda t} |F(X)_t - F(Y)_t|^2 dt \leq 2K^2 \mathbb{E} \int_0^T e^{-\lambda t} |X_t - Y_t|^2 dt$$

On choisit alors $\lambda = 2K^2 + 2$, d'où :

$$\mathbb{E} \int_0^T e^{-(2K^2+2)t} |F(X)_t - F(Y)_t|^2 dt \leq \frac{2K^2}{2K^2+1} \mathbb{E} \int_0^T e^{-(2K^2+2)t} |X_t - Y_t|^2 dt.$$

◇

10.3.3 Formule de Feynman–Kac

On considère l'équation aux dérivées partielles parabolique rétrograde :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + f(x) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2} g^2(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = c(x)u(t, x), \\ 0 \leq t \leq T, \quad x \in \mathbb{R}; \\ u(T, x) = h(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (10.3)$$

On suppose que f, g satisfont la condition (10.2), que c et φ sont continues et bornées sur \mathbb{R} . Pour chaque $0 < t < T, x \in \mathbb{R}$, on note $\{X_s^{t,x}, t \leq s \leq T\}$ la solution de l'EDS :

$$X_s^{t,x} = x + \int_t^s f(X_r^{t,x}) dr + \int_t^s g(X_r^{t,x}) dB_r, \quad t \leq s \leq T.$$

On a alors le

Théorème 10.3.7. *Supposons que $u \in C_b^{1,2}((0, T) \times \mathbb{R})$ est solution de l'EDP (10.3). Alors u est donné par la formule de Feynman–Kac :*

$$u(t, x) = \mathbb{E} \left[h(X_T^{t,x}) \exp \left(- \int_t^T c(X_s^{t,x}) ds \right) \right]$$

Preuve

On applique la formule d'Itô au processus $(X_s^{t,x}, Y_s)$, avec $Y_s = - \int_t^s c(X_r^{t,x}) dr$, et à la fonction $\Phi(s, x, y) = u(s, x) \exp(y)$. Il vient

$$\begin{aligned} u(T, X_T^{t,x}) \exp \left(- \int_t^T c(X_s^{t,x}) ds \right) &= u(t, x) \\ &+ \int_t^T \exp \left(- \int_t^s c(X_r^{t,x}) dr \right) g(X_s^{t,x}) \frac{\partial u}{\partial x}(s, X_s^{t,x}) dB_s \\ &+ \int_t^T \left(\frac{\partial u}{\partial s}(s, X_s^{t,x}) + Lu(s, X_s^{t,x}) - c(X_s^{t,x})u(s, X_s^{t,x}) \right) \exp(Y_s) ds, \end{aligned}$$

où $Lu(s, x) = f(x) \frac{\partial u}{\partial x}(s, x) + \frac{1}{2} g^2(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(s, x)$. Il reste à prendre l'espérance, et à exploiter le fait que u est solution de (10.3) pour conclure.

10.3.4 L'EDP de Black-Scholes

On va présenter une première façon de résoudre le problème du *pricing* et de la *couverture* d'une option européenne, en passant par la dérivation d'une EDP.

On s'intéresse à une option européenne, qui rapporte à son détenteur $H = h(S(T))$ à l'échéance T . Encore une fois nous pensons aux deux cas $h(x) = (x - K)_+$ et $h(x) = (K - x)_+$.

Le prix de cette option à l'instant t est E_t , $0 \leq t \leq T$. Bien sûr on a $E_T = h(S(T))$. On va supposer - on le retrouvera plus loin - qu'il existe une application

$$u : [0, T] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$$

telle que pour tout $0 \leq t \leq T$,

$$E_t = u(t, S_t).$$

Nous allons en outre supposer - là encore on peut le démontrer, mais c'est un petit peu plus difficile - que

$$u \in C^{1,2}((0, T) \times \mathbb{R}_+),$$

si bien que l'on peut appliquer la formule d'Itô.

Notons que l'on a

$$E_t = u(t, S_0 \exp(\mu t + \sigma B_t)),$$

donc une application de la formule d'Itô du théorème 10.3.4 nous donne

$$\begin{aligned} dE_t &= \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, S_t) + \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) S_t \frac{\partial u}{\partial x}(t, S_t) + \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, S_t) \right) dt \\ &\quad + \sigma S_t \frac{\partial u}{\partial x}(t, S_t) dB_t \end{aligned}$$

L'absence d'opportunité d'arbitrage nous impose que s'il existe une stratégie admissible $\{(X_t, Y_t), 0 \leq t \leq T\}$ telle que la richesse associée à l'instant final soit

$$V_T(X, Y) = h(S_T),$$

alors nécessairement

$$V_t(X, Y) = E_t, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Par ailleurs,

$$V_t(X, Y) = X_t R_t + Y_t S_t,$$

et la condition d'autofinancement s'écrit en temps continu

$$dV_t(X, Y) = X_t dR_t + Y_t dS_t.$$

Mais

$$dR_t = rR_t dt$$

et en utilisant une fois de plus la formule d'Itô, on obtient

$$dS_t = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) S_t dt + \sigma S_t dB_t.$$

On déduit des dernières identités une seconde formule pour la différentielle de E_t , à savoir

$$dE_t = \left(rX_t R_t + \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) Y_t S_t \right) dt + \sigma Y_t S_t dB_t$$

On va maintenant utiliser un résultat bien connu des aficionados du calcul stochastique, à savoir que lorsque deux processus d'Itô sont identiques, on a nécessairement identité des coefficients de dB_t , et identité des coefficients de dt (cf. exercice *xx*).

D'où d'une part :

$$\sigma Y_t S_t = \sigma S_t \frac{\partial u}{\partial x}(t, S_t),$$

soit encore

$$Y_t = \frac{\partial u}{\partial x}(t, S_t)$$

(on vient d'identifier la stratégie de couverture, sur laquelle nous reviendrons ci-dessous), et en outre

$$\begin{aligned} rX_t R_t + \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) Y_t S_t &= \frac{\partial u}{\partial t}(t, S_t) + \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) S_t \frac{\partial u}{\partial x}(t, S_t) \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, S_t) \end{aligned}$$

Mais on sait déjà que

$$Y_t = \frac{\partial u}{\partial x}(t, S_t),$$

d'où l'on tire, grâce à

$$\begin{aligned} X_t R_t + Y_t S_t &= u(t, S_t), \\ X_t &= R_t^{-1} \left(u(t, S_t) - S_t \frac{\partial u}{\partial x}(t, S_t) \right). \end{aligned}$$

Donc la relation ci-dessus devient

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, S_t) + r S_t \frac{\partial u}{\partial x}(t, S_t) + \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, S_t) = r u(t, S_t) \\ u(T, S_T) = h(S_T) \end{cases}$$

Une C.N.S. pour que ces relations soient satisfaites p.s. est que u soit solution de l'EDP parabolique

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + r x \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) + \frac{\sigma^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = r u(t, x); & 0 < t < T, x \in \mathbb{R}_+; \\ u(T, x) = h(x), & x \in \mathbb{R}_+. \end{cases} \quad (10.4)$$

10.3.5 La formule de Black-Scholes (2ème dérivation)

Rappelons que

$$S_t = S_0 + \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) \int_0^t S_s ds + \sigma \int_0^t S_s dB_s.$$

Posons

$$B_t^* := B_t + \left(\frac{\mu - r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2} \right) t.$$

Alors

$$S_t = S_0 + r \int_0^t S_s ds + \sigma \int_0^t S_s dB_s^*.$$

Soit maintenant \mathbb{P}^* une probabilité sur (Ω, \mathcal{F}) telle que sous \mathbb{P}^* , $\{B_t^*, t \geq 0\}$ soit un mouvement brownien. Non seulement une telle probabilité existe, mais on verra ci-dessous qu'elle est équivalente à la probabilité \mathbb{P} (sous laquelle c'est $\{B_t\}$ qui est un brownien).

Notons que

$$d(R_t^{-1} S_t) = \sigma R_t^{-1} S_t dB_t^*,$$

donc le prix actualisé $\tilde{S}_t = R_t^{-1} S_t$ est une martingale sous \mathbb{P}^* , qui a nouveau s'interprète comme la *probabilité risque neutre*.

Il résulte alors de la formule de Feynman–Kac (théorème 10.3.7) et de l'équation (10.4) que

$$u(t, x) = \mathbb{E}^* [e^{-r(T-t)} h(S_T) | S_t = x],$$

soit

$$E_t = u(t, S_t) = \mathbb{E}^* [e^{-r(T-t)} h(S_T) | S_t],$$

et en particulier

$$E_0 = u(0, S_0) = \mathbb{E}^* [e^{-rT} h(S_T)].$$

Sachant que sous \mathbb{P}^* , la loi de $\log(S_T/S_0)$ est la loi $N((r - \frac{\sigma^2}{2})T, \sigma^2 T)$, on en déduit en particulier les formules pour C_0 et P_0 que l'on avait obtenues une première fois à la section 10.2.6.

10.3.6 Une généralisation du modèle de Black–Scholes

Dans le cas du call, on remarque que $h'(x) \geq 0$, et on s'attend à ce que $\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \geq 0$: toutes choses égales par ailleurs, si le cours du sous-jacent monte, le prix de l'option monte ; donc on s'attend à ce que $Y_t \geq 0$. Notons que ces inégalités sont renversées dans le cas du put ! Ceci dit, aux frais de transaction près, l'évolution du prix du sous-jacent ne dépend pas de savoir quelle type de position on a sur ce sous-jacent.

Par contre rien ne dit si la somme X_t mise sur l'actif non risqué est positive ou négative (i.e. s'il s'agit d'un dépôt ou d'un prêt), et l'hypothèse que le taux d'intérêt est le même pour les deux cas est tout à fait irréaliste.

Supposons donc que les dépôts bénéficient d'un taux r^+ , alors que les prêts se font aux taux r^- . En posant

$$R_t^+ = e^{r^+ t}, \quad R_t^- = e^{r^- t},$$

on a, dans le cas d'une stratégie autofinancée, si $X_t^+ = \max(0, X_t)$, $X_t^- = \max(0, -X_t)$,

$$dV_t = (X_t^+ r^+ R_t^+ - X_t^- r^- R_t^-) dt + Y_t dS_t.$$

Si l'on reprend la démarche qui a conduit à la section 10.3.4 à l'EDP de Black–Scholes, on voit que l'on obtient à nouveau

$$Y_t = \frac{\partial u}{\partial x}(t, S_t),$$

et cette fois

$$\begin{aligned} X_t^+ R_t^+ &= (u(t, S_t) - S_t \frac{\partial u}{\partial x}(t, S_t))_+ \\ X_t^- R_t^- &= (u(t, S_t) - S_t \frac{\partial u}{\partial x}(t, S_t))_-, \end{aligned}$$

d'où l'on tire l'EDP *non linéaire*.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \frac{\sigma^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = r^+ \left(u(t, x) - x \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right)^+ - r^- \left(u(t, x) - x \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right)^-; \\ u(T, x) = h(x) \end{cases}$$

10.3.7 3ème dérivation de la formule de Black-Scholes

Nous allons nous poser une question un peu plus générale que la question précédente.

Etant donnée une option qui rapporte à son détenteur la somme $H(\geq 0)$ à l'instant T , quel est le juste prix de cette option? On suppose que la v.a. H est \mathcal{F}_T mesurable, où à nouveau, aux ensembles de mesure nulle près,

$$\mathcal{F}_t = \sigma\{B_s, 0 \leq s \leq t\} = \sigma\{S_s; 0 \leq s \leq t\}.$$

Un exemple particulier est le cas où

$$H = h(S_T),$$

notamment pour le call et le put européens, mais on verra plus loin d'autres types d'options, qui ne sont pas de cette forme particulière.

Nous allons nous laisser guider par ce que nous avons fait dans le cas du modèle discret, et dans les sections précédentes.

On pose la question sous la forme suivante : trouver V_0 et une stratégie autofinancée $\{(X_t, Y_t); 0 \leq t \leq T\}$, tels que

$$\begin{aligned} V_T(X, Y) &= V_0 + \int_0^T X_t dR_t + \int_0^T Y_t dS_t \\ &= H. \end{aligned}$$

A nouveau $R_t = e^{rt}$, et on définit la valeur actualisée du portefeuille à l'instant t :

$$\begin{aligned} \tilde{V}_t(X, Y) &= R_t^{-1} V_t(X, Y) \\ &= X_t + \tilde{Y}_t, \end{aligned}$$

en posant $\tilde{Y}_t \triangleq R_t^{-1} Y_t S_t$; c'est la valeur actualisée de la partie du portefeuille investie sur l'actif risqué. Alors

$$\tilde{Y}_t = \tilde{V}_t - X_t.$$

En outre

$$\begin{aligned} d\tilde{V}_t(X, Y) &= -r\tilde{V}_t dt + R_t^{-1} dV_t \\ &= -r\tilde{V}_t dt + rX_t dt + R_t^{-1} Y_t dS_t \\ &= -r\tilde{Y}_t dt + R_t^{-1} Y_t dS_t. \end{aligned}$$

Mais

$$dS_t = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) S_t dt + \sigma S_t dB_t,$$

donc

$$d\tilde{V}_t = \left(\mu - r + \frac{\sigma^2}{2} \right) \tilde{Y}_t dt + \sigma \tilde{Y}_t dB_t.$$

Posons finalement

$$B_t^* \triangleq \left(\frac{\mu - r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2} \right) t + B_t.$$

Alors

$$d\tilde{V}_t = \sigma \tilde{Y}_t dB_t^*,$$

soit

$$\tilde{V}_t = e^{-rT} H - \sigma \int_t^T \tilde{Y}_s dB_s^*$$

Soit maintenant \mathbb{P}^* la probabilité sur (Ω, \mathcal{F}_T) telle que

$$\{B_t^*; 0 \leq t \leq T\}$$

soit un \mathbb{P}^* mouvement brownien. On suppose que

$$\mathbb{E}^*(H^2) < \infty.$$

Sous cette hypothèse, on montre aisément que

$$\mathbb{E}^* \int_0^T |\tilde{Y}_t|^2 dt < \infty,$$

donc en particulier

$$\tilde{V}_t = e^{-rT} \mathbb{E}^*(H | \mathcal{F}_t),$$

soit

$$V_t = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^*(H | \mathcal{F}_t),$$

ce qui redonne encore une fois la formule de Black-Scholes pour les prix du call et du put européen.

Qu'en est-il de la stratégie de couverture ? Sous \mathbb{P}^* , $\{\tilde{V}_t\}$ est une martingale de carré intégrable adaptée à la filtration $\mathcal{F}_t^{B^*}$. Un théorème général d'Itô nous dit alors que

$$\tilde{V}_t = V_0 + \int_0^t Z_s dB_s^*, \quad 0 \leq t \leq T,$$

avec un unique $Z \in M^2(0, T)$. On retrouve

$$Y_t = \frac{R_t Z_t}{\sigma S_t}.$$

Dans le cas où $H = h(S_T)$, on a l'EDP de Black-Scholes et Y_t se calcule en fonction de la dérivée de sa solution. Dans des cas plus généraux, le calcul peut se faire (mais de façon pas très explicite !) avec d'autres outils de calcul stochastique, par exemple le calcul de Malliavin.

Terminons cette section par deux exemples classiques d'options qui ne sont pas de la forme $H = h(S_T)$.

Exemple 3.1 Option barrière d'achat

C'est une option qui rapporte à l'échéance :

$$H = \mathbf{1}_{\{\sup_{0 \leq t \leq T} S_t < \beta\}} (S_T - K)_+,$$

autrement dit on a le même gain qu'avec une option d'achat européenne, mais on n'a le droit d'exercer cette option que si le cours du sous-jacent n'a jamais atteint la barrière β .

Exemple 3.2 Option d'achat asiatique

Il s'agit d'une option qui rapporte à son acquéreur à l'échéance

$$H = \left(\frac{1}{T} \int_0^T S_t dt - K \right)_+$$

10.3.8 Le théorème de Girsanov

La probabilité \mathbb{P}^* peut paraître mystérieuse. En fait elle apparaît naturellement dans le théorème de Girsanov, dont nous allons en fait donner une version simplifiée due à Cameron et Martin.

Etablissons tout d'abord le

Lemme 10.3.8. *Un processus continu $\{B_t, 0 \leq t \leq T\}$ est un mouvement brownien ssi pour tout n , tous $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq T$, $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E} \exp \left[\sum_1^n u_k (B_{t_k} - B_{t_{k-1}}) \right] = \exp \left[\frac{1}{2} \sum_1^n u_k^2 (t_k - t_{k-1}) \right]$$

Preuve

La CN résulte de ce que si $\{B_t\}$ est un mouvement brownien, la loi du v.a. $(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ est la loi $N(0, \Lambda_n)$, avec Λ_n matrice diagonale $n \times n$, dont le k -ième terme diagonal vaut $t_k - t_{k-1}$.

La CS résulte de ce que si la formule est vraie, la loi de $(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ est la loi $N(0, \Lambda_n)$, pour tous n , $0 < t_1 < \dots < t_{n-1} \leq t_n$, donc (i) et (ii) de la Définition 10.3.1 sont satisfaits.

