ORSAY
n° d'ordre

THESE

présentée

A L'UNIVERSITÉ PARIS SUD, CENTRE D'ORSAY

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

Etienne PARDOUX

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES STOCHASTIQUES NON LINÉAIRES MONOTONES. ÉTUDE DE SOLUTIONS FORTES DE TYPE ITO.

Soutenue le 18 Novembre 1975 devant la Commission d'examen composée de :

MM.	Michel	MÉTIVIER	Président
	Alain	BENSOUSSAN	Examinateurs
	Alain	CHENCINER	
	Pierre	PRIOURET	
	Roger	TEMAM	

Je tiens tout d'abord à remercier Monsieur LIONS : c'est à ses cours, à la lecture de ses livres et à la fréquentation des séminaires qu'il organise que je dois ma formation dans le domaine des équations aux dérivées partielles.

Monsieur BENSOUSSAN m'a guidé tout au long de mes recherches, et Monsieur TEMAM a suivi ce travail depuis ses débuts. Leur premier résultat dans le domaine des équations aux dérivées partielles stochastiques non linéaires a été le point de départ de ma thèse. Tous deux n'ont épargné ni leur aide ni leur indulgence tout au long de son élaboration. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma sincère reconnaissance.

J'adresse mes plus vifs remerciements à Monsieur METIVIER, qui s'est beaucoup interessé à mes travaux, et a accepté de présider le jury.

Je remercie Monsieur CHENCINER de m'avoir permis de m'initier, à l'occasion de la seconde thèse, à un très joli domaine des mathématiques, et Monsieur PRIOURET de me faire l'honneur de participer au jury.

Je tiens également à remercier Monsieur FLEMING, qui s'est intéressé à mes recherches et m'a beaucoup encouragé.

Ce travail a été fait alors que j'étais chercheur au CNRS, et pendant un séjour à l'IRIA. Je remercie ces deux organismes pour toutes les facilités qu'ils m'ont accordées. Je remercie tous mes collègues de l'IRIA, dont la patience et la compétence ont été mises à l'épreuve, en particulier M. VIOT et J.P. YVON.

Enfin mes remerciements s'adressent à tous ceux qui ont contribué à la réalisation matérielle de ce document en particulier Mme BUGLER et M. CHEKROUNI.

INTRODUCTION

Le but de ce travail est d'établir des théorèmes d'existence et d'unicité de processus solutions de certaines équations aux dérivées partielles stochastiques, qui sont l'analogue en dimension infinie, avec des opérateurs non bornés, des équations différentielles stochastiques de ITO.

Plus précisément, on étudie :

a) des équations paraboliques du type :

$$(1)\quad \begin{cases} du(t) + A(u(t))dt + B(u(t))dW(t) = f(t)dt + dM(t) \\ u(o) = u_o \end{cases}$$

où A(.) et B(.) sont des opérateurs non bornés dans des espaces de Hilbert, éventuellement non linéaires, mais vérifiant une hypothèse de monotonie ; W(t) est un processus de Wiener hilbertien et M(t) une martingale hilbertienne continue.

b) des équations du second ordre en t :

$$(2)\quad \begin{cases} du'(t) + Au(t)dt + B(u'(t))dt + C(u(t),u'(t))dW(t) = f(t)dt + dM(t) \\ u(o) = u_o \\ u'(o) = u_1 \end{cases}$$

où A, B(.), C(.) sont des opérateurs non bornés dans des espaces de Hilbert, A est linéaire, et B, C vérifient une hypothèse de monotonie.

L'équation (1) a déjà été étudiée : dans le cas B = 0, avec A linéaire par BENSOUSSAN [1] et CURTAIN [1], et avec certains types d'opérateurs A non linéaires par BENSOUSSAN - TEMAM [1] et [2], METIVIER - PISTONE [1] et MARCUS [1]; dans le cas $B \neq 0$, avec A et B linéaires par BALAKRISHNAN [1], avec A linéaire et B non linéaire par DAWSON [1]. L'équation (2) a été étudiée dans le cas où A et B sont linéaires par CABANA [1] et YAVIN [1]. Nos hypothèses de monotonie sont en particulier vérifiées dans les différentes situations envisagées par ces auteurs (à l'exception de l'équation étudiée par BENSOUSSAN - TEMAM [2]).

Notre travail consiste à adapter au cas stochastique une des deux principales méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles non linéaires (cf. J.L. LIONS [1]), la méthode de monotonie. L'utilisation dans le cas stochastique de l'autre méthode (dite de compacité) relève de méthodes très différentes des nôtres, qui consistent à étudier l'existence et l'unicité de solutions "en loi" , appelées aussi "solutions faibles". Cette approche, dans le cas des équations aux dérivées partielles, avec utilisation de la méthode de compacité, est dûe à VIOT [1] et [2]. Par contre, nous suivrons quant à nous la démarche classique utilisée dans ITO [1] pour les équations différentielles dans $\mathbb{R}^n$, qui consiste à construire un processus solution de l'équation étudiée, ou encore une "solution forte".

La mise en oeuvre de la méthode de monotonie utilise l'"égalité de l'énergie". La principale difficulté pour nous est d'établir l'égalité de l'énergie stochastique, ce qui revient à établir une règle de calcul différentiel stochastique adaptée à la classe de processus dans laquelle nous cherchons une solution à notre équation.

Or la méthode variationnelle que nous utilisons, en suivant LIONS [1], nous oblige à travailler avec un triplet d'espaces V H H' V', où chaque espace est dense dans le suivant. Et - par exmple dans le cas de l'équation (1) - une solution u(t) apparaît comme la somme d'une martingale à valeurs dans H et d'un processus à variations bornées à valeurs dans V'. Ce n'est donc pas une semi martingale à valeurs dans H. On montre cependant que les processus solution de l'équation (1) sont continus et optionnels (i.e. bien-mesurables) à valeurs dans H, et que si ϕ est une fonctionnelle sur H suffisamment régulière, la différentielle d $\phi(u(t))$ est donnée par la "formule de ITO".

On peut alors étudier l'existence et l'unicité d'une solution de l'équation (2). Le résultat fondamental est obtenu par approximation en dimension finie (méthode de Galerkin). On établit par ailleurs les équations que vérifient la moyenne et la covariance de la solution, dans le cas où les opérateurs A et B sont linéaires, et un résultat du type "principe du maximum".

L'étude de l'équation (3) est menée par des méthodes similaires.

Les premières applications de nos résultats concernent le filtrage non linéaire, et un modèle de biologie des populations proposé par W.H. FLEMING (cf. Exemples 5.1 et 5.4 du Chapitre 2, II° Partie).

Le texte est divisé en trois grandes parties :

La I° Partie est un résumé de résultats déjà connus de la théorie de l'intégrale stochastique hilbertienne, et du calcul différentiel stochastique dans un espace de Hilbert.

La II° Partie étudie les équations paraboliques, type équation (1).

La III° Partie étudie les équations du second ordre en t (équation (2)).

SOMMAIRE

Ière PARTIE

RAPPELS SUR LES INTEGRALES STOCHASTIQUES HILBERTIENNES

§0. INTRODUCTION.

Nous allons rappeler les notations, définitions et principaux résultats concernant les martingales à valeurs dans un espace de Banach et les intégrales stochastiques à valeurs hilbertiennes.

Les principaux résultats concernant les martingales à valeurs dans un Banach sont dûs notamment à SCALORA [1], NEVEU [1] et METIVIER [1].L'intégrale stochastique par rapport à une martingale hilbertienne a été étudiée par KUNITA [1], et surtout par METIVIER [2]. En ce qui concerne l'intégrale par rapport à un processus de Wiener, citons les travaux de CURTAIN [1], KUO [1], NEVEU [2], YOR [1], GAVEAU [1] et LEPINGLE-OUVRARD [1].

L'exposé qui suit est un résumé de PARDOUX [1], où l'on trouvera toutes les démonstrations.

§1. MARTINGALES A VALEUR DANS UN ESPACE DE BANACH.

§1.1. VARIABLES ALEATOIRES VECTORIELLES.

Soit $(\Omega,\mathcal{F},P)$ un espace de probabilité.

Soit X un espace de Banach, X' son dual. Nous noterons $\|\cdot\|$ la norme dans X, $\|\cdot\|_{\star}$ la norme dans X', et $(.,.)$ le produit de dualité X, X'.

Définition 1.1. On appelle variable aléatoire (v.a.) à valeurs dans X une application :

$$x : \Omega \to X$$

qui est $\mathcal{F}$ mesurable, i.e. qui est limite presque sûre d'une suite de fonctions étagées de la forme :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \, 1_{F_i}, \text{ où } x_i \in X,\ F_i \in \mathcal{F}$$

on a le résultat suivant, dû à PETTIS [1].

THEOREME 1.1. $x : \Omega \to X$ *est* $\mathcal{F}$*-mesurable si et seulement si :*

(i) $\forall x' \in X'$, $\omega \to (x(\omega),x')$ est $\mathcal{F}$*-mesurable*

(ii) $\exists N \in \mathcal{F}$, $P(N) = 0$, *tel que* $x(\Omega-N)$ *soit séparable.*

Donc, lorsque X est séparable - ce qui sera quasiment toujours le cas par la suite - toute application faiblement mesurable de Ω dans X est une variable aléatoire.

On peut définir la classe des v.a. P-intégrables, et l'espérance de telles v.a., en utilisant la théorie de l'intégrale de Bochner. Rappelons qu'une v.a. x est P-intégrable (au sens de Bochner) si et seulement si la v.a. réelle $\|x\|$ est intégrable (au sens usuel).

On notera $L^1(\Omega;X)$ l'espace des classes d'équivalence de v.a. à valeurs dans X, P-intégrables. C'est un espace de Banach pour la norme :

$$\int_\Omega \|x\| dP = E\|x\|$$

Etant donnés $x \in L^1(\Omega;X)$ et $\mathcal{G}$ une sous σ-algèbre de $\mathcal{F}$, on peut définir l'espérance conditionnelle de x par rapport à $\mathcal{G}$:

$$E^{\mathcal{G}}(x) \in L^1(\Omega,\mathcal{G},P;X)$$

on construit $E^{\mathcal{G}}(x)$ de la façon suivante (cf. SCALORA [1]) : si x est une v.a. étagée, on définit $E^{\mathcal{G}}(x)$ grâce à la définition de l'espérance conditionnelle d'une v.a. réelle; on obtient ensuite le cas général par passage à la limite. Cette espérance conditionnelle jouit de propriétés similaires à celle que l'on définit pour les v.a. réelles. On a en particulier l'inégalité suivante - du type inégalité de Jensen :

$$\|E^{\mathcal{G}}(x)\| \leqslant E^{\mathcal{G}}(\|x\|) \tag{1.1}$$

§1.2. MARTINGALES VECTORIELLES.

Soit T un intervalle quelconque de $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Définition 1.2. Un processus stochastique à valeurs dans X est une famille $(x_t)_{t\in T}$ de v.a. à valeurs dans X.

Un processus $(x_t)_{t\in T}$ sera dit mesurable si l'application :

$$(t,\omega) \to x_t(\omega)$$

est $\mathcal{F}\otimes\mathcal{C}$-mesurable (où $\mathcal{C}$ désigne la tribu des boréliens de T). ▫

On ne distinguera pas deux processus "indistinguables", i.e. qui vérifient :

$$P\left(\sup_{t\in T} \|x_t - x'_t\| = 0\right) = 1$$

Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\in\overline{R}_+}$ une famille croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$, telle que $\mathcal{F}_0$ contienne tous les P-négligeables de $\mathcal{F}$. Cette famille sera supposée donnée dans toute la suite.

<u>Définition 1.3</u>. Un processus stochastique $(x_t)_{t\in T}$ à valeurs dans X est appelé une martingale si :

(i) $(x_t)_{t\in T}$ est adapté à la famille $\mathcal{F}_t$ (i.e. $\forall t \in T$, x_t est $\mathcal{F}_t$ mesurable)

(ii) $x_t \in L^1(\Omega,X)$, $\forall t \in T$

(iii) $E^{\mathcal{F}_s}(x_t) = x_s$, $\forall s,t \in T$ avec $s < t$ ∎

Il résulte de l'inégalité (1.1) que si $(x_t)_{t\in T}$ est une martingale à valeurs dans X, alors $\|x_t\|$ est une sous-martingale réelle positive (à laquelle on peut donc appliquer les inégalités de Doob).

<u>Définition 1.4</u>. On appelle temps d'arrêt (relatif à la famille $\mathcal{F}_t$) une variable aléatoire à valeurs dans $\overline{R}_+$, T, qui vérifie :

$$\{T \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t, \quad \forall t \in R_+$$

On désignera alors par $\mathcal{F}_T$ la tribu des évènements "antérieurs à T", i.e. l'ensemble des $A \in \mathcal{F}_\infty$ tels que $A \cap \{T \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$, $\forall t \in R_+$. ∎

Le Théorème d'arrêt se généralise aisément au cas des martingales vectorielles.

<u>THEOREME 1.2</u>. *Soit* $(x_t)_{t\in T}$ *une martingale à valeurs dans* X, *p.s. continue à droite, et soient* S *et* T *deux temps d'arrêt qui vérifient :*

(a) $S(\omega) \in T$ *et* $T(\omega) \in T$ *p.s.*

(b) $S \leqslant T$ *p.s.*

Supposons que l'une des deux conditions suivantes est réalisée :

(i) $\exists t_0 \in T$ *t.q.* $T \leqslant t_0$ *p.s.*

(ii) *la famille* $\{x_t,\ t \in T\}$ *est équi intégrable.*

Alors x_T *est intégrable, et :*

$$E^{\mathcal{F}_S}(x_T) = x_S$$ ∎

§1.3. <u>MARTINGALES DE CARRE INTEGRABLE ET MARTINGALES LOCALES</u>.

On supposera <u>dans toute la suite</u> que X est un espace de <u>Hilbert séparable</u>, dont le produit scalaire sera noté $((\cdot,\cdot))$.

Posons la :

Définition 1.5. On notera $\mathcal{M}_\infty^2(X)$ l'espace des martingales $(M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ p.s. continues à valeurs dans X, qui vérifient :

(i) $M_0 = 0$

(ii) $\sup_t E(\|M_t\|^2) < +\infty$ ∎

On peut montrer (cf. METIVIER [1]) que la condition (ii) ci-dessus implique l'existence d'une v.a. $M_\infty \in L^2(\Omega;X)$ telle que :

(1.2) $$M_t \longrightarrow M_\infty \text{ dans } L^2(\Omega;X) \text{ quand } t \longrightarrow \infty$$

et de plus $(M_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+}$ est une martingale.

On montre alors aisément que, muni du produit scalaire :

$$E((M_\infty,N_\infty))$$

$\mathcal{M}_\infty^2(X)$ est un espace de Hilbert.

Définition 1.6. On notera $\mathcal{M}^2(X)$ l'espace des martingales $(M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ p.s. continues à valeurs dans X, qui vérifient :

(i) $M_0 = 0$

(ii) $E\|M_t\|^2 < +\infty$, $\forall t\in \mathbb{R}_+$ ∎

$\mathcal{M}^2(X)$ peut être muni d'une structure d'espace de Fréchet, définie par la famille de semi-normes :

$$(E\|M_n\|^2)^{\frac{1}{2}}, \ n\in\mathbb{N}$$

Définition 1.7. On notera $\mathcal{M}_{loc}^2(X)$ l'espace des processus à valeurs dans X, $(M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ qui sont tels qu'il existe une suite de temps d'arrêt $T_n \nearrow \infty$ p.s. tels que $\forall n$,

$$M_\cdot^{T_n} = M_{\cdot\wedge T_n} \in \mathcal{M}^2(X)$$

On dira que la suite de temps d'arrêt T_n réduit la martingale locale M_t ∎

Si $T\in\mathbb{R}_+$, on définit de même $\mathcal{M}^2(0,T;X)$ et $\mathcal{M}_{loc}^2(0,T;X)$, en remplaçant $\mathbb{R}_+$ par $[0,T]$ dans les définitions 1.6 et 1.7.

Les intégrales stochastiques que nous allons définir ci-dessous seront des martingales locales. Enonçons quelques propriétés importantes de ces processus, qui généralisent au cas vectoriel des résultats établis dans NEVEU [2].