◇

On a alors le

Théorème 10.3.9. *Soit $\{B_t, 0 \leq t \leq T\}$ un mouvement brownien défini sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.*

Si $f \in L^2(0, T)$,

$$B_t^* = B_t - \int_0^t f(s) ds, \quad 0 \leq t \leq T;$$

$$Z_t = \exp \left(\int_0^t f(s) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t f^2(s) ds \right)$$

et \mathbb{P}^ est la probabilité sur (Ω, \mathcal{F}_T) telle que*

$$\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} = Z_T,$$

alors $\{B_t^, 0 \leq t \leq T\}$ est un mouvement brownien sous \mathbb{P}^* .*

Preuve :

Au vu du lemme précédent, il suffit de montrer que pour tout $g \in L^2(0, T)$,

$$\mathbb{E}^* \left[\exp \left(\int_0^T g(t) dB_t^* \right) \right] = \exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T g^2(t) dt \right)$$

Mais

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^* \left(\int_0^T g(t) dB_t^* \right) &= \mathbb{E}^* \exp \left\{ \int_0^T [f(t) + g(t)] dB_t - \frac{1}{2} \int_0^T [2f(t)g(t) + f^2(t)] dt \right\} \\ &= \exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T g^2(t) dt \right) \end{aligned}$$

10.3.9 Propriété de Markov et EDP

Pour obtenir l'“EDP de Black-Scholes” à la section 10.3.4, nous avons admis qu'à chaque instant t , le prix E_t de l'option est une fonction du cours du sous-jacent S_t , i.e. que E_t s'écrit

$$E_t = u(t, S_t)$$

On a vu à la section 10.3.7 que

$$E_t = \frac{R_t}{R_T} \mathbb{E}^*(H | \mathcal{F}_t).$$

Pourquoi et à quelle condition cette espérance conditionnelle est-elle une fonction de S_t ?

Définition 10.3.10. Soit $\{X_t, t \geq 0\}$ un processus stochastique. $\{X_t\}$ est appelé processus de Markov si pour tout $0 < s < t$, toute $f \in C_b(\mathbb{R})$,

$$\mathbb{E}[f(X_t) | \mathcal{F}_s^X] = \mathbb{E}[f(X_t) | X_s],$$

où $\mathcal{F}_s^X \triangleq \sigma\{X_r; 0 \leq r \leq s\}$ (à des ensembles de mesure nulle près).

Remarquons que (à des ensembles de mesure nulle près) $\mathcal{F}_t = \sigma\{S_s; 0 \leq s \leq t\}$. On a la

Proposition 10.3.11. Sous \mathbb{P}^* , $\{S_t; 0 \leq t \leq T\}$ est un processus de Markov.

Preuve : Si $0 < s < t$,

$$S_t = S_s \exp \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t - s) + \sigma (B_t^* - B_s^*) \right]$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^* [f(S_t) | \mathcal{F}_s] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f \left(S_s \exp \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t - s) + \sigma \sqrt{t - s} x \right] \right) e^{-x^2/2} dx \\ &= \mathbb{E}^* [f(S_t) | S_s], \end{aligned}$$

puisque S_s et \mathcal{F}_s mesurable, et $B_t^* - B_s^*$ est indépendante de \mathcal{F}_s sous \mathbb{P}^* . \diamond

On peut donc en fait utiliser la formule de Feynman–Kac à l’envers, i.e. déduire l’EDP satisfaite par la fonction $u(t, x)$ de la formule

$$E_t = \mathbb{E}^* [e^{-r(T-t)} h(S_T) | S_t].$$

Nous pouvons maintenant nous demander si dans les cas de l’option barrière et de l’option asiatique, le calcul du prix de l’option peut encore se ramener à la résolution d’une EDP.

EDP associée à l’option barrière

Reprenons l’option barrière d’achat de l’exemple 3.1. Posons

$$S_t^\beta = S_{t \wedge \tau_\beta},$$

où $\tau_\beta = \inf\{t \leq T; S_t \geq \beta\}$, et

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq K; \\ x - K, & \text{si } K \leq x < \beta; \\ 0, & \text{si } x \geq \beta. \end{cases}$$

Alors, dans le cas de l’option barrière d’achat, la v.a. H se réécrit

$$H = h(S_t^\beta).$$

Par un argument analogue à celui de la proposition 10.3.11, on montre que $\{S_t^\beta, 0 \leq t \leq T\}$ est un processus de Markov. Sous la *probabilité risquée*

neutre, on a à la fois que $R_t^{-1}S_t$ et $R_{t \wedge \tau_\beta}^{-1}S_{t \wedge \tau_\beta}$ sont des martingales, et les arguments de la section 10.3.7 conduisent à nouveau à la formule

$$E_t = \mathbb{E}^* \left[\frac{R_t}{R_T} h(S_T^\beta) | S_t^\beta \right]$$

Notons que pour $t \geq \tau_\beta$, $E_t = 0$. Soit, si $E_t = u(t, S_t^\beta)$, $u(t, \beta) = 0$. L'EDP devient

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + rx \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) + \frac{\sigma^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = ru(t, x), & 0 < t < T, 0 < x < \beta; \\ u(t, \beta) = 0; & 0 < t < T; u(T, x) = h(x), & 0 < x < \beta. \end{cases}$$

EDP associée à l'option asiatique

Posons $U_t = \int_0^t S_s ds$. Alors, dans le cas de l'option asiatique,

$$H = h(U_T),$$

avec cette fois $h(x) = (T^{-1}x - K)_+$. Il n'est pas trop difficile de vérifier que $\{U_t, 0 \leq t \leq T\}$ n'est pas un processus de Markov; par contre $\{(S_t, U_t); 0 \leq t \leq T\}$ est un processus de Markov, d'où

$$\begin{aligned} E_t &= \mathbb{E}^* \left(\frac{R_t}{R_T} H | \mathcal{F}_t \right) \\ &= \mathbb{E}^* \left(\frac{R_t}{R_T} H | S_t, U_t \right) \\ &= u(t, S_t, U_t), \end{aligned}$$

où $\{u(t, x, y); 0 \leq t \leq T, x > 0, y > 0\}$ est solution de l'EDP

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x, y) + rx \frac{\partial u}{\partial x}(t, x, y) + x \frac{\partial u}{\partial y}(t, x, y) + \frac{\sigma^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x, y) = ru(t, x, y), \\ 0 \leq t \leq T, x, y > 0; \\ u(T, x, y) = h(y), \\ x > 0, y > 0. \end{cases}$$

10.3.10 Option portant sur plusieurs sous-jacent

Jusqu'ici nous nous sommes contentés d'étudier des options portant sur un seul actif risqué. Même si c'est le cas d'un grand nombre d'options, il en existe qui portent sur plusieurs actifs risqués à la fois. Un premier exemple typique de ce second type est le cas des options *spread*, qui portent sur l'écart entre les prix de deux actifs, i.e. $H = (S_T^1 - S_T^2)_+$, où S^1 et S^2 sont les prix de deux actifs risqués. Un second exemple est constitué par les *options sur portefeuille* appelées aussi *options paniers* (*basket option* en Anglais). Les *options sur indice* (type CAC 40) en sont un exemple. Une option de vente (*put*) sur portefeuille est un moyen d'assurer son portefeuille. Étant donné un portefeuille composé de a_i actions de prix S_t^i à l'instant t , $i = 1, \dots, d$, un put qui paye $(K - \sum_{i=1}^n a_i S_T^i)_+$ garantit que le portefeuille pourra être revendu au moins au prix K à l'échéance.

Supposons que, outre l'actif non risqué, qui cote $R_t = e^{rt}$ à l'instant t le marché est composé de d actifs risqués, dont les prix S_t^i , $i = 1, \dots, d$, fluctuent suivant le modèle

$$dS_t^i = \alpha_i S_t^i dt + S_t^i \sum_{j=1}^d \sigma_{ij} dB_t^j, \quad 1 \leq i \leq d, \quad t \geq 0,$$

où B_t^1, \dots, B_t^d sont d mouvements brownien mutuellement indépendants. Une application de la formule d'Itô permet de vérifier que cette EDS multidimensionnelle admet comme unique solution

$$S_t^i = S_0^i \exp \left[\mu_i t + \sum_{j=1}^d \sigma_{ij} B_t^j \right], \quad 1 \leq i \leq d, \quad t \geq 0,$$

avec $\mu_i = \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}^2$.

La question naturelle à se poser, pour généraliser la théorie de Black-Scholes, est celle de l'existence d'une *probabilité risque neutre* \mathbb{P}^* équivalente à la probabilité \mathbb{P} , sous laquelle le processus des prix actualisés $e^{-rt} S_t = e^{-rt} (S_t^1, \dots, S_t^d)$, $t \geq 0$ soit une martingale vectorielle, ce qui sera une conséquence de l'existence d'un \mathbb{P}^* -mouvement brownien d -dimensionnel $\{B_t^*, t \geq 0\}$ tel que

$$dS_t^i = r S_t^i dt + S_t^i \sum_{j=1}^d \sigma_{ij} dB_t^{*,j}, \quad 1 \leq i \leq d, \quad t \geq 0.$$

Notons \mathbf{r} le vecteur de \mathbb{R}^d dont toutes les coordonnées sont égales à r , et

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_d \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \cdot & \cdot & \sigma_{1d} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sigma_{d1} & \cdot & \cdot & \sigma_{dd} \end{pmatrix}.$$

La seconde écriture des S_t^i est équivalente à

$$(\mathbf{r} - \alpha)t = \Sigma(B_t - B_t^*), \quad t \geq 0.$$

On est donc conduit à formuler l'hypothèse cruciale suivante :

$$\Sigma \text{ est inversible.} \quad (10.5)$$

Sous cette hypothèse, on déduit de la relation précédente entre B_t et B_t^* la formule

$$B_t^* = \Sigma^{-1}(\mathbf{r} - \alpha)t + B_t, \quad t \geq 0. \quad (10.6)$$

Il résulte d'une généralisation naturelle (exercice) du théorème de Girsanov 10.3.9 que si

$$\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} = \exp \left[\langle \Sigma^{-1}(\alpha - \mathbf{r}), B_T \rangle - \frac{1}{2} \|\Sigma^{-1}(\alpha - \mathbf{r})\|^2 T \right],$$

alors $\{B_t^*, 0 \leq t \leq T\}$ et un mouvement brownien d -dimensionnel (i.e. $\{B_t^1\}, \dots, \{B_t^d\}$ sont des mouvements brownien scalaires mutuellement indépendants) sous \mathbb{P}^* .

En reprenant les arguments de la section 10.3.7, on a que le prix E_t de l'option à l'instant t est donné par la formule (formellement la même que dans le cas unidimensionnel)

$$E_t = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^*(H | \mathcal{F}_t),$$

d'où en particulier

$$E_0 = e^{-rT} \mathbb{E}^* H.$$

Si $H = h(S_T)$, on a donc $E_0 = e^{-rT} \mathbb{E}^* h(S_T)$. Notons pour $t \geq 0$ $\log S_t$ le vecteur $(\log S_t^1, \dots, \log S_t^d)$. Sous \mathbb{P}^* , la loi de $\log(S_T)$ est la loi de Gauss vectorielle $N(\log(S_0) + (\mathbf{r} - \frac{1}{2}s^2)T, \Sigma \Sigma^* T)$, où $s^2 = (s_1^2, \dots, s_d^2)$, avec $s_i^2 = \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}^2$.

Le processus $\{S_t, t \geq 0\}$ à valeurs dans \mathbb{R}^d est un processus de Markov, donc dans le cas où $H = h(S_T)$, il existe une fonction $u : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que

$$E_t = u(t, S_t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

On montre par un raisonnement analogue à celui de la section 10.3.4 que u est solution de l'EDP parabolique dans \mathbb{R}_+^d , avec $a = \Sigma\Sigma^*$,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + r \sum_{i=1}^d x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d x_i x_j a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(t, x) = ru(t, x), & 0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}_+^d \\ u(T, x) = h(x), & x \in \mathbb{R}_+^d \end{cases}$$

En outre, le portefeuille de couverture est déterminé par la relation

$$Y_t^i = \frac{\partial u}{\partial x_i}(t, S_t), \quad 1 \leq i \leq d, \quad 0 \leq t \leq T,$$

au sens où Y_t^i est le “nombre” d'actifs numéro i que doit contenir ce portefeuille. La richesse associée est donc

$$V_t(X, Y) = X_t R_t + \sum_{i=1}^d Y_t^i S_t^i, \quad 0 \leq t \leq T.$$

10.3.11 Viabilité et Complétude

Les notions de marché *viable* et *complet* se définissent comme dans le cas du modèle discret, au petit point près qu'un marché complet est maintenant un marché tel que à toute v.a. $H \geq 0$ \mathcal{F}_T mesurable et de carré intégrable, on peut associer une richesse initiale V_0 et une stratégie admissible (X, Y) telles que

$$H = V_0 + \int_0^T X_t dR_t + \sum_{i=1}^d Y_t^i dS_t^i.$$

La restriction H de carré intégrable est inutile dans le cas du modèle discret, puisque dans ce modèle Ω est fini, donc toute v.a. est bornée.

On a le résultat fondamental

Théorème 10.3.12. *Le marché est viable ssi il existe au moins une probabilité risque neutre \mathbb{P}^* équivalente à \mathbb{P} . Le marché est complet s'il existe exactement une probabilité risque neutre \mathbb{P}^* équivalente à \mathbb{P} .*

Le fait que l'existence d'une probabilité risque neutre entraîne le caractère viable du marché se démontre comme dans le cas du modèle discret. Nous admettrons les autres affirmations de ce théorème.

10.3.12 Remarques sur les points de vue probabiliste/EDP, et sur le calcul effectif des primes

Nous avons associé à toutes les options rencontrées jusqu'ici une EDP (au prix cependant d'un doublement de la dimension de la variable spatiale pour l'option asiatique, ce qui alourdit singulièrement la résolution numérique). Peut-on donner une formule probabiliste pour le prix de l'option dans le cas du modèle considéré à la section 10.3.6 ? La réponse est oui, en faisant appel à la théorie des "EDS rétrogrades" ; mais la formule en question n'est pas du tout explicite.

Discutons maintenant du calcul effectif de la prime.

Formules explicites

Une première approche, qui n'est utilisable que dans les cas les plus simples (qui incluent cependant presque tous les cas examinés jusqu'ici) consiste à utiliser la connaissance de la loi des v.a. considérées, c'est à dire que dans le cas du call européen on utilise la formule

$$C_0 = S_0 F(d_1) - K e^{-rT} F(d_2)$$

(cf. fin de la section 10.2.6), avec F fonction de répartition de la loi $N(0, 1)$, laquelle est accessible avec une bonne précision dans Matlab, ou dont le calcul numérique peut être programmé. En ce qui concerne l'option barrière, on peut utiliser la connaissance de la loi jointe du vecteur aléatoire $(\sup_{0 \leq t \leq T} S_t, S_T)$, et en ce qui concerne l'option asiatique des mathématiciens ont récemment progressé pour expliciter la loi de la variable aléatoire U_T .

Méthode de Monte Carlo

Une seconde méthode, dont le domaine d'application est beaucoup plus vaste, consiste à simuler un grand nombre de réalisations de la variable aléatoire concernée, et à remplacer l'espérance mathématique par la moyenne empirique sur l'échantillon ainsi constitué.

Remarquons que la vitesse de convergence d'une méthode de Monte Carlo est contrôlée par la variance de la v.a. dont on veut calculer l'espérance. De ce point de vue, le calcul par Monte Carlo du put est bien mieux conditionné que celui du call. On a donc intérêt, pour calculer le call par Monte Carlo, à calculer en fait le put, et à utiliser la relation de parité call-put.

Sous réserve de surveiller la variance, les méthodes de Monte Carlo sont commodes d'utilisation, la simulation d'un très grand nombre de variables aléatoires ne posant pas de problème sur les ordinateurs d'aujourd'hui.

Notons qu'une variante de la méthode de Monte Carlo consiste à simuler un arbre binomial (éventuellement avec un N - cf. section 10.2.6 - grand)

Résolution numérique de l'EDP

Une dernière méthode consiste à résoudre l'EDP par une méthode numérique de type différences finies. Notons que cela suppose de discrétiser le temps et l'espace (et de borner l'espace infini \mathbb{R}_+). Ces méthodes numériques ont été développées par les spécialistes du calcul scientifique pour beaucoup d'autres applications. Leur principale limitation est la dimension de la variable spatiale, lorsque l'on considère un modèle avec un grand nombre d'actifs risqués.

10.3.13 Volatilité historique - Volatilité implicite

L'utilisation des modèles ci-dessus pour le calcul de la prime suppose la connaissance de très peu de paramètres (il est remarquable que le paramètre μ dans le modèle initial des fluctuations de S_t a disparu). Le taux d'intérêt r peut être considéré comme connu.

Par contre la paramètre σ - la volatilité - n'est pas donné directement. On peut tenter de l'estimer à partir des données des fluctuations passées, c'est la *volatilité historique*.

Mais comme il existe un marché des options, où les prix sont régis par la loi de l'offre et de la demande, on peut inverser la formule de Black-Scholes, pour en déduire une valeur de σ , appelée *volatilité implicite*. Il est à noter que l'inversion de la formule pour différentes options de même échéance T , mais correspondant à des prix d'exercice différents, donne des volatilités implicites différentes - effet *smile*.