LEMME 1.1. *Si* $M \in \mathcal{M}^2_{loc}(X)$, *et si* T *est un temps d'arrêt tel que :*

$$E\{\sup_{t \leq T, t < \infty} \|M_t\|\} < +\infty,$$

alors $M_{t \wedge T} \to M_T$ *dans* $L^1(\Omega;X)$ *quand* $t \to \infty$ *et* $(M_{t\wedge T})_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+}$ *est une martingale.* ∎

Si $M \in \mathcal{M}^2(X)$, $\|M_t\|^2$ est une sous-martingale réelle continue, à laquelle est associée par la décomposition de Doob-Meyer un processus croissant continu unique D_t tel que :

$$\|M_t\|^2 - D_t \text{ soit une martingale}$$

De même, si $M \in \mathcal{M}^2_{loc}(X)$, il existe un processus réel croissant continu unique D_t tel que :

$$\|M_t\|^2 - D_t \text{ soit une martingale locale.}$$

On montre alors le :

LEMME 1.2. *Si* $M \in \mathcal{M}^2_{loc}(X)$, *et* T *est un temps d'arrêt tel que* $E(D_T) < \infty$, *alors*

$$M_{\cdot \wedge T} \in \mathcal{M}^2_\infty(X)$$ ∎

Les lemmes 1.1 et 1.2 permettent de démontrer le :

THEOREME 1.3. *Si* $M \in \mathcal{M}^2_{loc}(X)$ *et si* T *est un temps d'arrêt tel que* $E(\sqrt{D_T}) < +\infty$, *alors :*

1.3) $$E(\sup_{t \leq T} \|M_t\|) \leq 3\, E(\sqrt{D_T})$$

et $(M_{t\wedge T})_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+}$ *est une martingale.* ∎

La démonstration du Théorème 1.3 est basée sur la démonstration et l'utilisation de l'inégalité :

(1.4) $$P(\sup_{t\leq T} \|M_t\|^2 > C^2) \leq P(D_T > C^2) + \frac{1}{C^2} E\left(\min(C^2, D_T)\right)$$

Cette inégalité est vraie sous la seule hypothèse $M \in \mathcal{M}^2_{loc}(X)$.

On déduit des inégalités (1.3) et (1.4) les corollaires :

COROLLAIRE 1. Soit $M^n \in \mathcal{M}^2_{loc}(X)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, D^n_t les processus croissants réels associés, et T un temps d'arrêt tel que :

$$E(\sqrt{D^n_T}) \to 0$$

Alors $\sup_{t\leq T} \|M^n_t\| \to 0$ dans $L^1(\Omega)$. ∎

<u>COROLLAIRE 2</u>. Soit $M^n \in \mathcal{M}^2_{loc}(X)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, D^n_t les processus croissants réels associés, et T un temps d'arrêt tel que :

$$D^n_T \longrightarrow 0 \quad \text{en probabilité}$$

Alors

$$\sup_{t \leq T} \|M^n_t\| \longrightarrow 0 \quad \text{en probabilité}$$ ∎

§2. PROCESSUS CROISSANT ASSOCIE A UNE MARTINGALE HILBERTIENNE.

Si $M \in \mathcal{M}^2(\mathbb{R})$, il existe un et un seul processus croissant continu $< M >_t$ tel que $M^2_t - < M >_t$ soit une martingale (cf. MEYER [1]).

Si $M, N \in \mathcal{M}^2(\mathbb{R})$,

$$< M,N >_t = \frac{1}{2} [< M+N >_t - < M >_t - < N >_t]$$

définit l'unique processus continu à variations bornées tel que $M_t N_t - < M,N >_t$ soit une martingale.

Dans le cas de martingales hilbertiennes, nous allons définir les analogues de $< M >_t$ et $< M,N >_t$ comme processus à valeurs dans des espaces d'opérateurs nucléaires.

§2.1. <u>OPERATEURS NUCLEAIRES ET DE HILBERT SCHMIDT</u>.

Soient X et Y deux espaces de Hilbert séparables, dont les normes et produit scalaire seront notés $\|\cdot\|$ et $((\cdot,\cdot))$. On notera $(\cdot,\cdot)$ le produit de dualité X,X' ou Y,Y'. On évitera d'identifier chaque espace de Hilbert à son dual.

On désignera par $\mathcal{L}(X,Y)$ l'espace vectoriel des opérateurs linéaires continus de X dans Y, muni de la norme des opérateurs $\|\cdot\|$

Etant donné $x' \in X'$ et $y \in Y$, on notera $y \otimes x'$ l'élément de $\mathcal{L}(X;Y)$ défini par : $y \otimes x'(x) = (x',x)y$, $\forall x \in X$.

<u>Définition 2.1</u>. $A \in \mathcal{L}(X;Y)$ est nucléaire s'il existe une suite $\{\lambda_n\}$ de réels, une suite $\{e'_n\}$ d'éléments de la boule unité de X' et une suite $\{f_n\}$ d'élément de la boule unité de Y tels que :

(i) $A = \sum_n \lambda_n \; f_n \otimes e'_n$

(ii) $\sum_n |\lambda_n| < +\infty$ ∎

L'ensemble des opérateurs nucléaires de X dans Y forme un espace vectoriel noté $\mathcal{L}^1(X;Y)$, qui est un espace de Banach pour la norme-trace :

$$\|A\|_1 = \inf \sum_n |\lambda_n|, \text{ où}$$

l'infimum est pris sur toutes les décompositions de A du type énoncé dans la Définition 2.1.

De plus, $\mathcal{L}^1(X;Y) \subset \mathcal{L}^\infty(X;Y)$, espace des opérateurs compacts, muni de la norme des opérateurs $\|\cdot\|$, et $\mathcal{L}^1(X;Y)$ est séparable.

Si $A \in \mathcal{L}^1(X';X)$, alors :

$$\sum_{i=1}^{\infty} (Ae'_i, e'_i) < +\infty, \quad \forall \{e'_i\}$$

base orthonormée de X'. De plus la somme de la série ne dépend pas de la base orthonormée choisie. On posera :

$$\text{(2.1)} \qquad \operatorname{Tr} A = \sum_{i=1}^{\infty} (Ae'_i, e'_i)$$

<u>Exemple 2.1.</u> Si $x \in X$, $y \in Y$, $x \otimes y \in \mathcal{L}^1(Y',X)$, et $\|x \otimes y\| = \|x\| \, \|y\|$.
Si x_1, $x_2 \in X$, $x_1 \otimes x_2 \in \mathcal{L}^1(X',X)$ et : $\operatorname{Tr}[x_1 \otimes x_2] = ((x_1,x_2))$, on remarque que :

$$\operatorname{Tr}[x \otimes x] = \|x \otimes x\|_1$$ ∎

$\operatorname{Tr}(\cdot)$ est une forme linéaire continue qui vérifie :

$$\text{(2.2)} \qquad |\operatorname{Tr} A| \leqslant \|A\|_1$$

On a de plus :

<u>THEOREME 2.1.</u> *Si $A \in \mathcal{L}^1(X';X)$, et si A est autoadjoint et semi défini positif, alors :*

$$\operatorname{Tr} A = \|A\|_1$$ ∎

<u>COROLLAIRE.</u> Si $t \to A(t)$ est une application de $[0,T]$ à valeurs dans $\mathcal{L}^1(X',X)$, telle que :

(i) $A(t) = A^*(t)$, $\forall t \in [0,T]$

(ii) $A(t) - A(s) \geqslant 0$, $\forall s < t$

Alors $t \to A(t)$ est à variations bornées à valeurs dans $\mathcal{L}^1(X';X)$. ∎

Soit $\mathcal{J}$ l'isomorphisme canonique de X' sur X (ou de Y' sur Y) défini par :

$$((\mathcal{J}x',y)) = (x',y) \quad \forall x' \in X', \; y \in X$$

Définition 2.2. $A \in \mathcal{L}(X;Y)$ sera dit Hilbert-Schmidt si $A\mathcal{J}A^* \in \mathcal{L}^1(Y',Y)$, et alors sa norme Hilbert-Schmidt est définie par :

$$\| A \|_2 = (\mathrm{Tr}\, [A\mathcal{J}A^*])^{\frac{1}{2}}$$ ▫

On notera $\mathcal{L}^2(X;Y)$ l'espace de Hilbert des opérateurs de Hilbert-Schmidt de X dans Y, muni du produit scalaire :

$$((A,B))_2 = \mathrm{Tr}[A\mathcal{J}B^*]$$

THEOREME 2.2. *Soient* X,Y,Z *et* W *quatre espaces de Hilbert.*

Si $A \in \mathcal{L}^2(X;Y)$ *et* $B \in \mathcal{L}^2(Y;Z)$, *alors* $BA \in \mathcal{L}^1(X;Z)$.

Si $A \in \mathcal{L}^1(X;Y)$, $B \in \mathcal{L}^2(X;Y)$, $C \in \mathcal{L}(W;X)$ *et* $D \in \mathcal{L}(Y;Z)$, *alors :*

$$DAC \in \mathcal{L}^1(W;Z) \text{ et } \| DAC \|_1 \leq \| D \| \cdot \| A \|_1 \cdot \| C \|$$

$$DBC \in \mathcal{L}^2(W,Z) \text{ et } \| DBC \|_2 \leq \| D \| \cdot \| B \|_2 \cdot \| C \|$$ ▫

On a le résultat suivant (cf. GOHBERG-KREIN [1]) :

THEOREME 2.3. *Soit* $A \in \mathcal{L}^1(X;Y)$ [*resp.* $\mathcal{L}^2(X;Y)$].

Si P_n *est une suite d'opérateurs de* $\mathcal{L}(X)$ *qui converge fortement vers l'identité* [*i.e.* $P_n x \to x$ *dans* X, $\forall x \in X$], *alors* $AP_n \to A$ *dans* $\mathcal{L}^1(X;Y)$ [*resp. dans* $\mathcal{L}^2(X;Y)$] ▫

On montre aisément, en vérifiant les inégalités correspondantes entre les normes, que :

$$\mathcal{L}^1(X;Y) \subset \mathcal{L}^2(X;Y) \subset \mathcal{L}^\infty(X;Y)$$

$$\mathcal{L}^1(X;Y) \text{ et } \mathcal{L}^\infty(X;Y)$$

sont des espaces de Banach non réflexifs. Le Théorème suivant, dû à DIXMIER et SCHATTEN (cf. SCHWARTZ [1]), établit les relations de dualité entre ces espaces:

THEOREME 2.4. *Le dual de* $\mathcal{L}^\infty(X;Y)$ *s'identifie à* $\mathcal{L}^1(X';Y')$. *Le dual de* $\mathcal{L}^1(X';Y')$ *s'identifie à* $\mathcal{L}(X;Y)$.

Si $C \in \mathcal{L}^\infty(X;Y)$ [*ou* $\mathcal{L}(X;Y)$], *et* $A \in \mathcal{L}^1(X';Y')$, *le produit de dualité s'écrit :*

$$< C,A > = \mathrm{Tr}\, \mathcal{J}^{-1}A^*C$$ ▫

§2.2. PROCESSUS CROISSANT ASSOCIE A UNE MARTINGALE HILBERTIENNE.

On a le :

THEOREME 2.5. *Etant donné* $M \in \mathcal{M}^2(X)$, $\exists$ *un et un seul processus à valeurs dans* $\mathcal{L}^1(X';X)$, *continu et à variations bornées sur tout intervalle compact de* $\mathbb{R}_+$,

$$\langle\langle M \rangle\rangle_t$$

tel que

(i) $\forall x'_1, x'_2 \in X'$, $(\langle\langle M \rangle\rangle_t\, x'_1, x'_2) = \langle (M,x'_1),(M,x'_2) \rangle_t$

(ii) $M_t \otimes M_t - \langle\langle M \rangle\rangle_t$ *est une martingale à valeurs dans* $\mathcal{L}^1(X';X)$

(iii) $\|M_t\|^2 - \mathrm{Tr}\, \langle\langle M \rangle\rangle_t$ *est une martingale réelle.* ∎

On construit le processus $\langle\langle M \rangle\rangle_t$ en utilisant la relation (i).

Remarquons que $t \to \langle\langle M \rangle\rangle_t$ est une application p.s. croissante pour la relation d'ordre définie par les opérateurs semi définis positifs, et que $\mathrm{Tr}\, \langle\langle M \rangle\rangle_t$ est le processus D_t introduit au §1.3.

THEOREME 2.6. *Etant donné* $M \in \mathcal{M}^2(X)$ *et* $N \in \mathcal{M}^2(Y)$, $\exists$*un et un seul processus à valeurs dans* $\mathcal{L}^1(Y';X)$, *continu et à variations bornées sur tout intervalle compact de* $\mathbb{R}_+$,

$$\langle\langle M,N \rangle\rangle_t$$

tel que

(i) $\forall x' \in X'$, $y' \in Y'$, $(\langle\langle M,N \rangle\rangle_t\, y', x') = \langle (M,x'), (N,y') \rangle_t$

(ii) $M_t \otimes N_t - \langle\langle M,N \rangle\rangle_t$ *est une martingale à valeurs dans* $\mathcal{L}^1(Y';X)$

(iii) *Si de plus* $Y = X$,
$((M_t, N_t)) - \mathrm{Tr}\, \langle\langle M,N \rangle\rangle_t$ *est une martingale réelle.* ∎

L'application $M,N \to \langle\langle M,N \rangle\rangle_t$ est bilinéaire, et sa continuité s'exprime par des inégalités du type Cauchy-Schwartz :

COROLLAIRE 1.

(2.3) $$\| \langle\langle M,N \rangle\rangle_t \|_1 \leq (\| \langle\langle M \rangle\rangle_t \|_1)^{\frac{1}{2}} (\| \langle\langle N \rangle\rangle_t \|_1)^{\frac{1}{2}}$$

(2.4) $$E \| \langle\langle M,N \rangle\rangle_t \|_1 \leq (E|M_t|^2)^{\frac{1}{2}} (E|N_t|^2)^{\frac{1}{2}}$$ ∎

COROLLAIRE 2. $\forall s,t \in \mathbb{R}_+$,

$$(2.5)\quad \| \ll M,N \gg_t - \ll M,N \gg_s \|_1 \leqslant (\| \ll M \gg_t - \ll M \gg_s \|_1 \cdot \| \ll N \gg_t - \ll N \gg_s \|_1)^{\frac{1}{2}}$$

∎

COROLLAIRE 3. Si M et $N \in \mathcal{M}^2(X)$,

$$(2.6)\qquad \pm\, 2 \ll M,N \gg_t \leqslant \ll M \gg_t + \ll N \gg_t$$

$$(2.7)\qquad \pm\, 2\, \mathrm{Tr} \ll M,N \gg_t \leqslant \mathrm{Tr} \ll M \gg_t + \mathrm{Tr} \ll N \gg_t$$

∎

Dans (2.6), " $\geqslant$ " est à prendre au sens de la relation d'ordre définie dans $\mathcal{L}^1(X';X)$ par les opérateurs semi-définis positifs.

Nous avons défini $\ll M,N \gg_t$ avec $M \in \mathcal{M}^2(X)$ et $N \in \mathcal{M}^2(Y)$. Il nous reste à étudier les cas où les espaces $\mathcal{M}^2$ sont remplacés par $\mathcal{M}^2_\infty$, ou $\mathcal{M}^2_{loc}$.

THEOREME 2.7. *Si* $M \in \mathcal{M}^2_\infty(X)$ *et* $N \in \mathcal{M}^2_\infty(Y)$, *alors*

$$\ll M,N \gg_t \longrightarrow \ll M,N \gg_\infty \text{ quand } t \longrightarrow \infty,$$

dans $L^1(\Omega;\mathcal{L}^1(Y';X))$ *et p.s. dans* $\mathcal{L}^1(Y';X)$. ∎

LEMME 2.1. *Si* $M \in \mathcal{M}^2(X)$, $N \in \mathcal{M}^2(Y)$, T *est un temps d'arrêt, notons* $M^T_t = M_{t \wedge T}$ *et* $N^T_t = N_{t \wedge T}$. *Alors :*

$$\ll M^T, N^T \gg_t = \ll M,N \gg_{t \wedge T}$$

∎

Le Lemme 2.1 découle du Théorème 1.2. Il permet de démontrer :

THEOREME 2.8. *Si* $M \in \mathcal{M}^2_{loc}(X)$ *et* $N \in \mathcal{M}^2_{loc}(Y)$, $\exists$ *un processus et un seul à valeurs dans* $\mathcal{L}^1(Y';X)$, *continu et à variations bornées sur tout compact de* $\mathbb{R}_+$,

$$\ll M,N \gg_t$$

tel que $M_t \otimes N_t - \ll M,N \gg_t$ *soit une martingale locale.* ∎

§3. INTEGRALE STOCHASTIQUE PAR RAPPORT A UN PROCESSUS HILBERTIEN.

§3.1. PREMIER TYPE D'INTEGRALE STOCHASTIQUE.

Nous résumons ici une partie des résultats de METIVIER [2], dont on trouvera également l'exposé dans PARDOUX [1].

Définition 3.1. On appellera tribu des ensembles bien mesurables, et on notera $\mathcal{B}$, la tribu des parties de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ engendrée par les ensembles de la forme : $\{(s,\omega) \mid \omega \in A,\ s \geq T(\omega)\}$, où T est un temps d'arrêt, et $A \in \mathcal{F}_T$.