10.4 Options américaines dans le modèle discret

Contrairement aux options dites “européennes”, une option dite “américaine” peut être exercée à tout instant entre la date de signature du contrat (l’instant 0) et l’échéance (l’instant T). Notons $h(S_t)$ ce que rapporte l’option, lorsqu’elle est exercée à l’instant t . Dans le cas d’un call américain, $h(x) = (x - K)_+$, dans le cas d’un put américain, $h(x) = (K - x)_+$. On notera $Z_t = h(S_t)$, $0 \leq t \leq T$, et A_t le prix de l’option américaine à l’instant t , $0 \leq t \leq T$. En particulier, A_0 est la *prime* dont l’acheteur de l’option américaine doit s’acquitter au moment de la signature du contrat (l’instant 0).

On suppose à nouveau que

$$R_t = (1 + r)^t, \quad 0 \leq t \leq T,$$

et on définit les valeurs actualisées

$$\tilde{Z}_t = \frac{Z_t}{(1 + r)^t}, \quad \tilde{A}_t = \frac{A_t}{(1 + r)^t}.$$

Cherchons à préciser la valeur de A_t par récurrence rétrograde. Tout d’abord, il est clair que

$$A_T = Z_T.$$

A l’instant $T - 1$, le détenteur de l’option a le choix entre l’exercer immédiatement, ou bien la conserver pour espérer en tirer un meilleur profit à l’instant T . Donc on a

$$A_{T-1} = Z_{T-1} \vee \frac{1}{1 + r} \mathbb{E}^*(Z_T | S_{T-1}).$$

Par le même raisonnement, on a pour tout $0 < t \leq T$,

$$A_{t-1} = Z_{t-1} \vee \frac{1}{1 + r} \mathbb{E}^*(A_t | S_{t-1}).$$

En terme des valeurs actualisées, on obtient

$$\begin{cases} \tilde{A}_T = \tilde{Z}_T \\ \tilde{A}_{t-1} = \tilde{Z}_{t-1} \vee \mathbb{E}^*(\tilde{A}_t | S_{t-1}), \quad 0 < t \leq T. \end{cases} \quad (10.7)$$

On pose la

Définition 10.4.1. On appelle *sur-martingale* (resp. *sous-martingale*) une suite adaptée

$\{M_t; 0 \leq t \leq T\}$ telle que pour $0 < t \leq T$,

$$\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_{t-1}] \leq (\text{resp. } \geq) M_{t-1}.$$

On a la

Proposition 10.4.2. La suite $\{\tilde{A}_t, 0 \leq t \leq T\}$ est une \mathbb{P}^* -surmartingale. C'est la plus petite \mathbb{P}^* -surmartingale qui majore la suite $\{\tilde{Z}_t, 0 \leq t \leq T\}$.

Preuve La propriété de surmartingale, et le fait que la suite $\{\tilde{A}_t\}$ majore la suite $\{\tilde{Z}_t\}$ découlent immédiatement de la relation (10.7). Soit maintenant $\{M_t\}$ une autre \mathbb{P}^* -surmartingale qui majore $\{\tilde{Z}_t\}$. Alors $M_T \geq \tilde{Z}_T = \tilde{A}_T$, et si $M_t \geq \tilde{A}_t$,

$$M_{t-1} \geq \mathbb{E}^*(M_t | \mathcal{F}_{t-1}) \geq \mathbb{E}^*(\tilde{A}_t | \mathcal{F}_{t-1}),$$

et aussi $M_{t-1} \geq \tilde{Z}_{t-1}$, donc

$$M_{t-1} \geq \tilde{Z}_{t-1} \vee \mathbb{E}^*(\tilde{A}_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \tilde{A}_{t-1}.$$

CQFD. ◇

Pour poursuivre notre étude des options américaines, nous allons préciser ce qu'est la plus petite surmartingale majorant une suite adaptée donnée.

10.4.1 Enveloppe de Snell

Commençons par la :

Définition 10.4.3. Une v.a. ν à valeurs dans l'ensemble $\{0, 1, \dots, T\}$ est appelée un *temps d'arrêt* si pour tout $0 \leq t \leq T$,

$$\{\nu = t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Etant donnée une suite aléatoire adaptée $\{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ et un temps d'arrêt, la suite arrêtée $\{X_{t \wedge \nu}, 0 \leq t \leq T\}$ est encore adaptée. Ceci résulte de ce que ν est un temps d'arrêt ssi $\{\nu \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ pour tout $0 \leq t \leq T$. On a en outre le théorème d'arrêt

Théorème 10.4.4. Si $\{M_t, 0 \leq t \leq T\}$ est une martingale (resp. une surmartingale), alors $\{M_{t \wedge \nu}, 0 \leq t \leq T\}$ est aussi une martingale (resp. une surmartingale).

Preuve Il suffit de remarquer (avec la notation de la proposition 10.2.6) que

$$M_{t \wedge \nu} = M(Y)_t, \quad 0 \leq t \leq T,$$

si $Y_t = \mathbf{1}_{\{t \leq \nu\}}$. Puisque $\{t \leq \nu\} = \{\nu \leq t - 1\}^c$, la suite Y est prévisible, et le résultat pour les martingales est la proposition 10.2.6. Le même raisonnement, en exploitant la positivité de Y donne le résultat pour les surmartingales. \diamond

Etant donnée une suite adaptée $\{Z_t, 0 \leq t \leq T\}$, on veut étudier son *enveloppe de Snell*, autrement dit la plus petite surmartingale qui la majore. Celle-ci est la suite $\{U_t, 0 \leq t \leq T\}$ définie par

$$\begin{cases} U_T = Z_T, \\ U_t = Z_t \vee \mathbb{E}(U_{t+1} | \mathcal{F}_t), \quad 0 \leq t < T. \end{cases}$$

Notons que tant que $U_t > Z_t$, $U_t = \mathbb{E}(U_{t+1} | \mathcal{F}_t)$. Cette remarque se formalise en la

Proposition 10.4.5. *La v.a. définie par*

$$\nu = \inf\{0 \leq t \leq T | U_t = Z_t\}$$

est un temps d'arrêt, et la suite arrêtée $\{U_{t \wedge \nu}, 0 \leq t \leq T\}$ est une martingale.

Preuve Notons tout d'abord que

$$\{\nu = t\} = \{U_0 > Z_0\} \cap \cdots \cap \{U_{t-1} > Z_{t-1}\} \cap \{U_t = Z_t\} \in \mathcal{F}_t.$$

On pose à nouveau $Y_t = \mathbf{1}_{\{t \leq \nu\}}$, $U_{t \wedge \nu} = U(Y)_t$.

$$U(Y)_{t+1} - U(Y)_t = \mathbf{1}_{\{t+1 \leq \nu\}}(U_{t+1} - U_t),$$

et sur l'ensemble $\{t + 1 \leq \nu\}$, $U_t = \mathbb{E}(U_{t+1} | \mathcal{F}_t)$, donc $\mathbb{E}(U(Y)_{t+1} - U(Y)_t | \mathcal{F}_t) = 0$. \diamond

Notons \mathcal{T}_t l'ensemble des temps d'arrêt qui prennent leurs valeurs dans l'ensemble $\{t, t + 1, \dots, T\}$.

Corollaire 10.4.6. *On a*

$$U_0 = \mathbb{E}(Z_\nu | \mathcal{F}_0) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_0} \mathbb{E}(Z_\tau | \mathcal{F}_0).$$

Preuve D'après la proposition 10.4.5, $\{U_{\cdot \wedge \nu}\}$ est une martingale, donc

$$\begin{aligned} U_0 &= \mathbb{E}(U_{T \wedge \nu} | \mathcal{F}_0) \\ &= \mathbb{E}(Z_\nu | \mathcal{F}_0). \end{aligned}$$

Si $\tau \in \mathcal{T}_0$, d'après le théorème 10.4.4, $\{U_{\cdot \wedge \tau}\}$ est une surmartingale, donc

$$\begin{aligned} U_0 &\geq \mathbb{E}(U_{N \wedge \tau} | \mathcal{F}_0) \\ &\geq \mathbb{E}(Z_\tau | \mathcal{F}_0). \end{aligned}$$

◇

Le corollaire se généralise en

$$\begin{aligned} U_t &= \sup_{\tau \in \mathcal{T}_t} \mathbb{E}(Z_\tau | \mathcal{F}_t) \\ &= \mathbb{E}(Z_{\nu_t} | \mathcal{F}_t), \end{aligned}$$

si $\nu_t = \inf\{s \geq t | U_s = Z_s\}$. On appelle *temps d'arrêt optimal* un temps d'arrêt qui vérifie la propriété d'optimalité du temps d'arrêt ν établie au corollaire 10.4.6. Le théorème qui suit dit que ce ν est le plus petit des temps d'arrêt optimaux.

Théorème 10.4.7. *Le temps d'arrêt ν est optimal ssi les deux conditions suivantes sont vérifiées*

- (i) $Z_\nu = U_\nu$
- (ii) $\{U_{t \wedge \nu}, 0 \leq t \leq T\}$ est une martingale.

Preuve (i)+(ii) implique $U_0 = \mathbb{E}(Z_\nu | \mathcal{F}_0)$, donc l'optimalité de ν d'après le corollaire 10.4.6.

Réciproquement, supposons ν optimal. Alors

$$U_0 = \mathbb{E}(Z_\nu | \mathcal{F}_0) \leq \mathbb{E}(U_\nu | \mathcal{F}_0),$$

et puisque $\{U_{\cdot \wedge \nu}\}$ est une surmartingale, $\mathbb{E}(U_\nu | \mathcal{F}_0) \leq U_0$, donc $\mathbb{E}(U_\nu | \mathcal{F}_0) = \mathbb{E}(Z_\nu | \mathcal{F}_0) = U_0$, d'où comme U domine Z , $U_\nu = Z_\nu$, soit (i). Encore une fois $\{U_{\cdot \wedge \nu}\}$ est une surmartingale, donc

$$U_0 \geq \mathbb{E}(U_{t \wedge \nu} | \mathcal{F}_0) \geq \mathbb{E}(U_\nu | \mathcal{F}_0),$$

mais comme les deux termes extrêmes coïncident, on a

$$\mathbb{E}(U_{t \wedge \nu} | \mathcal{F}_0) = \mathbb{E}(U_\nu | \mathcal{F}_0) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(U_\nu | \mathcal{F}_t) | \mathcal{F}_0).$$

Comme d'un autre côté $U_{t \wedge \nu} \geq \mathbb{E}(U_\nu | \mathcal{F}_t)$, on a l'égalité $U_{t \wedge \nu} = \mathbb{E}(U_\nu | \mathcal{F}_t)$, soit (ii). ◇

10.4.2 Décomposition de Doob

On a la

Proposition 10.4.8. *Toute surmartingale $\{U_t, 0 \leq t \leq T\}$ s'écrit de façon unique sous la forme*

$$U_t = M_t - C_t,$$

où $\{M_t, 0 \leq t \leq T\}$ est une martingale, et $\{C_t, 0 \leq t \leq T\}$ est une suite croissante, prévisible t.q. $C_0 = 0$.

Preuve Nécessairement, $M_0 = U_0$ et $C_0 = 0$. En outre

$$U_{t+1} - U_t = M_{t+1} - M_t - C_{t+1} + C_t,$$

d'où en conditionnant par \mathcal{F}_t ,

$$\mathbb{E}(U_{t+1} | \mathcal{F}_t) - U_t = -C_{t+1} + C_t,$$

et

$$M_{t+1} - M_t = U_{t+1} - \mathbb{E}(U_{t+1} | \mathcal{F}_t).$$

◇

En outre

Proposition 10.4.9. *Soit $\{Z_t, 0 \leq t \leq T\}$ une suite adaptée, d'enveloppe de Snell $U_t = M_t - C_t$. Alors le plus grand temps d'arrêt optimal est donné par*

$$\nu_{max} = \inf\{t \leq T, C_{t+1} \neq 0\}.$$

Preuve Le fait que ν_{max} est un temps d'arrêt résulte de ce que $\{C_t\}$ est prévisible. De $C_t = 0$ pour $t \leq \nu_{max}$, on déduit que

$$U_{\cdot \wedge \nu_{max}} = M_{\cdot \wedge \nu_{max}},$$

donc $\{U_{\cdot \wedge \nu_{max}}\}$ est une martingale. D'après le théorème 10.4.7, il suffit pour montrer que ν_{max} est optimal, de montrer l'égalité $U_{\nu_{max}} = Z_{\nu_{max}}$. Posons

$$Y_t = \mathbf{1}_{\{\nu_{\max}=t\}}.$$

$$\begin{aligned} U_{\nu_{\max}} &= \sum_{t=0}^{T-1} Y_t U_t + Y_T U_T \\ &= \sum_{t=0}^{T-1} Y_t \max(Z_t, \mathbb{E}(U_{t+1} | \mathcal{F}_t)) + Y_T Z_T \\ &= \sum_{t=0}^{T-1} Y_t Z_t + Y_T Z_T \\ &= Z_{\nu_{\max}}, \end{aligned}$$

où on a utilisé les faits suivants : $\mathbb{E}(U_{t+1} | \mathcal{F}_t) = M_t - C_{t+1}$, et sur $\{Y_t = 1\}$, $C_t = 0$ et $C_{t+1} > 0$, soit $\mathbb{E}(U_{t+1} | \mathcal{F}_t) = M_t - C_{t+1} < U_t$, d'où nécessairement $U_t = Z_t$.

Il reste à montrer qu'il n'existe pas de temps d'arrêt optimal ν tel que $\nu \geq \nu_{\max}$ et $\mathbb{P}(\nu > \nu_{\max}) > 0$. En effet on aurait

$$\mathbb{E}(U_\nu) = \mathbb{E}(M_\nu) - \mathbb{E}(C_\nu) = \mathbb{E}(U_0) - \mathbb{E}(C_\nu) < \mathbb{E}(U_0),$$

donc $\{U_{\cdot \wedge \nu}\}$ n'est pas une martingale.

10.4.3 Enveloppe de Snell et chaînes de Markov

Précisons maintenant la forme de l'enveloppe de Snell dans une situation markovienne. Soit $\{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ une chaîne de Markov homogène à valeurs dans un ensemble fini E , de matrice de transition $P = \{P_{xy}, x, y \in E\}$. On suppose alors que pour $0 \leq t \leq T$, $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_0, \dots, X_t\}$.

Proposition 10.4.10. *Soit $\{Z_t\}$ une suite définie par $Z_t = \psi(t, X_t)$, avec $\psi : \{0, 1, \dots, T\} \times E \rightarrow \mathbb{R}$. Alors l'enveloppe de Snell $\{U_t\}$ de la suite $\{Z_t\}$ est donnée par la formule $U_t = u(t, X_t)$, où la fonction u est définie par*

$$\begin{cases} u(T, x) = \psi(T, x), & x \in E; \\ u(t, x) = \psi(t, x) \vee \sum_y P_{xy} u(t+1, y), & x \in E, 0 \leq t < T. \end{cases}$$

En pratique, pour déterminer le temps d'arrêt

$$\nu = \inf\{t, U_t = Z_t\},$$

on calcule la solution u du système rétrograde de la proposition 10.4.10, et on arrête à l'instant $\nu = \inf\{t \leq T, u(t, X_t) = \psi(t, X_t)\}$.

10.4.4 Retour aux options américaines

D'après la proposition 10.4.2, le prix actualisé $\{\tilde{A}_t\}$ de l'option américaine est la \mathbb{P}^* -enveloppe de Snell de la suite $\{\tilde{Z}_t = (1+r)^{-t}h(S_t) = R_t^{-1}h(S_t)\}$. On sait (généralisation du corollaire 10.4.6) que

$$\tilde{A}_t = \sup_{\nu \in \mathcal{T}_t} \mathbb{E}^*(R_\nu^{-1}h(S_\nu) | \mathcal{F}_t),$$

soit

$$A_t = R_t \sup_{\nu \in \mathcal{T}_t} \mathbb{E}^*(R_\nu^{-1}h(S_\nu) | \mathcal{F}_t).$$

D'après la décomposition de Doob, $\tilde{A}_t = \tilde{M}_t - \tilde{C}_t$, avec $\{\tilde{M}_t\}$ une \mathbb{P}^* -martingale et \tilde{C}_t croissant prévisible et nul en 0.

Puisque le marché est complet, il existe une richesse initiale V_0 et une stratégie autofinancée $\{(X_t, Y_t)\}$ t.q. $V_T(X, Y) = R_T \tilde{M}_T$, soit $\tilde{V}_T(X, Y) = \tilde{M}_T$, et comme on a deux \mathbb{P}^* -martingales, $\forall 0 \leq t \leq T$, $\tilde{V}_t(X, Y) = \tilde{M}_t$, soit $\tilde{A}_t = \tilde{V}_t(X, Y) - \tilde{C}_t$, et $A_t = V_t(X, Y) - C_t$, où $C_t = R_t \tilde{C}_t$. Une date d'exercice optimale τ vérifie $A_\tau = h(S_\tau)$. Elle doit vérifier $\tau \leq \nu_{\max} = \inf\{t, C_{t+1} \neq 0\}$, car en exerçant l'option à la date ν_{\max} , son propriétaire se constitue le capital $A_{\nu_{\max}} = V_{\nu_{\max}}(X, Y)$, et grâce à la stratégie $\{(X, Y)\}$, son portefeuille vaut strictement plus que l'option aux instants $\nu_{\max} + 1, \nu_{\max} + 2, \dots, N$.

On vérifie également que si l'acheteur de l'option exerce celle-ci à un instant non optimal, le vendeur réalise un profit strictement positif.