Un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ à valeurs dans un espace de Banach E sera dit bien mesurable si l'application $(t,\omega) \to X_t(\omega)$ est $\mathcal{B}$-mesurable. ∎

On a le théorème (cf. MEYER [1]) :

THEOREME 3.1. *Soit* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *un processus à valeurs dans un espace de Banach* E, *qui vérifie :*

(i) $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\omega \to X_t(\omega)$ *est* $\mathcal{F}_t$ *mesurable.*

(ii) *p.s.,* $t \to X_t(\omega)$ *est continue à droite et pourvue de limites à gauche.*

Alors le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est bien-mesurable.* ∎

Soient X,Y et H trois espaces de Hilbert séparables.

THEOREME 3.2. *Si* $M \in \mathcal{M}^2_{loc}(X)$ *et si* $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est un processus bien mesurable à valeurs dans* $\mathcal{L}(X;H)$, *tels que p.s. :*

$$\int_0^t \|\phi_s\|^2 \, d\{\mathrm{Tr} \ll M \gg_s\} < +\infty, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

alors $\exists$ *un et un seul élément de* $\mathcal{M}^2_{loc}(H)$,

$$(\phi \cdot M)_t = \int_0^t \phi_s \, d\, M_s$$

tel que $\forall N \in \mathcal{M}^2_{loc}(Y)$ [*où* Y *est n'importe quel espace de Hilbert séparable*],

$$\ll \phi\cdot M, N \gg_t = \int_0^t \phi_s d \ll M,N \gg_s$$

En particulier :

$$\ll \phi\cdot M \gg_t = \int_0^t \phi_s \, d \ll M \gg_s \phi_s^* \tag{3.1}$$ ∎

Il résulte de la relation (3.1) que :

$$\| \ll \phi\cdot M \gg_t \|_1 \leq \int_0^t \|\phi_s\|^2 \quad d\{\mathrm{Tr} \ll M \gg_s\} \tag{3.2}$$

Les corollaires suivants se déduisent de l'inégalité (3.2), du Lemme 1.2 et du Théorème 1.3 :

COROLLAIRE 1. Si, outre les hypothèses du théorème 3.2, est vérifiée :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \ E\{(\int_0^t \|\phi_s\|^2 \, d\{\mathrm{Tr} \ll M \gg_s\})^{\frac{1}{2}}\} < +\infty$$

alors $\phi \cdot M$ est une martingale à valeurs dans H. ∎

COROLLAIRE 2. Si l'on suppose en outre :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \ E\int_0^t \|\phi_s\|^2 \, d\{\mathrm{Tr} \ll M \gg_s\} < +\infty,$$

alors

$$\phi \cdot M \in \mathcal{M}^2(H)$$ ∎

COROLLAIRE 3 : Si l'on suppose en outre que :

$$E\int_0^\infty \|\phi_t\|^2 \, d\{\mathrm{Tr} \ll M \gg_t\} < +\infty,$$

alors

$$\phi \cdot M \in \mathcal{M}^2_\infty(H).$$ ∎

Un cas particulier important est celui où, H étant identifié à son dual, $M \in \mathcal{M}^2_{loc}(H)$ et ϕ_t est un processus adapté à trajectoires continues à valeurs dans H.

Alors les hypothèses du Théorème 3.2 sont vérifiées, car en particulier :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \ \int_0^t \|\phi_s\|^2 \, d\{\mathrm{Tr} \ll M \gg_s\} \leq \left(\sup_{0 \leq s \leq t} \|\phi_s\|^2\right) \cdot \mathrm{Tr} \ll M \gg_t \tag{3.3}$$

d'où l'on peut définir $\phi \cdot M \in \mathcal{M}^2_{loc}(\mathbb{R})$.

Soit T un temps d'arrêt, on pose :

$$\phi_t^T = \phi_t \, 1_{\{t \leq T\}}$$

$$M_t^T = M_{t \wedge T}$$

On a alors le :

LEMME 3.1. *Sous les hypothèses du Théorème* 3.2,

$$(\phi^T \cdot M)_t = (\phi \cdot M^T)_t = (\phi^T \cdot M^T)_t$$
$$= (\phi \cdot M)_{t \wedge T}$$ ∎

Soit $T \in \mathbb{R}_+$. Si $M \in \mathcal{M}^2_{loc}(0,T;H)$, et si $(\phi_t)_{t \in [0,T]}$ est un processus bien mesurable à valeurs dans H à trajectoires dans $C(0,T;H)$, on peut définir $\left[(\phi \cdot M)_t\right]_{t \in [0,T]}$ comme élément de $\mathcal{M}^2_{loc}(0,T.\mathbb{R})$.

Remarquons que $\mathcal{M}^2(0,T;H)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $E((M_T,N_T))$.

Nous aurons besoin du résultat suivant :

THEOREME 3.3. *Si* $M \in \mathcal{M}^2(0,T;H)$ *et* $\phi \in L^2(\Omega;C(0,T;H))$, ϕ *étant un processus bien mesurable, alors* $\left[(\phi\cdot M)_t\right]_{t\in[0,T]}$ *est une martingale.*

Si $M^n \to M$ *dans* $\mathcal{M}^2(0,T;H)$, $\phi^n \to \phi$ *dans* $L^2(\Omega;C(0,T;H))$, *alors*

$$\sup_{t\leq T} \|(\phi\cdot M)_t - (\phi^n\cdot M^n)_t\| \to 0 \text{ dans } L^1(\Omega)$$

Démonstration : D'après le Théorème 1.3,

$$E\left(\sup_{t\leq T} \|(\phi\cdot M)_t\|\right) \leq 3E\sqrt{\int_0^T \|\phi_t\|^2 \, d\{Tr \ll M \gg_t\}}$$

$$\leq 3E\left(\sup_{t\leq T}\|\phi_t\|\cdot\sqrt{Tr \ll M \gg_T}\right)$$

$$\leq \frac{3}{2}E\left(\sup_{t\leq T}\|\phi_t\|^2\right) + \frac{3}{2}E\|M_T\|^2$$

Donc :

$$E\left(\sup_{t\leq T}\|(\phi\cdot M)_t\|\right) < +\infty$$

D'où, d'après le Lemme 1.1, $\left[(\phi\cdot M)_t\right]_{t\in[0,T]}$ est une martingale.

Montrons la seconde partie du Théorème.

$$(\phi\cdot M)_t - (\phi^n\cdot M^n)_t = ([\phi-\phi^n]\cdot M)_t + (\phi^n\cdot[M-M^n])_t$$

$$\| \ll (\phi\cdot M)-(\phi^n\cdot M^n) \gg_t \|_1 \leq 2\| \ll ([\phi-\phi^n]\cdot M) \gg_t \|_1 + $$
$$+ 2\| \ll (\phi^n\cdot[M-M^n]) \gg_t \|_1$$

Donc, en appliquant le Théorème 3.1 :

$$E\left(\sup_{0\leq t\leq T}\|(\phi\cdot M)_t-(\phi^n\cdot M^n)_t\|\right) \leq 6E\sqrt{\int_0^T \|\phi_t-\phi_t^n\|^2 \, d\{Tr \ll M \gg_t\}} +$$

$$+ 6E\sqrt{\int_0^T \|\phi_t^n\|^2 \, d\{Tr \ll M-M^n \gg_t\}}$$

$$\leq 6\left(E\left(\sup_{t\leq T}\|\phi_t-\phi_t^n\|^2\right) E|M_t|^2\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ 6\left(E\left(\sup_{t\leq T}\|\phi_t^n\|^2\right) E|M_t-M_t^n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

■

THEOREME 3.4. *Si* $M \in \mathcal{M}^2_{loc}(0,T;H)$ *et* $\phi(t)$ *est un processus bien mesurable à valeurs dans* H, *tel que* $\phi \in C(0,T;H)$ p.s., *alors* : $[(\phi\cdot M)_t]_{t\in[0,T]}$ *est une martingale locale.*

Si $M^n \in \mathcal{M}^2_{loc}(0,T;H)$, $M^n(T) \to M(T)$ *dans* H *en probabilité.*

Si $\phi^n \in C(0,T;H)$ p.s., *où* ϕ^n *est une suite de processus bien mesurables, avec* $\sup_{t\in[0,T]} \|\phi(t)-\phi^n(t)\| \to 0$ *en probabilité.*

Alors :

$$\sup_{t\in[0,T]} \|(\phi\cdot M)_t-(\phi^n\cdot M^n)_t\| \to 0 \text{ en probabilité.}$$

Démonstration :

$$\| \ll (\phi\cdot M)-(\phi^n\cdot M^n) \gg_T \|_1 \leq 2\| \ll ([\phi-\phi^n]\cdot M) \gg_T \|_1 + 2\| \ll (\phi^n\cdot[M-M^n]) \gg_T \|_1$$

$$\leq 2\left(\sup_{t\leq T} \|\phi(t)-\phi^n(t)\|^2\right) \operatorname{Tr} \ll M \gg_T +$$

$$+ 2\left(\sup_{t\in[0,T]} \|\phi^n(t)\|^2\right) \operatorname{Tr} \ll M-M^n \gg_T$$

Donc :

$$\| \ll (\phi\cdot M)-(\phi^n\cdot M^n) \gg_T \|_1 \to 0 \text{ en probabilité.}$$

Et le Théorème résulte du Corollaire 2 du Théorème 1.3. ∎

§3.2. SECOND TYPE D'INTEGRALE STOCHASTIQUE.

Nous allons maintenant présenter un second type d'intégrale stochastique, qui diffère du premier en ce que nous n'intégrons que par rapport à un processus de Wiener (au lieu d'une martingale continue quelconque), mais un Wiener qui n'est pas nécessairement un "vrai processus", mais un "processus F.A.L.". Ce qui suit va dans le sens de l'intégrale stochastique hilbertienne présentée dans NEVEU [2].

§3.2.1. Fonctionnelles aléatoires linéaires.

On se reportera à BENSOUSSAN [1] pour un exposé plus complet.

Soit $L^0(\Omega,\mathcal{F},P)$ l'espace vectoriel des [classes de] variables aléatoires réelles $\mathcal{F}$-mesurables.

Définition 3.3. On appelle Fonctionnelle Aléatoire Linéaire (F.A.L.) sur X' une application linéaire $x' \to u(x')$ de X' dans $L^0(\Omega,\mathcal{F},P)$. ∎

Si l'application $x' \to u(x')$ est de plus p.s. continue de X' dans $\mathbb{R}$ alors $\exists$ une variable aléatoire u à valeurs dans X, telle que :

$$u(x') = (u,x') \quad \text{p.s.,} \quad \forall x' \in X'$$

on dira alors que la F.A.L. $u(\cdot)$ est décomposable, et que la v.a. u décompose cette F.A.L. Dans ce cas, nous identifierons la F.A.L. et la variable aléatoire qui la décompose.

<u>Définition 3.4.</u> Une F.A.L. sera dite de type 2 si l'application $x' \to u(x')$ est continue de X' dans $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$. ▪

Si $u(\cdot)$ est une F.A.L. de type 2, alors $\exists \bar{u} \in X$ et $Q \in \mathcal{L}(X';X)$ tels que :

$$E[u(x')] = (\bar{u},x') \qquad \forall x' \in X'$$

$$E\Big([u(x')-(\bar{u},x')][u(y')-(\bar{u},y')]\Big) = (Qx',y'), \quad \forall x',y' \in X'.$$

$\bar{u}$ sera appelée l'espérance de la F.A.L. $u(\cdot)$ et Q son opérateur de covariance. On remarque aisément que $Q = Q^*$ et $Q \geq 0$.

<u>Définition 3.5.</u> Une F.A.L. gaussienne est une F.A.L. de type 2 telle que $\forall x' \in X'$, $u(x')$ est une v.a. gaussienne. ▪

<u>THEOREME 3.5.</u> *Soit* $u(\cdot)$ *une* F.A.L. *gaussienne, d'opérateur de covariance* Q. $u(\cdot)$ *est décomposable si et seulement si* Q *est nucléaire.* ▪

<u>Définition 3.6.</u> On appelle image par $\Lambda \in \mathcal{L}(X,Y)$ de la F.A.L. $u(\cdot)$ sur X' la F.A.L. $v(\cdot)$ sur Y' définie par

$$v(y') = u(\Lambda^* y'), \quad \forall y' \in Y'$$ ▪

On remarque que si u, v.a. à valeurs dans X, décompose la F.A.L. $u(\cdot)$, alors Λu, v.a. à valeurs dans Y, décompose la F.A.L. $v(\cdot) = \Lambda(u(\cdot))$, ce qui justifie la Définition 3.6.

<u>THEOREME 3.6.</u> *Si* $u(\cdot)$ *est une* F.A.L. *gaussienne sur* X', *d'espérance* $\bar{u}$ *et d'opérateur de covariance* Q,

alors $\Lambda(u(\cdot))$ *est une* F.A.L. *gaussienne sur* Y', *d'espérance* $\Lambda\bar{u}$ *et d'opérateur de covariance* $\Lambda Q \Lambda^*$ ▪

Le Théorème suivant résulte des Théorèmes 3.5 et 3.6. :

THEOREME 3.7. *Soit* $u(\cdot)$ *une* F.A.L. *gaussienne sur* X'. *Si* $\Lambda \in \mathcal{L}^2(X,Y)$, *alors la* F.A.L. $\Lambda(u(\cdot))$ *sur* Y' *est décomposable.* ▫

§3.2.2. Processus de Wiener sur un espace de Hilbert.

La famille $\mathcal{F}_t$ de sous-tribus de $\mathcal{F}$ étant donnée connue précédemment, on appellera $\mathcal{F}_t$ processus de Wiener (réel) un processus de Wiener qui est une $\mathcal{F}_t$ martingale, et on adoptera la :

Définition 3.7. On appellera $\mathcal{F}_t$ processus de Wiener sur X' une famille $(w_t(\cdot))_{t\in \mathbb{R}_+}$ de F.A.L. sur X', telle que :

(i) $\forall x' \in X'$, $w_t(x')$ est un $\mathcal{F}_t$ processus de Wiener réel.

(ii) $\exists Q \in \mathcal{L}(X';X)$ avec $Q = Q^*$, $Q \geq 0$ tel que :

$$\forall x',y' \in X', \quad \forall s < t,$$
$$E\{[w_t(x')-w_s(x')]\cdot[w_t(y')-w_s(y')]\} = (t-s)(Qx',y')$$ ▫

Si et seulement si $\mathrm{Tr}\, Q < +\infty$, $\exists$ un processus w_t à valeurs dans X tel que :

$$(w_t,x') = w_t(x'), \quad \forall x' \in X', \ t \in \mathbb{R}_+$$

On vérifie alors que $w \in \mathcal{M}^2(X)$.

Dans le cas général, on peut montrer qu'il existe un espace de Hilbert séparable Z contenant X tel que $w_t(\cdot)$, en tant que processus de Wiener sur Z', soit décomposable. D'après le Théorème 3.7, il suffit de construire Z tel que l'injection de X dans Z soit un élément de $\mathcal{L}^2(X;Z)$.

Soit $\mathcal{J}$ l'isomorphisme canonique de X' sur X défini par :

$$((\mathcal{J}x',y)) = (x',y), \quad \forall x' \in X', \ y \in X$$

Si $Q \in \mathcal{L}(X';X)$ et $Q = Q^*$, $Q \geq 0$, $\exists C \in \mathcal{L}(X)$ unique tel que :

$$Q = C\mathcal{J}C^*$$
$$C\mathcal{J} = \mathcal{J}C^* \geq 0$$

De plus, $\overline{C(X)}$ et $\mathrm{Ker}\, C$ sont des sous-espaces orthogonaux de X tels que :

$$X = \overline{C(X)} \oplus \mathrm{Ker}\, C$$

Notons $Y = \overline{C(X)}$, C_Y la restriction de C à Y et $\mathcal{J}_Y$ l'isomorphisme canonique de Y' sur Y. On a alors le :

THEOREME 3.8. *Etant donné* w_t *un* $\mathcal{F}_t$ *processus de Wiener sur* X' *d'opérateur de covariance* Q, $\exists$ *un et un seul* $\mathcal{F}_t$ *processus de Wiener* $\tilde{w}_t$ *sur* Y', *d'opérateur de covariance* $\mathcal{J}_Y$ *tel que :*

$$w_t = C_Y\, \tilde{w}_t$$ ▫

§3.2.3. <u>Intégrale stochastique par rapport à un processus de Wiener hilbertien.</u>

Soit $Q \in \mathcal{L}(X';X)$, $Q = Q^* \geq 0$.