10.4.5 Options américaines et options européennes

Proposition 10.4.11. *Soit A_t le prix à l'instant t d'une option américaine qui rapporte à son détenteur Z_t si elle est exercée à l'instant t , et E_t le prix à l'instant t d'une option européenne qui rapporte à son détenteur Z_T à l'échéance. Alors $A_t \geq E_t$, $0 \leq t \leq T$.*

Si de plus $E_t \geq Z_t \forall t$, alors $E_t = A_t \forall t$.

Preuve La première égalité est évidente, et elle résulte des propriétés de martingale (resp. sur-martingale) de $\{E_t\}$ (resp. $\{A_t\}$) sous \mathbb{P}^* . Si $E_t \geq Z_t$, $\{\tilde{E}_t\}$ est une \mathbb{P}^* -martingale (donc aussi surmartingale) qui majore $\{\tilde{Z}_t\}$, donc elle majore aussi $\{\tilde{A}_t\}$, d'après la proposition 10.4.2.

Corollaire 10.4.12. *Dans le cas des call(s) européen et américain de même échéance T et de même prix d'exercice K , portant sur un même unique actif risqué de prix S_t à l'instant t , $A_t = E_t$, $0 \leq t \leq T$.*

Preuve On a $Z_t = (S_t - K)_+$, et

$$\begin{aligned}\tilde{E}_t &= R_T^{-1} \mathbb{E}^*((S_T - K)_+ | \mathcal{F}_t) \\ &\geq \mathbb{E}^*(\tilde{S}_T - R_T^{-1} K | \mathcal{F}_t) \\ &= \tilde{S}_t - R_T^{-1} K, \text{ donc} \\ E_t &\geq S_t - \frac{R_t}{R_T} K \\ &\geq S_t - K,\end{aligned}$$

mais on a aussi $E_t \geq 0$, donc $E_t \geq Z_t$. Il reste à appliquer la proposition. \diamond

Cette propriété n'est pas vérifiée pour un put, ni pour un call sur une action distribuant un dividende.

10.4.6 Options américaines et modèle markovien

Reprenons une option américaine qui rapporte à son détenteur $Z_t = h(S_t)$ si elle est exercée à l'instant t , et supposons maintenant que $\{S_t, 0 \leq t \leq T\}$ est une chaîne de Markov. Alors le prix A_t se met sous la forme $A_t = u(t, S_t)$. Posons $\tilde{u}(t, x) = R_t^{-1} u(t, x)$ et $\tilde{h}(t, x) = R_t^{-1} h(x)$. Il résulte de la proposition 10.4.10

$$\tilde{u}(t, x) = \tilde{h}(t, x) \vee \sum_y P_{xy} \tilde{u}(t+1, y),$$

d'où l'on déduit la formule de récurrence

$$u(t, x) = h(x) \vee \sum_y P_{xy} \frac{u(t+1, y)}{1+r}. \quad (10.8)$$

Et un temps d'exercice optimal est défini par

$$\nu = \inf\{t \leq T, u(t, S_t) = h(S_t)\}.$$

10.5 Options américaines dans le modèle de Black–Scholes

L'étude des options américaines dans le modèle de Black–Scholes exige des outils mathématiques complexes. Nous allons présenter l'EDP associée, par passage à la limite sur les formules de la sous-section 10.4.6.

10.5. OPTIONS AMÉRICAINES DANS LE MODÈLE DE BLACK-SCHOLES 241

Réécrivons la formule (10.8) dans le cadre de la sous-section 10.2.6, avec les changements de variable :

$$\begin{aligned} g(x) &= h(e^x), \\ v(t, x) &= u(t, e^x). \end{aligned}$$

On obtient

$$v\left(t - \frac{1}{N}, x\right) = g(x) \vee e^{-r/N} \left(p_+^N v\left(t, x + \frac{r}{N} + \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right) + p_-^N v\left(t, x + \frac{r}{N} - \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right) \right), \quad (10.9)$$

avec

$$\begin{aligned} p_+^N &= \mathbb{P}(\eta_k^N = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}) = \frac{1}{2} - \frac{\sigma}{4\sqrt{N}} + o(N^{-3/2}), \\ p_-^N &= \mathbb{P}(\eta_k^N = -\frac{\sigma}{\sqrt{N}}) = \frac{1}{2} + \frac{\sigma}{4\sqrt{N}} + o(N^{-3/2}). \end{aligned}$$

Posons

$$(A_N v)(t, x) = e^{-r/N} \left(p_+^N v\left(t, x + \frac{r}{N} + \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right) + p_-^N v\left(t, x + \frac{r}{N} - \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right) \right).$$

Alors (10.9) se réécrit

$$\begin{aligned} v\left(t - \frac{1}{N}, x\right) &\geq g(x), \\ (A_N v)(t, x) - v\left(t - \frac{1}{N}, x\right) &\leq 0, \\ (v\left(t - \frac{1}{N}, x\right) - g(x))((A_N v)(t, x) - v\left(t - \frac{1}{N}, x\right)) &= 0. \end{aligned}$$

On peut aussi bien multiplier dans ce système d'égalités-inégalités $(A_N v)(t, x) - v(t - \frac{1}{N}, x)$ par N . Mais, en admettant que v est suffisamment régulière, on obtient à l'aide d'un développement limité que quand $N \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} N[(A_N v)(t, x) - v\left(t - \frac{1}{N}, x\right)] &\rightarrow \\ Av(t, x) &:= \frac{\partial v}{\partial t}(t, x) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{\partial v}{\partial x}(t, x) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x) - rv(t, x). \end{aligned}$$

Donc le prix de l'option américaine est

$$A_t = v(t, \log S_t),$$

où v est la solution de l'inéquation variationnelle

$$\begin{aligned} v(t, x) &\geq g(x), \\ Av(t, x) &\leq 0, \\ (v(t, x) - g(x))Av(t, x) &= 0, \end{aligned}$$

et un temps optimal d'exercice de l'option est donné par le temps d'arrêt

$$\nu = \inf\{t \leq T, v(t, \log S_t) = g(\log S_t) = h(S_t)\}.$$

10.6 Taux d'intérêt et obligations

Jusqu'ici nous avons supposé que le taux d'intérêt est une constante (ne dépendant ni de l'aléa ni du temps). Une telle hypothèse est acceptable lorsque l'on traite des actions et des options sur actions, mais ce n'est plus le cas lorsqu'il s'agit des obligations et des options sur obligations.

On appelle *obligation zéro coupon* un titre donnant droit à un Euro à l'échéance T . On notera $O_{t,T}$ la valeur de ce titre à l'instant t .

10.6.1 Courbe de taux en avenir certain

Le taux d'intérêt d'un prêt dépend à la fois de sa date d'émission t , et de la date d'échéance T . Une personne empruntant un Euro à l'instant t devra rembourser une somme R_T^t à la date T . Dans le cas du taux d'intérêt constant du modèle de Black-Scholes, on aurait

$$R_T^t = \exp[(T - t)r].$$

Plus généralement, dans un cadre déterministe, i.e. où toutes les quantités $\{R_T^t, 0 \leq t \leq T\}$ sont connues, l'absence d'opportunité d'arbitrage impose que la fonction R vérifie

$$R_T^t = R_u^t R_T^u, \forall 0 \leq t < u < T.$$

De cette relation, jointe à $R_t^t = 1$, et à la continuité de R , on déduit qu'il existe une fonction $t \rightarrow r(t)$ telle que

$$R_T^t = \exp\left(\int_t^T r(s)ds\right), \forall 0 \leq t \leq T.$$

Dans ce cas, on doit avoir clairement

$$O_{t,T} = \exp \left(- \int_t^T r(s) ds \right).$$

10.6.2 Courbes de taux en avenir incertain et obligations

On suppose maintenant que (on note R_t pour R_t^0)

$$R_t = \exp \left(\int_0^t r_s ds \right),$$

où $\{r_t, t \geq 0\}$ est un processus stochastique adapté à la filtration naturelle $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ d'un mouvement brownien $\{W_t, t \geq 0\}$ (i. e. à des ensembles de mesure nulle près, $\mathcal{F}_t = \sigma\{W_s, 0 \leq s \leq t\}$).

On fait l'hypothèse suivante :

$$(H) \begin{cases} \text{Il existe une probabilité } \mathbb{P}^* \text{ équivalente à } \mathbb{P} \text{ sous laquelle} \\ \tilde{O}_{t,u} := (R_t)^{-1} O_{t,u}, \quad 0 \leq t \leq u \\ \text{est une martingale, } \forall 0 < u \leq T, \end{cases}$$

Puisque $O_{u,u} = 1$, $\tilde{O}_{u,u} = (R_u)^{-1}$, et donc (H) implique que

$$\begin{aligned} \tilde{O}_{t,u} &= \mathbb{E}^* \left(\exp \left[- \int_0^u r_s ds \right] \middle| \mathcal{F}_t \right), \quad \text{donc aussi} \\ O_{t,u} &= \mathbb{E}^* \left(\exp \left[- \int_t^u r_s ds \right] \middle| \mathcal{F}_t \right). \end{aligned}$$

Pour tenter d'expliciter plus avant la quantité $O_{t,u}$, il convient de préciser la dérivée de Radon–Nikodym de la probabilité \mathbb{P}^* par rapport à \mathbb{P} . Notons L_T cette densité. Elle est telle que pour toute v.a. bornée X ,

$$\mathbb{E}^*(X) = \mathbb{E}(X L_T).$$

Si de plus X est \mathcal{F}_t -mesurable, alors en posant $L_t = \mathbb{E}(L_T | \mathcal{F}_t)$, on a

$$\mathbb{E}^*(X) = \mathbb{E}(X L_t).$$

L_t est la densité de la restriction à \mathcal{F}_t de \mathbb{P}^* par rapport à \mathbb{P} . Il résulte du théorème de Girsanov (dont une partie a été démontrée ci-dessus à la section 10.3.8) la

Proposition 10.6.1. *Il existe un processus adapté $\{q_t, 0 \leq t \leq T\}$ vérifiant*

$$\int_0^T q_t^2 dt < \infty \quad p. s.,$$

tel que pour tout $0 \leq t \leq T$, p. s.

$$L_t = \exp \left(\int_0^t q_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t q_s^2 ds \right).$$

Corollaire 10.6.2. *Le prix à l'instant t de l'obligation zéro-coupon d'échéance $u \geq t$ peut s'écrire*

$$O_{t,u} = \mathbb{E} \left(\exp \left[- \int_t^u \left(r_s + \frac{q_s^2}{2} \right) ds + \int_t^u q_s dW_s \right] \middle| \mathcal{F}_t \right).$$

Preuve Posons $X = \exp(-\int_t^u r_s ds)$. Il faut calculer $\mathbb{E}^*(X|\mathcal{F}_t)$. Soit Y une v.a. \mathcal{F}_t -mesurable et bornée. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^*(XY) &= \mathbb{E}(XY L_T) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}[X L_T | \mathcal{F}_t] Y) \\ &= \mathbb{E}^* \left(\frac{\mathbb{E}[X L_T | \mathcal{F}_t]}{L_t} Y \right), \end{aligned}$$

donc d'après la caractérisation de $\mathbb{E}^*(X|\mathcal{F}_t)$,

$$\mathbb{E}^*(X|\mathcal{F}_t) = \frac{\mathbb{E}[X L_T | \mathcal{F}_t]}{L_t},$$

d'où le résultat.

Proposition 10.6.3. *Pour chaque échéance u , il existe un processus adapté $\{\sigma_t^u, 0 \leq t \leq u\}$ tel que sur $[0, u]$*

$$dO_{t,u} = (r_t - \sigma_t^u q_t) O_{t,u} dt + O_{t,u} \sigma_t^u dW_t.$$

Preuve Utilisant d'abord la formule établie dans la dernière preuve, puis la propriété de martingale de $\{\tilde{O}_{t,u}, 0 \leq t \leq u\}$ sous \mathbb{P}^* , on obtient que pour $0 \leq s \leq t \leq u$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\tilde{O}_{t,u} L_t | \mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}^*(\tilde{O}_{t,u} | \mathcal{F}_s) L_s \\ &= \tilde{O}_{s,u} L_s. \end{aligned}$$

Donc $\{\tilde{O}_{t,u}L_t, 0 \leq t \leq u\}$ est une martingale sous \mathbb{P} , qui est strictement positive, donc son log est une semimartingale, dont la partie martingale est de la forme

$$\int_0^t \theta_s^u dW_s,$$

et à nouveau puisque $\{\tilde{O}_{t,u}L_t, 0 \leq t \leq u\}$ est une \mathbb{P} -martingale,

$$\tilde{O}_{t,u}L_t = \tilde{O}_{0,u} \exp \left(\int_0^t \theta_s^u dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t (\theta_s^u)^2 ds \right).$$

En multipliant par $R_t(L_t)^{-1}$, on obtient

$$O_{t,u} = O_{0,u} \exp \left(\int_0^t (r_s - [(\theta_s^u)^2 - q_s^2]/2) ds + \int_0^t (\theta_s^u - q_s) dW_s \right).$$

Le résultat s'en déduit en utilisant la formule d'Itô, et à condition de poser $\sigma_t^u = \theta_t^u - q_t$. \diamond

Si l'on rapproche la formule de la proposition de celle concernant le taux d'intérêt, à savoir

$$dR_t = r_t R_t dt,$$

on voit que l'obligation est "plus risquée" qu'un dépôt à la banque. Le terme $r_t - \sigma_t^u q_t$ est une sorte de rendement moyen relatif par unité de temps de l'obligation. Le terme $-\sigma_t^u q_t$ est la différence entre ce rendement et le taux sans risque. D'où l'interprétation de $-q_t$ comme une "prime de risque". Notons que sous la probabilité risque neutre \mathbb{P}^* , $W_t^* = W_t - \int_0^t q_s ds$ est un brownien standard, et

$$dO_{t,u} = r_t O_{t,u} dt + O_{t,u} \sigma_t^u dW_t^*.$$

10.6.3 Option sur obligation

Considérons pour fixer les idées une option européenne d'échéance T sur une obligation zéro coupon d'échéance T' , avec bien sûr $T \leq T'$. S'il s'agit d'un call de prix d'exercice K , la valeur de l'option à l'instant T est évidemment $(O_{T,T'} - K)_+$, et on va voir que l'on peut appliquer ici la même méthodologie qu'à la section 10.3.7.

L'évolution du portefeuille de couverture est donnée dans le cas d'une stratégie autofinancée par la formule

$$dV_t(X, Y) = X_t dR_t + Y_t dO_{t,T'}.$$

Définition 10.6.4. Une stratégie $\{(X_t, Y_t), 0 \leq t \leq T\}$ est admissible si elle est autofinancée et si la valeur actualisée

$$\tilde{V}_t(X, Y) = X_t + Y_t \tilde{O}_{t, T'}$$

du portefeuille correspondant est, pour tout t , positive et de carré intégrable sous \mathbb{P}^* .

Sous des hypothèses raisonnables, on peut couvrir une option européenne d'échéance $T < T'$.

Proposition 10.6.5. Supposons que $\sup_{0 \leq t \leq T} |r_t| < \infty$ p. s., $\inf_{0 \leq t \leq T} |\sigma_t^{T'}| > 0$, et $T < T'$. Soit H une v. a. \mathcal{F}_T -mesurable, telle que $H e^{-\int_0^T r_s ds}$ soit de \mathbb{P}^* carré intégrable.

Alors il existe V_0 et une stratégie admissible $\{(X, Y)\}$ tels que $V_T(X, Y) = H$. En outre

$$V_t(X, Y) = \mathbb{E}^* \left(e^{-\int_t^T r_s ds} H | \mathcal{F}_t \right).$$

Preuve On a

$$\begin{aligned} d\tilde{V}_t(X, Y) &= Y_t d\tilde{O}_{t, T'} \\ &= Y_t \tilde{O}_{t, T'} \sigma_t^{T'} dW_t^*. \end{aligned}$$

On en déduit que $\{\tilde{V}_t, 0 \leq t \leq T\}$ est une \mathbb{P}^* -martingale, donc

$$V_t(X, Y) = e^{\int_0^t r_s ds} \mathbb{E}^* \left(e^{-\int_0^T r_s ds} H | \mathcal{F}_t \right).$$

Il reste à exhiber une stratégie correspondante. Il résulte du théorème de représentation d'Itô que

$$H e^{-\int_0^T r_s ds} = \mathbb{E}^* \left(H e^{-\int_0^T r_s ds} \right) + \int_0^T J_t dW_t^*,$$

avec un certain processus $\{J_t, 0 \leq t \leq T\}$ tel que $\int_0^T J_t^2 dt < \infty$ p. s. Il suffit alors de choisir

$$Y_t = \frac{J_t}{\tilde{O}_{t, T'} \sigma_t^{T'}}, \quad X_t = \mathbb{E}^* \left(H e^{-\int_0^T r_s ds} | \mathcal{F}_t \right) - \frac{J_t}{\sigma_t^{T'}}.$$

10.6.4 Un modèle de taux d'intérêt

On va examiner le modèle de *Vasicek*, qui est le plus simple (mais peut-être pas le plus satisfaisant). Dans ce modèle, le processus $\{r_t, 0 \leq t \leq T\}$ est solution de l'EDS

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t,$$

où a , b et σ sont des constantes positives, et q est lui-aussi constant, $q_t = -\lambda$. Alors si $W_t^* = W_t + \lambda t$, et $b^* = b - \lambda\sigma/a$, on a équivalamment

$$dr_t = a(b^* - r_t)dt + \sigma dW_t^*.$$

On montre aisément que r_t s'écrit

$$r_t = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dW_s,$$

et que r_t suit sous \mathbb{P} la loi

$$N\left(r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}), \sigma^2 \frac{1 - e^{-2at}}{2a}\right),$$

et sous \mathbb{P}^* la même loi, avec b remplacé par b^* . Donc r_t prend une valeur négative avec probabilité non nulle, même si elle est éventuellement proche de 0.

Voyons maintenant le prix de l'obligation zéro-coupon.

$$\begin{aligned} O_{t,T} &= \mathbb{E}^* \left(e^{-\int_t^T r_s ds} \middle| \mathcal{F}_t \right) \\ &= e^{-b^*(T-t)} \mathbb{E}^* \left(e^{-\int_t^T X_s ds} \middle| \mathcal{F}_t \right), \end{aligned}$$

avec $\{X_s = r_s - b^*\}$ solution de l'EDS

$$dX_s = -aX_s ds + \sigma dW_s^*. \quad (10.10)$$

Alors

$$\mathbb{E}^* \left(e^{-\int_t^T X_s ds} \middle| \mathcal{F}_t \right) = F(T - t, r_t - b^*),$$

où F est définie par

$$F(s, x) = \mathbb{E}^* \left(e^{-\int_0^s X_t^x dt} \right),$$

$\{X_t^x\}$ désignant la solution de l'EDS (10.10) qui vérifie $X_0 = x$. Comme $\int_0^s X_t^x dt$ est une v. a. r. gaussienne,

$$F(s, x) = \exp \left(-\mathbb{E}^* \int_0^s X_t^x dt + \frac{1}{2} \text{Var} \left[\int_0^s X_t^x dt \right] \right).$$

Or

$$\mathbb{E}^* \int_0^s X_t^x dt = x \frac{1 - e^{-as}}{a},$$

et

$$\text{Var} \left[\int_0^s X_t^x dt \right] = \int_0^s \int_0^s \text{Cov}(X_t^x, X_r^x) dt dr,$$

mais

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_t^x, X_r^x) &= \sigma^2 e^{-a(t+r)} \mathbb{E}^* \left(\int_0^t e^{as} dW_s^* \int_0^r e^{as} dW_s^* \right) \\ &= \sigma^2 e^{-a(t+r)} \frac{e^{2a(t \wedge r)} - 1}{2a}, \end{aligned}$$

d'où

$$\text{Var} \left[\int_0^s X_t^x dt \right] = \frac{\sigma^2 s}{a^2} - \frac{\sigma^2}{a^3} (1 - e^{-as}) - \frac{\sigma^2}{2a^3} (1 - e^{-as})^2.$$

Finalement

$$O_{t,T} = \exp \left(-(T-t)R(T-t, r_t) \right),$$

où $R(T-t, r_t)$, le taux d'intérêt moyen sur la période $[t, T]$, est donné par la formule

$$R(s, r) = R - (as)^{-1} \left[(R-r)(1 - e^{-as}) - \frac{\sigma^2}{4a^2} (1 - e^{-as})^2 \right],$$

avec $R = b^* - \sigma^2/2a^2$. R s'interprète comme un taux à long terme, qui est ici indépendant du "taux instantané spot" r . Cette dernière propriété est un défaut du modèle.

10.7 Exercices

Exercice 10.7.1. On considère une option d'achat (call) européenne portant sur un sous-jaçant dont le cours à l'instant 0 est de 105 Euros, au prix d'exercice $K = 110$ Euros, à échéance d'un an, avec un taux bancaire à 5% (i.e. $rT = 0,05$), et une volatilité telle que $\sigma\sqrt{T} = 0,3$.

1 Calculer le prix du call en appliquant la méthode de Monte-Carlo à la formule

$$C_0 = \mathbb{E}^* \left[(S_T - Ke^{-rT})_+ \right],$$

avec 1 000 tirages. On prendra soin d'évaluer (de façon approchée) la variance de la v.a. dont on cherche à estimer l'espérance, et on donnera un intervalle de confiance pour la quantité cherchée.

2 Faire le même calcul (y compris l'intervalle de confiance) en combinant la même méthode appliquée à la formule pour le prix du put :

$$P_0 = \mathbb{E}^* \left[(Ke^{-rT} - S_T)_+ \right],$$

avec le même nombre de tirages, et la formule de parité call-put.

3 Calculer une troisième fois le prix de la même option d'achat, en utilisant cette fois la formule

$$C_0 = S_0 F(d_1) - Ke^{-rT} F(d_2),$$

avec

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \log \left(\frac{S_0}{K} \right) + \frac{r\sqrt{T}}{\sigma} + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2},$$

$$d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \log \left(\frac{S_0}{K} \right) + \frac{r\sqrt{T}}{\sigma} - \frac{\sigma\sqrt{T}}{2},$$

et la fonction de répartition F de la $N(0, 1)$ fournie par Matlab.

4 Comparer les résultats avec ceux donnés par un "pricer" à trouver sur Internet.

5 Le prix du marché pour l'option ci-dessus étant de 15 Euros, en déduire la volatilité implicite (i.e. inverser la formule de Black-Scholes) en utilisant la méthode de Newton.

Exercice 10.7.2. A partir des mêmes inégalités à l'instant T , montrer que si C_t désigne le prix à l'instant t d'un call européen d'échéance T et de prix d'exercice K , sur un sous-jacent de prix $\{S_t\}$ dans le modèle de Black-Scholes,

$$S_t - Ke^{-r(T-t)} \leq C_t \leq S_t.$$

Montrer que le prix du put européen P_t vérifie quant à lui

$$P_t \leq Ke^{-r(T-t)}.$$

Exercice 10.7.3. Soit $\{S_t, 0 \leq t \leq T\}$ le prix d'un sous-jacent qui suit le modèle de Black-Scholes. On pose $U_t = \log S_t$. Dédurre de la formule d'Itô la forme de la différentielle de U_t , en fonction de dt et dB_t^* . On pose $v(t, y) = u(t, e^y)$, où $\{u(t, x)\}$ est la solution de l'EDP de Black-Scholes. Ecrire une EDP parabolique satisfaite par $\{v(t, y); 0 \leq t \leq T, y \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 10.7.4. (Option "chooser") On considère une option sur une action $\{S_t, 0 \leq t \leq T\}$ (laquelle suit le modèle de Black-Scholes) qui fonctionne de la façon suivante : étant donné $0 \leq t \leq T$ et $K > 0$, à l'instant 0, l'acheteur de l'option s'acquitte de la prime X_0 ; à l'instant t il choisit entre call et put; à l'instant T il a le droit d'exercer l'option choisie à l'instant t , au prix d'exercice K .

1 On note comme dans le cours C_t (resp. P_t) le prix du call (resp. du put) à l'instant t . Montrer que l'intérêt de l'acheteur est de choisir le call (resp. le put) si $C_t > P_t$ (resp. $P_t > C_t$). Vérifier à l'aide de la formule de parité call-put que $C_t \neq P_t$ p.s., sous \mathbb{P} comme sous \mathbb{P}^* .

2 En déduire que l'option rapporte p.s. à son acheteur à l'instant T

$$\begin{aligned} H &= (S_T - K)_+ \mathbf{1}_{\{C_t \geq P_t\}} + (K - S_T)_+ \mathbf{1}_{\{C_t < P_t\}} \\ &= (S_T - K)_+ + (K - S_T) \mathbf{1}_{\{C_t < P_t\}} \\ &= (K - S_T)_+ + (S_T - K) \mathbf{1}_{\{C_t > P_t\}} \end{aligned}$$

3 On rappelle que la théorie générale des options nous indique que $X_0 = e^{-rT} \mathbb{E}^*(H)$. Ecrire les événements $F_t = \{C_t < P_t\}$ et $G_t = \{C_t > P_t\}$ en fonction de S_t , K et $r(T - t)$. Montrer que $e^{-rT} \mathbb{E}^*(S_T \mathbf{1}_{F_t}) = e^{-rt} \mathbb{E}^*(S_t \mathbf{1}_{F_t})$, et de même pour G_t .

4 En déduire des formules pour les quantités $X_0 - C_0$ et $X_0 - P_0$, que l'on explicitera sous une forme analogue à celle des formules pour C_0 et P_0 à la fin de la section 10.2.

5 Montrer que l'option "chooser" a la valeur $\max(C_t, P_t)$ à l'instant t . On note $\{u(s, x)\}$ la solution de l'EDP de Black-Scholes pour le call, $\{v(s, x)\}$ la solution de la même EDP pour le put (ces EDP ne diffèrent que par leur condition finale à l'instant T). On note enfin $\{w(s, x), 0 \leq s \leq t, x > 0\}$ la solution de la même EDP avec la condition finale $\sup(u(t, x), v(t, x))$ à l'instant t . Décrire un portefeuille de couverture pour l'option "chooser", à l'aide de ces trois quantités.

Chapitre 11

Problèmes de révision

11.1 Examen du 17 décembre 1998

Problème I.

On considère une chaîne de Markov en temps discret $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ à valeurs dans l'espace fini $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, de matrice de transition P , dont les termes hors-diagonaux sont donnés par

$$P = \begin{pmatrix} \cdot & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 7/8 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & \cdot & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 1/5 & 1/5 & \cdot \end{pmatrix}$$

- **1** Déterminer les termes diagonaux de la matrice de transition P .
- **2** Déterminer les classes d'équivalence de la chaîne.
- **3** Montrer que les états 4 et 6 sont transitoires, et que l'ensemble $\{1, 2, 3, 5\}$ se décompose en deux classes récurrentes que l'on précisera.

Dans la suite, on notera $\mathcal{T} = \{4, 6\}$, \mathcal{C} la classe récurrente contenant 1, et \mathcal{C}' l'autre classe récurrente. Pour tout $i, j \in E$, on définit $\rho_i := \mathbb{P}_i(T < \infty)$, où $T := \inf\{n \geq 0; X_n \in \mathcal{C}\}$.

- **4** Montrer que

$$\rho_i = \begin{cases} 1, & \text{si } i \in \mathcal{C}; \\ 0, & \text{si } i \in \mathcal{C}'; \end{cases}$$

et que $0 < \rho_i < 1$, si $i \in \mathcal{T}$.

- **5** En utilisant la partition $\{T < \infty\} = \{T = 0\} \cup \{T = 1\} \cup \{2 \leq T < \infty\}$ et en conditionnant dans le calcul de $\mathbb{P}_i(2 \leq T < \infty)$ par la valeur de X_1 , établir la formule

$$\rho_i = \sum_{j \in E} P_{ij} \rho_j, \quad \text{si } i \in \mathcal{T}.$$

- **6** Calculer ρ_4 et ρ_6 .
- **7** En déduire (quasiment sans calcul!) les valeurs de $\mathbb{P}_4(T_{\mathcal{C}'} < \infty)$ et de $\mathbb{P}_6(T_{\mathcal{C}'} < \infty)$, où $T_{\mathcal{C}'} := \inf\{n \geq 0; X_n \in \mathcal{C}'\}$.

Problème II

On considère à la fois la chaîne de Markov en temps discret $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ à valeurs dans $E = \mathbb{N}$, de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & \dots \\ q & 0 & p & 0 & \dots \\ 0 & q & 0 & p & \dots \\ 0 & 0 & q & 0 & p\dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

et le processus markovien de sauts en temps continu $\{X_t; t \geq 0\}$ à valeurs dans $E = \mathbb{N}$, de générateur infinitésimal

$$Q = \begin{pmatrix} -p & p & 0 & 0 & \dots \\ q & -1 & p & 0 & \dots \\ 0 & q & -1 & p & \dots \\ 0 & 0 & q & -1 & p\dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

où $0 < p, q < 1$, $p + q = 1$.

On pourra dans la suite comparer la chaîne $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ et la marche aléatoire à valeurs dans \mathbf{Z} étudiée dans l'exercice 2.10.4 (pour laquelle on a montré le caractère transitoire lorsque $p \neq q$, et récurrent nul lorsque $p = q$), et remarquer que le processus $\{X_t; t \geq 0\}$ est une file d'attente $M/M/1$ comme étudiée dans le cours en 4.10.1.

- **1** La chaîne $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ est-elle la chaîne incluse du processus $\{X_t; t \geq 0\}$?

- **2** Montrer que les deux processus $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ et $\{X_t; t \geq 0\}$ sont irréductibles.
- **3** Montrer que toute mesure invariante de $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ est une mesure invariante de $\{X_t; t \geq 0\}$, et vice-versa. Montrer que les chaînes sont de même nature (toutes deux transientes, ou récurrentes positives, ou récurrentes nulles).
- **4** Montrer que les deux chaînes sont transientes dans le cas $p > q$.
- **5** Montrer que les deux chaînes sont récurrentes dans le cas $p = q = 1/2$ (on pourra utiliser la comparaison avec l'exercice 2.21.4). Calculer dans ce cas une mesure invariante (on déterminera π_1 en fonction de π_0 , puis π_2 en fonction de π_0, \dots), et en déduire que le processus est récurrent nul.
- **6** On se place maintenant dans le cas $p < q$. On pose $\lambda = p/q$, et on remarque que $q^{-1}(\lambda - p) = \lambda^2$. Montrer qu'il existe une probabilité géométrique invariante pour les deux chaînes (on calculera π_1 en fonction de π_0 , π_2 en fonction de π_0, \dots).

La fin du problème étudie deux variantes de la chaîne en temps continu $\{X_t; t \geq 0\}$.

- **7** On modifie le générateur infinitésimal Q en multipliant p et q par une même constante $c > 0$. Montrer que ni la nature de la chaîne (transience, récurrence nulle ou positive), ni l'éventuelle mesure invariante n'est modifiée par la présence de la constante c . Qu'est-ce qui est modifié dans le processus ?
- **8** On se place dans le cas $p < q$, on utilise toujours la notation $\lambda = p/q$, et on considère maintenant le processus markovien de sauts $\{Y_t; t \geq 0\}$ de générateur infinitésimal Q' défini par :

$$Q'_{0j} = \begin{cases} -p, & \text{si } j = 0; \\ p, & \text{si } j = 1; \\ 0, & \text{sinon;} \end{cases}$$

et pour $i \geq 1$:

$$Q'_{ij} = \begin{cases} \lambda^i q, & \text{si } j = i - 1; \\ -\lambda^i, & \text{si } j = i; \\ \lambda^i p, & \text{si } j = i + 1; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comparer les chaînes incluses de $\{X_t; t \geq 0\}$ et de $\{Y_t; t \geq 0\}$.

Vérifier que $\{\pi_i = 1; i \in \mathbb{N}\}$ est une mesure invariante, et en déduire que $\{Y_t; t \geq 0\}$ est récurrente nulle. Expliquer pourquoi $\{Y_t\}$ met en moyenne plus de temps que $\{X_t\}$ à revenir en i , partant de i .

11.2 Corrigé de l'examen du 17 décembre 1998

Problème I.

- **1** On détermine les termes diagonaux de P en écrivant que la somme des termes de chaque ligne vaut 1. On trouve successivement comme termes diagonaux, dans l'ordre : $1/2, 2/3, 1/8, 0, 1/4, 2/5$.
- **2** On voit que 1 et 2 communiquent, 3 et 5 communiquent, ainsi que 4 et 6. On peut aussi aller de 4 en 1, 2 ou 5, et de 6 en 2 ou 5. Mais la réciproque n'est pas vraie. Donc il y a trois classes, qui sont $\{1, 2\}$, $\{3, 5\}$ et $\{4, 6\}$.
- **3** Comme on l'a dit ci-dessus, la chaîne peut quitter la classe $\{4, 6\}$, alors que quand elle est dans la classe $\{1, 2\}$ ou dans la classe $\{3, 5\}$, elle n'en sort plus. Donc si la chaîne part de 4 ou de 6, elle aboutit tôt ou tard dans l'une des deux autres classes. Les états 4 et 6 sont transitoires, et les deux classes $\{1, 2\}$ et $\{3, 5\}$ sont récurrentes, puisque quand la chaîne part de l'une de ces classes, elle y reste.
- **4** Si $i \in \mathcal{C}$, $X_0 \in \mathcal{C}$ sous \mathbb{P}_i , donc $T = 0$ \mathbb{P}_i p.s., et $\rho_i = 1$. Si $i \in \mathcal{C}'$, sous \mathbb{P}_i la chaîne n'atteint jamais \mathcal{C} , puisqu'elle reste dans \mathcal{C}' , et donc $T = \infty$ \mathbb{P}_i p.s., et $\rho_i = 0$. Si $i \in \mathcal{T}$, $\mathbb{P}_i(X_1 = 2) > 0$, et $\mathbb{P}_i(X_1 = 5) > 0$, d'où, puisque $\{X_1 = 2\} \subset \{T < \infty\}$ et $\{X_1 = 5\} \subset \{T = \infty\}$, $0 < \rho_i < 1$.
- **5** Soit $i \in \mathcal{T}$.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}_i(T < \infty) &= \mathbb{P}_i(T = 0) + \mathbb{P}_i(T = 1) + \mathbb{P}_i(2 \leq T < \infty) \\
 &= 0 + \mathbb{P}_i(X_1 \in \mathcal{C}) + \sum_{k \in \mathcal{T}} \mathbb{P}_i(X_1 = k, T < \infty) \\
 &= \sum_{j \in \mathcal{C}} P_{ij} + \sum_{k \in \mathcal{T}} P_{ik} \rho_k \\
 &= \sum_{j \in E} P_{ij} \rho_j,
 \end{aligned}$$

où on a utilisé à l'avant-dernière égalité

$$\sum_{k \in \mathcal{T}} \mathbb{P}_i(X_1 = k, T < \infty) = \sum_{k \in \mathcal{T}} P_{ik} \mathbb{P}_k(T < \infty),$$

ce qui résulte de la propriété de Markov, et à la dernière égalité les valeurs de ρ_i pour $i \in \mathcal{C} \cup \mathcal{C}'$.