Notons $\mathcal{L}_H(Q)$ l'espace des opérateurs ϕ linéaires de X dans H (éventuellement non bornés), tels que :

$$\phi Q \phi^* \in \mathcal{L}^1(H';H)$$

<u>Définition 3.8.</u> On notera $\mathcal{L}_H^2(Q)$ le quotient de $\mathcal{L}_H(Q)$ par la relation d'équivalence :

$$\phi \simeq \psi \iff \phi Q \phi^* = \psi Q \psi^*$$

Muni du produit scalaire :

$$((\phi,\psi)) = \mathrm{Tr}\ \phi Q \psi^*,$$

$\mathcal{L}_H^2(Q)$ est un espace de Hilbert. ▪

Considérons $L^0\left(\Omega;L^2_{loc}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}_H^2(Q))\right)$, espace des (classes de) v.a. à valeurs dans l'espace de Fréchet $L^2_{loc}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}_H^2(Q))$.

$\phi \in L^0\left(\Omega;L^2_{loc}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}_H^2(Q))\right)$ est une classe d'équivalence de processus à valeurs dans $\mathcal{L}_H^2(Q)$. Soient $\overline{\phi}$ et $\overline{\overline{\phi}}$ deux représentants de la même classe d'équivalence, i.e. deux processus mesurables à valeurs dans $\mathcal{L}_H^2(Q)$ et à trajectoires localement de carré intégrable, tels que $\exists N \in \mathcal{F}$ avec $P(N) = 0$ et :

$$\forall \omega \notin N,\ \overline{\phi}(t,\omega) = \overline{\overline{\phi}}(t,\omega) \text{ p.p.t.}$$

Si $\overline{\phi}(t)$ est $\mathcal{F}_t$ mesurable p.p.t, alors il en est de même de $\overline{\overline{\phi}}(t)$ [on le vérifie en utilisant le fait que $\mathcal{F}_t$ contient tous les P-négligeables de $\mathcal{F}$].

On peut donc poser la définition suivante :

<u>Définition 3.9.</u> On dira que $\phi \in L^0\left(\Omega;L^2_{loc}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}_H^2(Q))\right)$ est <u>non anticipatif</u> si tout processus $\overline{\phi}$ de la classe ϕ est tel que $\overline{\phi}(t)$ est $\mathcal{F}_t$ mesurable pour presque tout t. ▪

Si w_t est un processus de Wiener sur X' d'opérateur de covariance Q, et si :
$\phi \in L^0\left(\Omega;L^2_{loc}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}_H^2(Q))\right)$ est non anticipatif, alors on peut définir :

$$\int_0^t \phi_s\, dw_s \in \mathcal{M}^2_{loc}(H), \text{ tel que :}$$

$$\ll \int_0^{\cdot} \phi_s\, dw_s \gg_t = \int_0^t \| \phi_s Q \phi_s^* \|_1\, ds$$

Si de plus $E\int_0^t \|\phi_s Q\phi_s^\star\|_1 ds < +\infty$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, alors

$$\int_0^\cdot \phi_s\, dw_s \in \mathcal{M}^2(H).$$

Lorsque $TrQ < \infty$ et ϕ est bien mesurable, cette nouvelle définition redonne la même intégrale stochastique que celle définie au §3.1.

Notons de plus que si $\Lambda \in \mathcal{L}(X;Y)$, et si $\phi \in L^0\big(\Omega;L^2_{loc}(\mathbb{R}_+,\mathcal{L}^2_H(\Lambda Q\Lambda^\star))\big)$ est non anticipatif, alors $\phi\Lambda \in L^0\big(\Omega;L^2_{loc}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}^2_H(Q))\big)$, et :

$$\int_0^t \phi_s\, d(\Lambda w_s) = \int_0^t \phi_s \Lambda\, dw_s \tag{3.4}$$

Remarque 3.1. On aimerait présenter une théorie unique qui inclue les intégrales définies aux §3.1 et 3.2. Il faudrait pour cela définir une notion de "martingale F.A.L.", avec un processus $\ll M \gg_t$ à valeurs dans $\mathcal{L}(X';X)$. Mais alors $\ll M \gg_t$ ne serait plus à variations bornées, et on aurait des difficultés pour définir $\int_0^t \phi_s d \ll M \gg_s \phi_s^\star$. Pour une généralisation dans ce sens, cf. METIVIER [3] ∎

§4. FORMULE DE ITO.

Soient E un espace de Banach, H et K deux espaces de Hilbert séparables.

Soit ϕ une application de $E\times H$ à valeurs dans K, qui possède des dérivées $\phi^{1,0}$, $\phi^{0,1}$, et $\phi^{0,2}$ en tout point $(e,h) \in E\times H$.

Remarquons que : $\phi^{1,0}(e,h) \in \mathcal{L}(E;K)$

$\phi^{0,1}(e,h) \in \mathcal{L}(H;K)$

$\phi^{0,2}(e,h)$ est une application bilinéaire continue de $H\times H$ dans K, et peut donc être considéré comme un élément de $\mathcal{L}\big(\mathcal{L}^1(H',H);K\big)$ on a le :

THEOREME 4.1. *Soit* $\phi : E\times H \to K$ *qui vérifie les conditions suivantes :*

(i) ϕ, $\phi^{1,0}$, $\phi^{0,1}$ *et* $\phi^{0,2}$ *sont bornées sur tout borné de* $E\times H$

(ii) ϕ, $\phi^{1,0}$ *et* $\phi^{0,1}$ *sont continues de* $E\times H$ *dans* K, $\mathcal{L}(E,K)$ *et* $\mathcal{L}(H,K)$ *respectivement.*

(iii) $\forall k' \in K'$, $Q \in \mathcal{L}^1(H';H)$, *l'application* $(e,h) \to \big(k', \phi^{0,2}(e,h)Q\big)$ *est continue de* $E\times H$ *dans* $\mathbb{R}$.

Soient V_t *un processus adapté, continu et à variations bornées à valeurs dans* E, *et* $M \in \mathcal{M}^2_{loc}(H)$.

On a alors :

$$(4.1) \qquad \phi(V_t,M_t) = \phi(V_0,M_0) + \int_0^t \phi^{1,0}(V_s,M_s)dV_s + \int_0^t \phi^{0,1}(V_s,M_s)dM_s + \frac{1}{2}\int_0^t \phi^{0,2}(V_s,M_s)d \ll M \gg_s \qquad \square$$

Nous allons donner deux exemples d'application du Théorème 4.1. Dans ces exemples, on a $K = \mathbb{R}$, $E = H$, et on identifie H à son dual H'.

Alors $\forall (v,h) \in H\times H$, $\phi^{1,0}(v,h)$ et $\phi^{0,1}(v,h)$ s'identifient à des éléments de H. $\phi^{0,2}(v,h)$, qui est une forme bilinéaire continue symétrique sur H, s'identifie à un élément autoadjoint de $\mathcal{L}(H)$. La forme linéaire continue sur $\mathcal{L}^1(H)$ que définit $\phi^{0,2}(v,h)$ s'écrit alors, d'après le Théorème 2.4 :

$$Q \longrightarrow \mathrm{Tr}\,[\phi^{0,2}(v,h) \circ Q]$$

La relation (4.1) s'écrit alors :

$$(4.2) \qquad \phi(V_t,M_t) = \phi(V_0,M_0) + \int_0^t \left(\phi^{1,0}(V_s,M_s),dV_s\right) + \int_0^t \left(\phi^{0,1}(V_s,M_s),dM_s\right) + \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\int_0^t \phi^{0,2}(V_s,M_s)d \ll M \gg_s$$

Exemple 4.1 : Soient $M \in \mathcal{M}^2_{loc}(H)$, et V_t un processus adapté continu et à variations bornées à valeurs dans H.

Notons $\|\cdot\|$ la norme dans H, et posons :

$$\phi(v,h) = \|v+h\|^2$$

Alors :

$$\begin{aligned} \phi^{1,0}(v,h) &= \phi^{0,1}(v,h) \\ &= 2(v+h) \\ \phi^{0,2}(v,h) &= 2I \end{aligned}$$

(4.2) s'écrit alors :

$$\|V_t+M_t\|^2 = \|V_0\|^2 + 2\int_0^t (V_s+M_s,dV_s) + 2\int_0^t (V_s+M_s,dM_s) + \mathrm{Tr} \ll M \gg_t \qquad \square$$

?