- **6** L'équation ci-dessus s'écrit

$$\begin{aligned} \rho_4 &= P_{41} + P_{42} + P_{44}\rho_4 + P_{46}\rho_6 \\ \rho_6 &= P_{61} + P_{62} + P_{64}\rho_4 + P_{66}\rho_6, \end{aligned}$$

soit

$$\rho_4 = 1/2 + \rho_6/4, \quad \rho_6 = 1/5 + \rho_4/5 + 2\rho_6/5,$$

ce qui donne $\rho_4 = 7/11$, $\rho_6 = 6/11$.

- **7** La chaîne aboutit p.s. dans une des deux classes récurrentes (et ne visite pas l'autre), donc pour tout $i \in E$, $\mathbb{P}_i(T < \infty) + \mathbb{P}_i(T_{\mathcal{C}'} < \infty) = 1$. Soit $\mathbb{P}_4(T_{\mathcal{C}'} < \infty) = 1 - \rho_4 = 4/11$, et $\mathbb{P}_6(T_{\mathcal{C}'} < \infty) = 1 - \rho_6 = 5/11$.

Problème II

- **1** Non, la chaîne $\{X_n\}$ n'est pas la chaîne incluse de $\{X_t\}$. La matrice de transition de la chaîne incluse a sa première ligne égale à $(0, 1, \dots)$, et le reste de P est le même. Il n'est pas difficile de voir que $\{X_n\}$ est irréductible comme la chaîne incluse, et qu'elle a la même propriété en terme de transience, récurrence nulle ou positive (cf. question **3**). Seule la forme exacte d'une éventuelle mesure invariante est un petit peu différente.
- **2** Puisque $0 < p, q < 1$, aussi bien $\{X_n\}$ que la chaîne $\{Y_n\}$ incluse dans $\{X_t\}$ passe avec une probabilité positive de 0 à 1, et de i à $i - 1$ et $i + 1$, pour $i \geq 1$. Donc pour $i, j \in \mathbb{N}$, chacun des deux processus a une probabilité non nulle, partant de i , d'atteindre j en $|j - i|$ "coups". Les deux processus sont donc irréductibles sur \mathbb{N} .
- **3** Il est facile de voir que l'équation $\pi P = \pi$ est identique à l'équation $\pi Q = 0$, puisque $Q = P - I$. Donc toute solution d'une équation est solution de l'autre, donc $\{X_n\}$ et $\{X_t\}$ ont même mesure invariante. Le caractère transient ou récurrent de $\{X_t\}$ est équivalent au caractère transient ou récurrent de la chaîne incluse $\{Y_n\}$ (cf. début de la section 4.5 du cours), qui est équivalent au caractère transient ou récurrent

de $\{X_n\}$. En effet une chaîne de Markov $\{X_n\}$ à valeurs dans \mathbb{N} est transiente ssi $X_n \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$, puisque la transience est équivalente au fait que pour tout $m \geq 1$, il existe $n(\omega, m)$ tel que $n > n(\omega, m) \Rightarrow X_n \notin \{0, 1, \dots, m\}$. Ceci dépend des lignes de la matrice de transition au delà de la m -ième, qui sont les mêmes pour les matrices de transition de $\{X_n\}$ et de $\{Y_n\}$.

Enfin, une façon de distinguer entre récurrence positive et récurrence nulle est de regarder le type de mesure invariante pour la chaîne. Donc d'après ce qui précède, si $\{X_n\}$ et $\{X_t\}$ sont récurrentes, elles sont soit toutes les deux récurrentes positives, soit toutes les deux récurrentes nulles.

- **4** Il suffit de considérer $\{X_n\}$. Or $X_{n+1} = X_n + \mathbf{1}_{\{X_n > 0\}}Y_{n+1} + \mathbf{1}_{\{X_n = 0\}}Y_{n+1}^+$, avec X_0, Y_1, Y_2, \dots indépendantes, $\mathbb{P}(Y_i = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(Y_i = -1)$. Donc $X_n \geq X_0 + \sum_{i=1}^n Y_i$, et comme les Y_i sont i.i.d., avec $\mathbb{E}(Y_i) = p - q > 0$, $\sum_{i=1}^n Y_i \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow \infty$, et a fortiori $X_n \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow \infty$, et $\{X_n\}$ est transiente.
- **5** Il suffit de montrer que $X_n \not\rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$. Pour cela il suffit de montrer par exemple que partant de n'importe quel $i > 1$, la chaîne visite p.s. l'état $i - 1$ (et donc revient p.s. en i par irréductibilité). Comme la trajectoire de X_n entre i et $i - 1$ ne passe pas en 0, la loi du temps d'atteinte de $i - 1$ partant de i est la même que pour la marche aléatoire $\sum Y_i$, dont on sait par l'exercice 2.21.4 qu'elle est récurrente dans le cas $p = q$, donc le temps d'atteinte de $i - 1$ partant de i est p.s. fini. On pourrait argumenter que le caractère récurrent nul de $\{X_n\}$ se déduit de celui de $\sum Y_i$, mais il est tout aussi simple de remarquer que la mesure π donnée par $\pi_i = 1, \forall i \in \mathbb{N}$ est invariante pour $\{X_n\}$.
- **6** En résolvant l'équation $\pi Q = 0$, on trouve $\pi_1 = (p/q)\pi_0, \pi_2 = (\pi_1 - p\pi_0)/q = \pi_0(\lambda - p)/q = \lambda^2\pi_0$. plus généralement, on a que $\forall i \geq 1, \pi_{i+1} = (\pi_i - p\pi_{i-1})/q$. Donc si $\pi_i = \lambda\pi_{i-1}$, alors $\pi_{i+1} = \pi_{i-1}(\lambda - p)/q = \lambda^2\pi_{i-1} = \lambda\pi_i$. Donc par récurrence, $\pi_i = \lambda^i\pi_0$, et π est une probabilité si $\pi_0 = 1 - \lambda$, ce qui donne finalement $\pi_i = (1 - \lambda)\lambda^i, i \in \mathbb{N}$. Il s'agit bien d'une loi géométrique, et ce résultat est en accord avec l'exemple 4.10.1 du cours. Dans ce cas $p < q$, les chaînes sont récurrentes positives.
- **7** Il est facile de vérifier que tous les raisonnements ci-dessus sont inchangés par la présence de la constante c , puisque celle-ci ne modifie ni la chaîne incluse ni l'équation pour une éventuelle mesure invariante. La constante c modifie seulement la loi des temps de séjour dans chaque état, en multipliant par c le paramètre de la loi exponentielle corres-

pondante. Si $c > 1$, on raccourcit “en loi” les temps de séjour, si $c < 1$, on les rallonge (l’espérance d’une v.a. qui suit la loi exponentielle(c) est c^{-1}).

- **8** On voit aisément que la chaîne incluse de $\{Y_t\}$ est la même que celle associée à $\{X_t\}$. Mais l’équation pour la mesure invariante devient $\lambda q \pi_1 = p \pi_0$, et pour $i \geq 1$, $\lambda^{i+1} p \pi_{i+1} = \lambda^i \pi_i - \lambda^{i-1} q \pi_{i-1}$, et on voit aisément que la mesure “uniforme” ($\pi_i = 1, \forall i$) est invariante. En rallongeant de plus en plus les temps de séjour dans les états “éloignés de 0” (on multiplie le paramètre de la loi exponentielle par λ^i , un facteur d’autant plus petit que i est grand), on rend l’espérance du temps de retour en i infini.

Cette dernière question donne un exemple d’un processus markovien de saut récurrent nul dont la chaîne incluse est récurrente positive. Pour un exemple dans l’autre sens (le processus en temps continu récurrent positif, la chaîne incluse récurrente nulle), il suffit de choisir $p = q = 1/2$, et de multiplier cette fois la i -ème ligne de la matrice Q par λ^{-i} , ($\lambda < 1$ comme ci-dessus). Alors la même probabilité géométrique qu’à la question **6** est invariante pour le processus en temps continu. En divisant la i -ème ligne par λ^i , on raccourcit le temps de séjour dans l’état i , le facteur λ^i étant d’autant plus petit que i est grand. On raccourcit donc la longueur des excursions partant de 0, celles-ci devenant d’espérance finie, alors même que le nombre d’états visités entre deux passages à l’état i est d’espérance infinie (la chaîne incluse est récurrente nulle).

11.3 Examen du 4 janvier 2000

Exercice On considère une chaîne de Markov en temps discret $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ à valeurs dans l’espace fini $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, de matrice de transition P , dont les termes hors-diagonaux sont donnés par

$$P = \begin{pmatrix} \cdot & 1/4 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & \cdot & 0 & 1/4 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & \cdot & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/4 & \cdot \end{pmatrix}$$

- **1** Déterminer les termes diagonaux de la matrice de transition P .

- **2** Montrer que E est constitué de deux classes d'équivalence que l'on précisera, l'une \mathcal{R} étant récurrente et l'autre \mathcal{T} transiente.

Problème 1

- **A** Soit X le nombre aléatoire d'individus dans une population donnée, de fonction génératrice $\phi(u) = \mathbb{E}[u^X]$, $0 \leq u \leq 1$. Indépendamment des autres, chaque individu est sélectionné avec probabilité q ($0 < q < 1$). On note Y le nombre d'individus sélectionnés parmi la population initiale de X individus. Montrer que la fonction génératrice ψ de Y (définie par $\psi(u) = \mathbb{E}[u^Y]$) est donnée par

$$\psi(u) = \phi(1 - q + qu).$$

- **B** On considère un système de service (pourvu d'un nombre illimité de serveurs), et on note X_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) le nombre de clients présents dans le système à l'instant n . On suppose qu'à l'instant $n + 1/3$ chacun des X_n clients présents est servi et quitte le système avec probabilité $1 - p$, et reste avec probabilité p (indépendamment des autres, et de tout le reste) (on notera X'_n le nombre de clients restant), et qu'à l'instant $n + 2/3$ Y_{n+1} clients nouveaux arrivent. On suppose que les variables aléatoires X_0, Y_1, Y_2, \dots sont indépendantes entre elles et globalement indépendantes des fin de service des clients aux différents instants, et que la loi commune des Y_n est la loi de Poisson de paramètre $\theta > 0$ (i.e. $\mathbb{P}(Y = k) = e^{-\theta} \theta^k / k!$, et $\mathbb{E}[u^{Y_n}] = \exp[\theta(u - 1)]$).
 - **1** Montrer que $\{X_n; n \geq 0\}$ est une chaîne de Markov irréductible à valeurs dans \mathbb{N} .
 - **2** Calculer $\mathbb{E}[u^{X_{n+1}} / X_n = i]$ en fonction de u, p, θ et i .
 - **3** On note $\phi_n(u) = \mathbb{E}[u^{X_n}]$ la fonction génératrice de X_n . Calculer ϕ_{n+1} en fonction de ϕ_n , puis montrer que

$$\phi_n(u) = \exp \left[\theta(u - 1) \sum_0^{n-1} p^k \right] \phi_0(1 - p^n + p^n u).$$

- **4** Montrer que $\psi(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(u)$ existe et ne dépend pas de ϕ_0 , et que ψ est la fonction génératrice d'une loi de Poisson dont on précisera le paramètre en fonction de θ et p .
- **5** Montrer que la chaîne $\{X_n; n \geq 0\}$ est récurrente positive et préciser sa probabilité invariante.

Problème 2

- **A** On considère une suite aléatoire en temps discret $\{X_n; n \geq 0\}$ à valeurs dans \mathbb{N} , définie comme suit : $X_0 = x_0 \in \mathbb{N}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_{n+1} = \begin{cases} (X_n + U_{n+1})^+, & \text{si } V_{n+1} = 1; \\ 0, & \text{si } V_{n+1} = 0; \end{cases}$$

où la suite $(U_1, V_1, U_2, V_2, \dots)$ est indépendante, et pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}(U_n = 1) = \mathbb{P}(U_n = -1) = 1/2, \quad \mathbb{P}(V_n = 1) = 1 - \mathbb{P}(V_n = 0) = p,$$

avec $0 < p < 1$.

- **1** Montrer que $\{X_n; n \geq 0\}$ est une chaîne de Markov irréductible à valeurs dans \mathbb{N} , dont on précisera la matrice de transition.
- **2** Montrer que la chaîne $\{X_n; n \geq 0\}$ est récurrente positive (on ne cherchera pas ici de probabilité invariante, on utilisera un raisonnement “probabiliste”).
- **3** Montrer que si α est la racine de l'équation $p(1 + \alpha^2) = 2\alpha$ située dans l'intervalle $]0, 1[$, alors la probabilité géométrique π sur \mathbb{N} donnée par $\pi_i = (1 - \alpha)\alpha^i$, $i \in \mathbb{N}$, est l'unique probabilité invariante de la chaîne.
- **B** On considère maintenant un processus markovien de sauts en temps continu $\{X_t; t \geq 0\}$ à valeurs dans \mathbb{N} , de générateur infinitésimal

$$Q = \begin{pmatrix} -p/2 & p/2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 - p/2 & -1 & p/2 & 0 & 0 & \dots \\ 1 - p & p/2 & -1 & p/2 & 0 & \dots \\ 1 - p & 0 & p/2 & -1 & p/2 & 0 \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots \end{pmatrix}.$$

Préciser la matrice de transition de sa chaîne incluse (comparer avec la chaîne de la partie **A**). Montrer que $\{X_t; t \geq 0\}$ est irréductible et récurrent. Montrer que la probabilité de la question **A 3** est invariante pour X_t . En déduire que $\{X_t; t \geq 0\}$ est récurrente positive.

11.4 Corrigé de l'examen du 4 janvier 2000**Exercice**

1 On détermine les termes diagonaux de la matrice P en écrivant que la somme des termes de chaque ligne vaut 1. On trouve $5/12, 1/6, 1/2, 1/6, 0, 5/12$.

2 On remarque que 1 et 2 communiquent, ainsi que 1 et 3. Par ailleurs, 4 et 5 communiquent, ainsi qu 5 et 6, 6 et 4. Par contre, on peut aller de 2 vers 4 ou 5, mais pas en revenir. Donc on a une classe transiente, $\mathcal{T} = \{1, 2, 3\}$, et une classe récurrente, $\mathcal{R} = \{4, 5, 6\}$.

Problème 1

A On calcule d'abord $\mathbb{E}[u^Y / X = k]$, qui vaut la fonction génératrice de la loi binomiale $B(k, q)$, soit

$$\mathbb{E}[u^Y / X = k] = (qu + 1 - q)^k,$$

donc

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \mathbb{E}[u^Y] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[u^Y / X = k] \mathbb{P}(X = k) \\ &= \mathbb{E} [(qu + 1 - q)^X] \\ &= \phi(qu + 1 - q). \end{aligned}$$

B 1 Une façon de construire la chaîne $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ est la suivante. Soit $\{Z_{n,k}; n, k \in \mathbb{N}^*\}$ des v. a. de Bernoulli i.i.d., de loi commune t.q. $\mathbb{P}(Z_{n,k} = 1) = 1 - \mathbb{P}(Z_{n,k} = 0) = p$. On définit

$$X'_n = \sum_{k=1}^{X_n} Z_{n+1,k}$$

et

$$X_{n+1} = X'_n + Y_{n+1}.$$

On voit alors aisément que l'on peut appliquer le Lemme 2.2.2 pour montrer que $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ est une chaîne de Markov. Remarquons cependant que la suite des Y_n du lemme est ici la suite des (Y_n, Z_n, \cdot) , qui prend ses valeurs dans $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, qui n'est pas dénombrable mais continu (le lemme est bien sûr encore vrai dans ce cas). Cette chaîne est irréductible, sa matrice de transition P ayant même la propriété $P_{i,j} > 0$, pour tous $i, j \in \mathbb{N}$, puisque

$$P_{i,j} > \mathbb{P}(X'_n = 0 / X_n = i) \mathbb{P}(Y_{n+1} = j) > 0.$$

2 La seconde égalité ci-dessous résulte de l'indépendance entre Y_{n+1} et le couple (X_n, X'_n) .

$$\begin{aligned}\mathbb{E} [u^{X_{n+1}}/X_n = i] &= \mathbb{E} [u^{X'_n + Y_{n+1}}/X_n = i] \\ &= \mathbb{E} [u^{Y_{n+1}}] \mathbb{E} [u^{X'_n}/X_n = i] \\ &= e^{\theta(u-1)}(pu + 1 - p)^i,\end{aligned}$$

3 Il résulte du dernier calcul

$$\begin{aligned}\phi_{n+1}(u) &= \mathbb{E} [e^{\theta(u-1)}(pu + 1 - p)^{X_n}] \\ &= e^{\theta(u-1)}\phi_n(pu + 1 - p),\end{aligned}$$

dont on tire la formule de l'énoncé par récurrence.

4 Quand $n \rightarrow \infty$, $1 - p^n + p^n u \rightarrow 1$. En outre ϕ_0 est continue et $\phi_0(1) = 1$, $\sum_0^{n-1} p^k \rightarrow (1 - p)^{-1}$,

$$\phi_n(u) \rightarrow \psi(u) = \exp[\theta(1 - p)^{-1}(u - 1)],$$

qui est la fonction génératrice de la loi de Poisson de paramètre $\theta(1 - p)^{-1}$.

5 Il résulte des calculs précédents que si ψ est la fonction génératrice de la loi de X_n , alors c'est aussi celle de la loi de X_{n+1} , donc la chaîne $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ admet la loi de Poisson de paramètre $\theta(1 - p)^{-1}$ comme probabilité invariante. Puisque cette chaîne est irréductible, il résulte alors du théorème 2.6.3 qu'elle est récurrente positive.

Problème 2

A 1 Il est assez clair d'après l'énoncé que le lemme 2.2.2 s'applique à nouveau, donc on a bien une chaîne de Markov. Sa matrice de transition est

$$P = \begin{pmatrix} 1 - p/2 & p/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 - p/2 & 0 & p/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 - p & p/2 & 0 & p/2 & 0 & 0 \\ 1 - p & 0 & p/2 & 0 & p/2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix},$$

et puisque les deux diagonales inférieures et supérieure ne contiennent pas de 0, on peut "avancer" et "reculer" d'un pas à chaque instant, donc aller en temps fini de i à j , pour tout couple d'états $i, j \in \mathbb{N}$, d'où l'irréductibilité.

2 Soit T le temps du premier retour en 0, partant de 0. $\mathbb{P}(T > k) < p^k$ pour tout $k \geq 1$. Donc

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(T > k) < \infty.$$

Donc l'état 0 est récurrent positif, et donc la chaîne a cette propriété, grâce à l'irréductibilité.

3 Les calculs permettent de vérifier que la probabilité π donnée dans l'énoncé satisfait $\pi P = \pi$, donc c'est une probabilité invariante, qui est unique par irréductibilité.

B La matrice de transition de la chaîne incluse diffère de la matrice P de la partie **A** uniquement par sa première ligne, qui vaut $(0 \ 1 \ 0 \ 0 \ \dots)$. Donc la chaîne incluse est irréductible, et avec les notations de la question **A 2** appliquées à la chaîne incluse, on a $\mathbb{P}(T > k) < p^{k-1}$, et donc $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$, donc la chaîne incluse est récurrente, et $\{X_t\}$ est récurrent irréductible. Puisque $Q = P - I$, t que $\pi P = \pi$, $\pi Q = 0$, et par le théorème 4.6.1 $\{X_t\}$ est récurrent positif.

11.5 Examen du 31 janvier 2001

Problème 1. On considère une chaîne de Markov en temps discret $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ à valeurs dans l'espace fini $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, de matrice de transition P , dont les termes hors-diagonaux sont donnés par

$$P = \begin{pmatrix} \cdot & 1/4 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & \cdot & 0 & 1/4 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & \cdot & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/4 & \cdot \end{pmatrix}.$$

- **1** Déterminer les termes diagonaux de la matrice de transition P .
- **2** Montrer que E est constitué de deux classes d'équivalence que l'on précisera, l'une \mathcal{R} étant récurrente et l'autre \mathcal{T} transiente.
- **3** On pose $T := \inf\{n \geq 0; X_n \in \mathcal{R}\}$, et $h_i = \mathbb{E}_i(T)$, pour $i \in E$. Montrer que $h_i = 0$ pour $i \in \mathcal{R}$, et que $1 < h_i < \infty$ pour $i \in \mathcal{T}$.

- **4** Montrer que pour tout $i \in \mathcal{T}$,

$$h_i = 1 + \sum_{j \in E} P_{ij} h_j.$$

En déduire les valeurs de h_i , $i \in \mathcal{T}$.

Problème 2.

Partie A Soit $X_0, A_0, D_0, A_1, D_1, \dots$ des v.a. indépendantes à valeurs dans \mathbb{N} . Les D_n suivent la loi de Bernoulli de paramètre q , i. e. $\mathbb{P}(D_n = 1) = 1 - \mathbb{P}(D_n = 0) = q$, avec $0 < q < 1$. Les A_n suivent toutes la même loi définie par $\mathbb{P}(A_n = k) = r_k$, $k \in \mathbb{N}$, avec $0 \leq r_k < 1$, $0 < r_0 < 1$ et $\sum_{k=0}^{\infty} r_k = 1$. On suppose que $p = \sum_k k r_k < \infty$.

On considère la suite de v.a. $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ définie par récurrence à partir de X_0 par

$$X_{n+1} = (X_n + A_n - D_n)^+,$$

avec la notation usuelle $x^+ = \sup(x, 0)$.

- **1** Montrer que $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ est une chaîne de Markov, préciser sa matrice de transition P , et montrer que cette chaîne est irréductible. On suppose dorénavant que $X_0 = 0$. On note $T = \inf\{n > 0; X_n = 0\}$, et on définit $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (A_k - D_k)$.
- **2** Montrer que $X_n \geq S_n$, et que $X_{n+1} = S_{n+1}$ sur l'événement $\{T > n\}$.
- **3** Montrer que $S_n/n \rightarrow p - q$ p.s., quand $n \rightarrow \infty$.
- **4** Montrer que si $p < q$, $T < \infty$ p.s.
- **5** On suppose que $p > q$. Montrer que la chaîne $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ visite au plus un nombre fini de fois 0.
- **6** En se limitant au cas $p \neq q$, préciser dans quel cas la chaîne est récurrente, et dans quel cas elle est transiente. On suppose dorénavant que $\mathbb{P}(A_n = 1) = 1 - \mathbb{P}(A_n = 0) = p$, avec $0 < p < 1$ (p est encore l'espérance de A_n).
- **7** Préciser la matrice P dans ce cas.
- **8** Montrer que si $p = q$ la chaîne est récurrente nulle (on utilisera le résultat de la question **c** de l'Exercice 2.10.4 *sans le redémontrer*, pour montrer la récurrence, puis on cherchera une mesure invariante).
- **9** On suppose $p < q$. Montrer que la chaîne admet une unique probabilité invariante π sur \mathbb{N} , et que $\pi_k = (1 - a)a^k$, avec $a = p(1 - q)/q(1 - p)$ (on établira une relation de récurrence pour la suite $\Delta_k = \pi_k - \pi_{k+1}$). Montrer que la chaîne est récurrente positive.

Partie B Soit $\{X_t; t \geq 0\}$ une chaîne de Markov en temps continu à valeurs dans \mathbb{N} , de générateur infinitésimal

$$Q = \begin{pmatrix} -\mu & \mu & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \lambda & -(\lambda + \mu) & \mu & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda & -(\lambda + \mu) & \mu & 0 & \dots \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

avec $\lambda, \mu > 0$.

- **1** Déterminer la chaîne incluse. Montrer que $\{X_t; t \geq 0\}$ est irréductible.
- **2** Montrer que $\{X_t; t \geq 0\}$ est récurrente dans le cas $\lambda \geq \mu$, transiente dans le cas $\lambda < \mu$.
- **3** Montrer que dans le cas $\lambda > \mu$, il existe une unique mesure invariante π de la forme donnée à la question **A 9**, avec a que l'on déterminera en fonction de λ et μ .
- **4** Montrer que $\{X_t; t \geq 0\}$ est récurrente positive dans le cas $\lambda > \mu$, récurrente nulle dans le cas $\lambda = \mu$.

11.6 Corrigé de l'examen du 31 janvier 2001

Problème 1

- **1** Les termes diagonaux sont $(5/12, 1/6, 1/2, 1/6, 0, 5/12)$.
- **2** ON vérifie aisément que $\mathcal{T} = \{1, 2, 3\}$ et $\mathcal{R} = \{4, 5, 6\}$.
- **3** Si $i \in \mathcal{R}$, $T = 0$ \mathbb{P}_i p.s., donc $h_i = 0$. Si $i \in \mathcal{T}$, $T \geq 1$ \mathbb{P}_i p.s., et en outre $\mathbb{P}_i(T > 1) > 0$, donc

$$\mathbb{E}_i(T) \geq \mathbb{P}_i(T = 1) + 2\mathbb{P}_i(T > 1) > 1.$$

Pour montrer que $h_i < \infty$, on modifie la matrice P , en changeant par exemple la dernière ligne en $(5/12, 0, 0, 1/3, 1/4, 0)$, se qui rend la chaîne irréductible, sans modifier la loi de T sous \mathbb{P}_i , donc sans modifier h_i . On conclut en utilisant le Corollaire 2.5.5.

- **4** L'identité de l'énoncé s'obtient en écrivant que le temps mis pour atteindre \mathcal{R} , partant de i à l'instant 0, vaut 1 plus le temps mis à atteindre \mathcal{R} , partant du point X_1 , soit

$$h_i = 1 + \mathbb{E}[\mathbb{E}_{X_1}(T)].$$

Tenant compte de ce que $h_4 = h_5 = h_6 = 0$, on obtient le système linéaire

$$\begin{aligned} h_1 &= 1 + \frac{5}{12}h_1 + \frac{1}{4}h_2 + \frac{1}{3}h_3 \\ h_2 &= 1 + \frac{1}{4}h_1 + \frac{1}{6}h_2 \\ h_3 &= 1 + \frac{1}{2}h_1 + \frac{1}{2}h_3 \end{aligned}$$

On trouve la solution $h_1 = 236/21$, $h_2 = 32/7$, $h_3 = 278/21$.

Problème 2

A

– **1** Si l'on pose $Y_{n+1} = A_n - D_n$ et $f(x, y) = (x - y)^+$, la propriété de Markov résulte du Lemme 2.1.2. On a

$$\begin{cases} P_{00} = \mathbb{P}(A_n - D_n \leq 0) = r_0 + qr_1 \\ P_{i, i+k} = qr_{k+1} + (1-q)r_k, \quad k \in \mathbb{N}, \\ P_{i, i-1} = qr_0, \quad i \in \mathbb{N}^* \\ P_{i, i-\ell} = 0, \quad \ell \geq 2, \quad i \geq \ell \end{cases}$$

Puisque $r_0 < 1$, il existe $k > 0$ tel que $r_k > 0$. En outre $q < 1$. Donc $P_{i, i+k} > 0$ et en outre $P_{i, i-1} > 0$, donc partant de i , la chaîne peut atteindre $i + nk - \ell$ en $n + \ell$ coups, $n, \ell \in \mathbb{N}^*$. Or pour tout $i \neq j$, il existe $n, \ell \in \mathbb{N}$ tel que $j = i + nk - \ell$

– **2**

$$X_{n+1} \geq X_n + A_n - D_n$$

Donc si $X_n \geq S_n$, $X_{n+1} \geq S_{n+1}$. Or $X_0 = S_0 = 0$. L'inégalité est donc démontrée par récurrence.

si $T > n$, $X_k > 0$, $1 \leq k \leq n$, donc

$$X_{k+1} = X_k + A_k - D_k, \quad 0 \leq k < n$$

d'où $X_n = S_n > 0$,

c'est à dire $X_n \geq 1$, et puisque $A_n - D_n \geq -1$,

$$X_n + A_n - D_n \geq 0$$

$$X_{n+1} = S_{n+1}$$

- 3

$$\begin{aligned} \frac{S_n}{n} &= \frac{1}{n} \sum_0^{n-1} A_k - \frac{1}{n} \sum_0^{n-1} D_k \\ &\rightarrow \mathbb{E} A_0 - \mathbb{E} D_0 = p - q \end{aligned}$$

p.s. quand $n \rightarrow \infty$, par la loi des grands nombres.

- 4 Si $p < q$, $\frac{S_n}{n} \rightarrow p - q < 0$, donc $S_n \rightarrow -\infty$.

Donc $T < \infty$ p.s., puisque sur $\{T < +\infty\}$, $X_n = S_n$, $\forall n$, et $X_n \geq 0$.

- 5 Si $p > q$, $S_n \rightarrow +\infty$. Puisque $X_n \geq S_n$, $X_n \rightarrow \infty$ p.s., d'où le résultat.

- 6 Dans le cas $p > q$, on vient de voir que l'état 0 est transitoire (un état récurrent est visité une infinité de fois), donc la chaîne est transitoire.

Dans le cas $p < q$, $P(T < \infty) = 1$, ce qui veut dire exactement que 0 est récurrent, donc la chaîne est récurrente.

- 7 On a

$$P = \begin{pmatrix} 1-p+qp & (1-q)p & 0 & 0 & 0 \\ q(1-p) & qp+(1-q)(1-p) & (1-q)p & 0 & 0 \\ 0 & q(1-p) & qp+(1-q)(1-p) & (1-q)p & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

- 8 Dans le cas $p = q$, tant qu'elle est dans \mathbb{N}^* , la chaîne se comporte comme une marche aléatoire symétrique, sauf que $\mathbb{P}(X_{n+1} = X_n) > 0$.

Si on définit $T_1 = \inf\{n \geq 0, X_n \neq X_0\}$, $T_2 = \inf\{n \geq T_1; X_n \neq X_{T_1}\}$, ... alors $Z_n = X_{T_n}$, $n \in \mathbb{N}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition

$$P' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Sur \mathbb{N}^* , $\{Z_n\}$ se comporte comme la marche aléatoire symétrique des exercices 2.10.4 et 2.10.6. Il est facile d'en déduire que l'état 1 est récurrent. Il en est de même pour la chaîne initiale $\{X_n\}$.

Si $\pi = (1, 1, 1, \dots)$, on vérifie aisément que $\pi P = \pi$, donc il existe une mesure invariante de masse infinie, et $\{X_n\}$ est récurrente nulle.

- **9** La chaîne $\{X_n\}$ étant irréductible, elle admet au plus une probabilité invariante.

On remarque que

$$\frac{q(1-p)}{p(1-q)}(1-q)p + qp + (1-p)(1-q) + q(1-p)\frac{p(1-q)}{q(1-p)} = 1,$$

donc

$$(\pi P)_k = \pi_k, \quad k \geq 1.$$

On vérifie que l'on a également $(\pi P)_0 = \pi_0$. Donc $\pi = \{(1-a)a^k, k \in \mathbb{N}\}$ est une probabilité invariante, et la chaîne est récurrente positive.

Partie B

- **1** La matrice de transition de la chaîne incluse s'écrit

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{\lambda}{\lambda+\mu} & 0 & \frac{\mu}{\lambda\mu} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} & 0 & \frac{\mu}{\lambda+\mu} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} & 0 & \frac{\mu}{\lambda+\mu} & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Ses diagonales supérieure et inférieure ont tous leurs coefficients non nuls, donc la chaîne incluse est irréductible, et il en est de même de $\{X_t\}$.

- **2** Notons qu'une façon de construire la chaîne incluse $\{Z_n = X_{T_n}\}$ est de se donner des v.a. i.i.d. $\{Y_n, n \geq 1\}$ à valeurs dans $\{-1, 1\}$ t.q. $\mathbb{P}(Y_1 = 1) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = 1 - \mathbb{P}(Y_1 = -1)$, et de poser, pour $n \geq 0$,

$$Z_{n+1} = \begin{cases} 1 & \text{si } X_n = 0 \\ Z_n + Y_n & \text{si } X_n > 0. \end{cases}$$

On peut alors établir le résultat demandé avec les mêmes arguments que dans la partie A pour $\{Z_n\}$, donc aussi pour $\{X_t\}$.

- **3** L'égalité $(\pi Q)_0 = 0$ entraîne que $a = \mu/\lambda$, et on vérifie aisément que ce choix de a donne bien $\pi Q = 0$.
- **4** D'après ce que l'on vient de voir, $\{X_t\}$ est récurrente positive si $\lambda > \mu$. Si $\lambda = \mu$, la mesure $\pi = (1, 1, 1, \dots)$ est invariante, c'est une mesure de masse infinie, donc $\{X_t\}$ est récurrente nulle.

11.7 Examen du 28 novembre 2001

Exercice

On considère une chaîne de Markov en temps discret $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ à valeurs dans l'espace fini $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, de matrice de transition P , dont les termes hors-diagonaux sont donnés par

$$P = \begin{pmatrix} \cdot & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & \cdot & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & \cdot \end{pmatrix}.$$

- **1** Déterminer les termes diagonaux de la matrice de transition P .
- **2** Montrer que E est constitué de deux classes d'équivalence que l'on précisera, l'une \mathcal{R} étant récurrente et l'autre \mathcal{T} transiente.
- **3** Montrer que la chaîne possède une unique probabilité invariante. La préciser.

Problème 1

Partie A

Étant donné un nombre $0 < p < 1$, on considère une chaîne de Markov en temps discret $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ à valeurs dans l'espace fini $E = \{1, 2, 3, 4\}$, de matrice de transition P donnée par

$$P = \begin{pmatrix} p & 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 1-p \\ p & 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 1-p \end{pmatrix}.$$

- **1** Montrer que la chaîne $\{X_n\}$ est récurrente irréductible.
- **2** Calculer son unique probabilité invariante π .
- **3** Montrer que la chaîne est apériodique. En déduire que P^n tend, quand $n \rightarrow \infty$, vers la matrice

$$\begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_4 \\ \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_4 \\ \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_4 \\ \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_4 \end{pmatrix}.$$

- **4** Calculer P^2 . Montrer que cette matrice coïncide avec la limite calculée ci-dessus. Préciser la loi de X_2 , ainsi que celle de X_n , $n \geq 2$.
- **5** On pose $T_4 = \inf\{n \geq 1, X_n = 4\}$. Calculer $\mathbb{E}_4(T_4)$.

Partie B

On pose $Q = P - I$, et on considère une chaîne de Markov en temps continu $\{X_t, t \geq 0\}$ de générateur infinitésimal Q .

- **1** Déterminer la matrice de transition P' de la chaîne incluse.
- **2** Décrire les trajectoires de la chaîne $\{X_t\}$, en précisant les paramètres des lois exponentielles des temps de séjour dans les divers états.
- **3** Montrer que la chaîne $\{X_t\}$ est irréductible, récurrente positive. Déterminer sa probabilité invariante.
- **4** Déterminer la probabilité invariante de la chaîne incluse.

Problème 2

On désigne par $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ une chaîne de Markov en temps discret à valeurs dans l'espace $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, dont la matrice de transition est donnée par :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ p & 0 & \frac{1-p}{2} & 0 & \frac{1-p}{2} \\ p & \frac{1-p}{2} & 0 & \frac{1-p}{2} & 0 \\ p & 0 & \frac{1-p}{2} & 0 & \frac{1-p}{2} \\ p & \frac{1-p}{2} & 0 & \frac{1-p}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

avec $0 < p < 1$. On pose $T := \inf\{n \geq 1, X_n = 0\}$.

- **1** Montrer que la chaîne $\{X_n\}$ est récurrente irréductible. On notera π sa probabilité invariante.
- **2** Montrer que sous \mathbb{P}_0 , la loi de T est une loi géométrique que l'on précisera. Montrer que $\mathbb{E}_0(T) = \frac{p+1}{p}$.
- **3** On note

$$N_n = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{X_k=0\}}, \quad M_n = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{X_k \neq 0\}}.$$

Calculer les limites quand $n \rightarrow \infty$ de $n^{-1}N_n$ et de $n^{-1}M_n$.

- **4** Donner un argument intuitif à l'appui de l'égalité

$$\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi_4.$$

En déduire la probabilité π .

- **5** Montrer que l'on a le résultat général suivant. S'il existe une bijection τ de E sur lui-même telle que

$$P_{\tau i, \tau j} = P_{ij}, \quad \forall i, j \in E,$$

alors la probabilité invariante π possède la propriété suivante : $\pi_{\tau i} = \pi_i$, $i \in E$. En déduire une justification de l'argument intuitif de la question précédente.

11.8 Corrigé de l'examen du 28 novembre 2001

Exercice

1 Les termes diagonaux de la matrice P s'obtiennent en remarquant que la somme de chaque ligne doit faire 1. On obtient donc $1/3, 0, 1/3, 1/3, 1/2$.

2 On remarque que 3 et 5 communiquent, et que l'on peut aller de 2 vers 3, mais que l'on peut pas quitter la classe $\mathcal{R} = \{3, 5\}$, qui est donc récurrente, tandis que $\mathcal{T} = \{1, 2, 4\}$ forme une classe transiente, puisque ces états communiquent, et on peut aller de 2 vers 3.

3 Une probabilité invariante ne peut charger que les classes récurrentes. Comme il y a une seule classe récurrente, il y a une seule probabilité invariante, qui s'obtient en résolvant l'équation $\pi P' = \pi$, où π est une probabilité sur \mathcal{R} , P' est la restriction de P à \mathcal{R} . On trouve $\pi_3 = 3/7$, $\pi_5 = 4/7$. Donc $\pi = (0, 0, 3/7, 0, 4/7)$.

Problème 1

Partie A

1 On peut aller de 1 vers 2, de 2 vers 4, de 4 vers 3 et de 3 vers 1, donc tous les états communiquent, la chaîne est irréductible, et récurrente positive puisque l'espace d'état est fini.

2 On résout le système d'équations $\pi = \pi P$, $\sum_i \pi_i = 1$, et on trouve $\pi = (p^2, p(1-p), p(1-p), (1-p)^2)$.

3 On montre aisément que $(P^n)_{11} \geq (P_{11})^n = p^n > 0, \forall n$. Donc (cf. 2.7.1 + 2.7.2) la chaîne est apériodique. Il résulte alors du théorème 2.7.4 du cours que $(P^n)_{ij} \rightarrow \pi_j$ quand $n \rightarrow \infty$, d'où le résultat.

4 Un calcul élémentaire donne bien $P^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} P^n$. On a donc aussi $P^n = P^2$, pour tout n . Mais on sait que la loi de X_n vaut μP^n , si μ est la loi

de X_0 . Or pour tout $n \geq 2$, $\mu P^n = \pi$ pour toute probabilité μ , puisque tous les termes de la i -ème colonne de P^n sont identiques, égaux à π_i . Donc pour tout $n \geq 2$, la loi de X_n est la probabilité invariante π . La loi limite est ici atteinte dès le rang $n = 2$.

5 D'après le théorème 2.6.3 du cours, $\mathbb{E}_i(T_i) = 1/\pi_i$, donc $\mathbb{E}_4(T_4) = (1-p)^{-2}$.

Partie B

1 On a

$$Q = \begin{pmatrix} p-1 & 1-p & 0 & 0 \\ 0 & -1 & p & 1-p \\ p & 1-p & -1 & 0 \\ 0 & 0 & p & -p \end{pmatrix}, \quad P' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 1-p \\ p & 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2 Partant de l'état 1, $\{X_t\}$ attend un temps exponentiel de paramètre $1-p$, puis passe dans l'état 2. Partant de l'état 2, $\{X_t\}$ attend un temps exponentiel de paramètre 1, puis passe dans l'état 3 avec probabilité p , dans l'état 4 avec probabilité $1-p$. Partant de l'état 3, $\{X_t\}$ attend un temps exponentiel de paramètre 1, puis passe dans l'état 1 avec probabilité p , dans l'état 2 avec probabilité $1-p$. Partant de l'état 4, $\{X_t\}$ attend un temps exponentiel de paramètre p , puis passe dans l'état 3.

3 La chaîne incluse est clairement irréductible, par le même argument qu'en **A 1**. Puisque l'espace d'état est fini, la chaîne est alors récurrente positive. L'équation pour la probabilité invariante est $\mu Q = 0$, soit encore $\mu P = \mu$, donc la probabilité invariante est celle de la partie **A**, soit π .

4 La probabilité invariante de la chaîne incluse est la probabilité solution de l'équation $\mu P' = \mu$, soit $(p/3, 1/3, 1/3, (1-p)/3)$.

Problème 2

1 Les états 1, 2, 3 et 4 communiquent avec l'état 0, donc la chaîne est irréductible, donc récurrente puisque l'espace d'état est fini.

2 Posons $E' = \{1, 2, 3, 4\}$. Pour $k \geq 2$, on a

$$\begin{aligned} \{T = k\} &= \{X_1 \in E', \dots, X_{k-1} \in E', X_k = 1\}, \\ \mathbb{P}_0(T = k) &= \mathbb{P}_0(X_1 \in E', \dots, X_{k-1} \in E', X_k = 1) \\ &= (1-p)^{k-2} p, \end{aligned}$$

car sachant que $X_j \in E'$, $X_{j+1} \in E'$ avec la probabilité $1-p$, et $X_{j+1} = 0$ avec la probabilité p , ceci indépendamment des valeurs de X_0, X_1, \dots, X_{j-1} .

Donc

$$\mathbb{E}_0(T) = \sum_{k=2}^{\infty} k(1-p)^{k-2}p = \frac{p+1}{p}.$$

3 En combinant les théorèmes 2.6.4 et 2.6.3 du cours, on obtient que $N_n \rightarrow p/(p+1)$ quand $n \rightarrow \infty$. Donc, puisque $M_n + N_n = 1$, $M_n \rightarrow 1/(p+1)$.

4 Les états 1, 2, 3, 4 jouent des rôles symétriques dans ce problème. D'après le théorème 2.6.3, $\pi_0 = p/(1+p)$. Alors $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = [4(1+p)]^{-1}$.

5 Posons $\pi' = \pi_{\tau}$. On a

$$\pi_i = \sum_j \pi_j P_{ji} = \sum_k \pi_{\tau k} P_{\tau k, i},$$

donc si $i = \tau \ell$,

$$\pi'_{\ell} = \sum_k \pi'_k P_{\tau k, \tau \ell} = \sum_k \pi'_k P_{k \ell}.$$

Donc π' est invariante, et par unicité de la probabilité invariante, $\pi' = \pi$.

Revenons à notre problème. Pour toute permutation τ des points 1, 2, 3, 4, $P_{\tau i, \tau j} = P_{ij}$. D'où l'égalité $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi_4$.

11.9 Examen du 4 décembre 2002

Exercice On considère une chaîne de Markov en temps discret $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ à valeurs dans l'espace fini $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, de matrice de transition P , dont les termes hors-diagonaux sont donnés par

$$P = \begin{pmatrix} \cdot & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & \cdot & 0 & 0 & 1/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & \cdot & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & \cdot \end{pmatrix}$$

- 1 Déterminer les termes diagonaux de la matrice de transition P .
- 2 Montrer que E est constitué de trois classes d'équivalence que l'on précisera, l'une \mathcal{T} étant transiente, les deux autres $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ récurrentes.

- 3** Déterminer une probabilité invariante admettant \mathcal{R}_1 comme support, et une probabilité invariante admettant \mathcal{R}_2 comme support. En déduire toutes les probabilités invariantes.

Problème

Partie A Soit $\{X_0, Y_0, Y_1, Y_2, \dots\}$ des v.a. indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, les $\{Y_n\}$ étant identiquement distribuées. On suppose que la loi commune des Y_n est telle que $\mathbb{P}(Y_1 = 1) > 0$ et $\mathbb{P}(Y_1 > k) > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On notera $F(k) = \mathbb{P}(Y_1 \leq k)$. On considèrera par moments le cas particulier où la loi des Y_n est la loi géométrique de paramètre $a \in]0, 1[$, i.e. $\mathbb{P}(Y_1 = k) = (1 - a)a^{k-1}$ et $F(k) = 1 - a^k$, $k \geq 1$.

On définit par récurrence la suite $\{X_n\}$ par la formule

$$X_{n+1} = \max(X_n, Y_n) - 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- 1** Montrer que $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une chaîne de Markov irréductible à valeurs dans \mathbb{N} . Préciser sa matrice de transition P en fonction de la loi de Y_1 . Montrer que dans le cas particulier de la loi géométrique, $P_{ij} = 0$ si $j < i - 1$, $= 1 - a^i$ si $j = i - 1$, $= (1 - a)a^j$ si $j \geq i$.
- 2** Etablir la formule

$$\mathbb{P}(X_{n+1} \leq k) = \mathbb{P}(X_n \leq k + 1)F(k + 1),$$

en déduire la valeur de $\mathbb{P}(X_n \leq k)$ en fonction de $\mathbb{P}(X_0 \leq k + n)$ et de la fonction F . Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \leq k) = \prod_{j=k+1}^{\infty} F(j)$.

- 3** On rappelle que $\prod_1^{\infty} F(j) = 0 \Leftrightarrow \sum_1^{\infty} [1 - F(j)] = \infty$. Montrer que $\mathbb{E}(Y_1) = 1 + \sum_1^{\infty} \mathbb{P}(Y_1 > j)$, et en déduire que $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}(Y_1) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \prod_{j=k}^{\infty} F(j) = 0.$$

- 4** Montrer que si $\mathbb{E}(Y_1) = \infty$, alors $\{X_n\}$ est transiente.
- 5** Montrer que si $\mathbb{E}(Y_1) < \infty$, il existe une probabilité $\{p_j, j \in \mathbb{N}\}$ sur \mathbb{N} indépendante de la loi de X_0 , telle que $\sum_{j=0}^k p_j := \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \leq k)$, que cette probabilité est invariante pour la chaîne, et qu'alors celle-ci est récurrente positive. Montrer que dans le cas de la loi géométrique $p_j = a^j \prod_{k=j+1}^{\infty} (1 - a^k)$.

Partie B On reprend la matrice de transition P de la partie **A**, dans le cas de la loi géométrique, et on considère le processus markovien de sauts $\{X_t, t \geq 0\}$ à valeurs dans \mathbb{N} , de générateur infinitésimal Q défini par

$$Q_{ij} = q_i [P_{ij} - \delta_{ij}],$$

avec $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, $= 0$ sinon, et les $q_i > 0$ seront précisés ci-dessous.

- 1 Montrer que le processus markovien de sauts $\{X_t, t \geq 0\}$ est irréductible à valeurs dans \mathbb{N} .
- 2 On choisit dans cette question $q_i = \prod_{k=i+1}^{\infty} (1 - a^k)$. Montrer que la probabilité π sur \mathbb{N} définie par $\pi_i = (1 - a)a^i$ est invariante. En déduire que $\{X_t, t \geq 0\}$ est récurrent positif.
- 3 On choisit dans cette question $q_i = a^i \prod_{k=i+1}^{\infty} (1 - a^k)$. Montrer que la mesure π sur \mathbb{N} définie par $\pi_i = 1$ est invariante. En déduire que $\{X_t, t \geq 0\}$ est récurrent nul.

Bibliographie

- [1] F. E. Benth : *Option theory with stochastic analysis*, Universitext, Springer, 2004.
- [2] N. Bouleau : *Probabilités de l'Ingénieur*, Hermann, 1986.
- [3] N. Bouleau : *Processus Stochastiques et Applications*, Hermann, 1988.
- [4] P. Bratley, B.L. Fox, E.L. Schrage : *A Guide to Simulation*, New York, Springer Verlag.
- [5] L. Breiman : *Probability*, Addison–Wesley, 1968. Réédition SIAM 1992.
- [6] P. Brémaud : *Point Processes and Queues*, Springer 1981.
- [7] R. Cerf : A new genetic algorithm, *The Annals of Applied Probability* **6**, 778–817, 1996.
- [8] E. Cinlar : *Introduction to Stochastic Processes*, Prentice Hall 1975.
- [9] W.G. Cochran : *Sampling Techniques*, John Wiley and Sons, 1977.
- [10] C . Coccozza–Thivent : *Processus stochastiques et fiabilité des systèmes* Mathématiques et Applications, **28**, Springer, 1997.
- [11] L. Devroye : *Non Uniform Random Variate Generation*, New York, Springer Verlag, 1986.
- [12] P. Ferrari, A. Galves : *Construction of stochastic Processes, Coupling and Regeneration*, à paraître, <http://www.ime.usp.br/pablo>
- [13] W.R. Gilks, S. Richardson, D.I. Spiegelhalter : *Markov Chains Monte Carlo in Practice*, Chapman & Hall, 1996.
- [14] D. Goldberg : *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*, Addison–Wesley, 1989.
- [15] J.M. Hammersley and D.C. Handscomb : *Monte Carlo Methods*, Chapman and Hall, 1964 .

- [16] J. H. Holland : *Adaptation in Natural and Artificial Systems*, MIT Press, 1992.
- [17] F. Jelinek : *Statistical methods for speech recognition*, The MIT Press, 1997.
- [18] M. H. Kalos, P. A. Whitlock : *Monte Carlo Methods, volume I : Basics*, John Wiley and Sons, 1986.
- [19] S. Karlin, H. Taylor : *A second Course in Stochastic Processes*, Acad. Press 1981.
- [20] D.E. Knuth : *The Art of Computer programming*, Vol. 2 Seminumerical Algorithms, Addison-Wesley.
- [21] D. Lambertson, B. Lapeyre : *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, Mathématiques et Applications **9**, Ellipses, 1991.
- [22] B. Lapeyre, É. Pardoux, R. Sentis : *Méthodes de Monte-Carlo pour les équations de la physique*, Mathématiques et Applications **29**, Springer 1998.
- [23] P. L'Ecuyer : Random Numbers for simulation, *Communications of the ACM*, **33**, 1990.
- [24] N. Metropolis, A. Rosenbluth, M. Rosenbluth, A. Teller, E. Teller : Equations of state calculations by fast computing machines, *J. Chem. Phys.* **21**, 1087–1092, 1953.
- [25] J.R. Norris : *Markov chains*, Cambridge University Press, 1997.
- [26] W.H. Press, S.A. Teukolsky, B.P. Flannery, W.T. Vetterling : *Numerical Recipes*, Cambridge University Press, 1992.
- [27] J.G. Propp, D.B. Wilson : Exact sampling with coupled Markov chains and applications to statistical mechanics, in *Proc. of the Seventh Int. Conf. on Random Structures and Algorithms*, Atlanta 1995, Vol **9**, 223–252, 1996.
- [28] B.D. Ripley : *Stochastic simulation*, Wiley 1987.
- [29] C. Robert : *Méthodes de Monte Carlo par chaînes de Markov*, Economica 1996.
- [30] P. Robert : *Réseaux et files d'attente : méthodes probabilistes*, Mathématiques et Applications **35**, Springer 2000.
- [31] S. Ross : *Stochastic processes*, 2nd edition, John Wiley, 1996.
- [32] S. Ross : *Simulation*, 2nd edition, Acad. Press, 1997.

- [33] R. Y. Rubinstein : *Simulation and the Monte Carlo Method*, John Wiley and Sons, 1981.
- [34] L. Saloff-Coste : Lectures on finite Markov chains, in *École de Probabilité de Saint-Flour XXVI*, Lecture Notes in Mathematics **1665** 301–413, Springer 1997.
- [35] R. Sedgewick : *Algorithms*, Addison-Wesley, 1987.