)

Exemple 4.2. Soient $H = L^2(\mathcal{O})$, où $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $\psi(V_t, M_t) = \Phi(V_t + M_t)$, avec :

$$\Phi(u) = \int_{\mathcal{O}} \phi(u(x))dx, \quad u \in L^2(\mathcal{O})$$

où $\phi \in C^2(\mathbb{R})$, et vérifie :

$$(4.3) \quad \begin{array}{ll} |\phi(r)| \leq L(\theta + r^2) & \forall r \in \mathbb{R} \\ |\phi'(r)| \leq L(\theta + |r|) & \forall r \in \mathbb{R} \\ |\phi''(r)| \leq L & \forall r \in \mathbb{R} \end{array}$$

avec $L \in \mathbb{R}_+$, et $\theta = \begin{cases} 0 \text{ si mes } \mathcal{O} = +\infty \\ 1 \text{ si mes } \mathcal{O} < +\infty \end{cases}$

La classe de fonctionnelles que nous venons de définir est très importante dans les applications. Nous allons maintenant montrer qu'elle vérifie les hypothèses du Théorème 4.1.

On montre aisément, en utilisant les résultats de KRASNOSELSKII [1], que les hypothèses faites sur $\phi(\cdot)$ entraînent que :

(4.4) $u \to \Phi(u)$ est continue de $L^2(\mathcal{O})$ dans $\mathbb{R}$

(4.5) $u \to \phi'(u)$ estcontinue de $L^2(\mathcal{O})$ dans $L^2(\mathcal{O})$

Montrons en outre le :

LEMME 4.1. *L'application* $u \to \phi''(u)$ *est continue de* $L^2(\mathcal{O})$ dans $L^\infty(\mathcal{O})^*$ *faible.*

Démonstration : Soit $\{u_n\}$ une suite de $L^2(\mathcal{O})$ telle que $u_n \to u$ dans $L^2(\mathcal{O})$.

D'après (4.3), $\phi''(u_n)$ reste dans un borné de $L^\infty(\mathcal{O})$. Il nous reste à montrer que toute sous-suite de $\{\phi''(u_n)\}$ $*$faiblement convergente, admet $\phi''(u)$ comme limite. Soit $\{\phi''(u_\mu)\}$ une telle suite.

De la suite $\{u_\mu\}$, on peut extraire une sous-suite $\{u_{\mu_k}\}$ telle que $u_{\mu_k}(x) \to u(x)$ p.p.

Puisque ϕ'' est continue, $\phi''(u_{\mu_k}(x)) \to \phi''(u(x))$ p.p.

Mais :

$$\phi''(u_{\mu_k}) \to \chi \text{ dans } L^\infty(\mathcal{O})^* \text{faible}$$

?

Le Lemme 4.1 résulte alors du :

LEMME 4.2. *Si* $\xi_n(x) \to \xi(x)$ p.p. *dans* $\mathcal{O}$ *et* $\xi_n \to \zeta$ *dans* $L^\infty(\mathcal{O})^*$*faible.* *Alors :*

$$\xi(x) = \zeta(x) \quad \text{p.p.}$$

Démonstration. Nous allons nous inspirer de la démonstration d'un résultat similaire, faite dans LIONS [1].

Soit $\mathcal{O}_N = \{x \in \mathcal{O};\ |\xi_n(x)-\xi(x)| \leq 1,\ \forall n \geq N\}$

La suite d'ensembles $\mathcal{O}_N$ est croissante et $\bigcup_N \mathcal{O}_N = \mathcal{O}-Q$, où Q est un sous-ensemble de $\mathcal{O}$ de mesure nulle.

Si $E_N = \{\rho \in L^1(\mathcal{O});\ \text{support }(\rho) \subset \mathcal{O}_n\}$, alors $\bigcup_N E_N$ est dense dans $L^1(\mathcal{O})$.

Soit alors $\rho \in \bigcup_N E_N$. $\exists N_0$ t-q : $\rho \in E_{N_0}$. Donc

$$\int_{\mathcal{O}} \rho(x)\,[\xi(x)-\xi_n(x)]\,dx \to 0$$

grâce au Théorème de convergence dominée de Lebesgue. Mais :

$$\int_{\mathcal{O}} \rho(x)[\xi_n(x)-\zeta(x)]\,dx \to 0$$

Donc :

$$\int_{\mathcal{O}} \rho(x)\xi(x)dx = \int_{\mathcal{O}} \rho(x)\zeta(x)dx \quad \forall \rho \in \bigcup_N \phi_N,\ \text{d'où :}$$

$$\xi(x) = \zeta(x) \quad \text{p.p.}$$

∎

$\phi'(u)$ s'identifie avec $\phi'(u) \in L^2(\mathcal{O})$. $\phi''(u)$ s'identifie avec l'opérateur linéaire continu dans $L^2(\mathcal{O})$ de multiplication par $\phi''(u(\cdot)) \in L^\infty(\mathcal{O})$.

Grâce à (4.3), (4.4) et (4.5), la fonctionnelle $\psi(v,h) = \phi(v+h)$ vérifie les hypothèses (i) et (ii) du Théorème 4.1. Il nous reste à vérifier l'hypothèse (iii).

Notons $\Lambda(u) \in \mathcal{L}(L^2(\mathcal{O}))$ l'opérateur de multiplication par $\phi''(u(\cdot))$, défini par :

$$\forall h \in L^2(\mathcal{O}),\ [\Lambda(u)h](x) = \phi''(u(x))h(x) \ \text{p.p.}$$

Pour montrer que la fonctionnelle vérifie l'hypothèse (iii) du Théorème 4.1, il nous suffit de montrer :

LEMME 4.3. *L'application* $u \to \Lambda(u)$ *est continue de* $H = L^2(\mathcal{O})$ *dans* $\mathcal{L}(H)$**faible* [*i.e. muni de la topologie* $\sigma(\mathcal{L}(H),\mathcal{L}^1(H))$].

Démonstration : Soit $u_n \to u$ dans $L^2(\mathcal{O})$.

Alors, grâce au Lemme 4.1,

$$\phi''(u_n) \to \phi''(u) \text{ dans } L^\infty(\mathcal{O})\text{*faible},$$

d'où il résulte que :

(4.6) $\Lambda(u_n) \to \Lambda(u)$ au sens de la convergence faible des opérateurs, i.e. :

$$\left(\Lambda(u_n)h,k\right) \longrightarrow \left(\Lambda(u)h,k\right), \quad \forall h,k \in L^2(\mathcal{O})$$

De plus, grâce à (4.3),

$$\| \Lambda(u_n) \| \leqslant L$$

Il nous reste à montrer que $\forall Q \in \mathcal{L}^1(H)$,

$$\mathrm{Tr}\,[\Lambda(u_n) \circ Q] \longrightarrow \mathrm{Tr}\,[\Lambda(u) \circ Q]$$

Soit $\{e_1, \ldots, e_k, \ldots\}$ une base orthonormée de H, et P_k la projection orthogonale dans H sur $Sp\,\{e_1 \ldots e_k\}$

$$\mathrm{Tr}\{[\Lambda(u)-\Lambda(u_n)] \circ Q\} = \mathrm{Tr}\{[\Lambda(u)-\Lambda(u_n)] \circ Q \circ [I-P_k]\} +$$
$$+ \mathrm{Tr}\{[\Lambda(u)-\Lambda(u_n)] \circ Q \circ P_k\}$$

$$\mathrm{Tr}\{[\Lambda(u)-\Lambda(U_n)] \circ Q \circ [I-P_k]\} \leqslant \| [\Lambda(u)-\Lambda(U_n)] \circ Q \circ [I-P_k] \|_1$$
$$\leqslant \| \Lambda(u)-\Lambda(U_n) \| \cdot \| Q \circ (I-P_k) \|_1$$
$$\leqslant 2L \| Q \circ (I-P_k) \|_1$$

Cette dernière quantité tend vers zéro quand $k \longrightarrow \infty$, uniformément en n, grâce au Théorème 2.3.

Mais, à k fixé,

$$\mathrm{Tr}\{[\Lambda(u)-\Lambda(u_n)] \circ Q \circ P_k\} = \sum_{i=1}^{k} ([\Lambda(u)-\Lambda(u_n)]\, Qe_i, e_i)$$

Cette dernière quantité tend vers zéro quand $n \longrightarrow \infty$, grâce à (4.6). ▫

On peut donc appliquer le Théorème 4.1 à la fonctionnelle Ψ, d'où, avec les notations que nous venons d'introduire :

$$\Phi(V_t+M_t) = \Phi(V_0) + \int_0^t \left(\Phi'(V_s+M_s), dV_s\right) +$$
$$+ \int_0^t \left(\Phi'(V_s+M_s), dM_s\right) + \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr} \int_0^t \Lambda(V_s+M_s)\, d \ll M \gg_s$$

IIème PARTIE

EQUATIONS PARABOLIQUES MONOTONES STOCHASTIQUES

Orientation

On cherche à résoudre des équations du type :

$$(1) \qquad \begin{cases} du(t) + A\big(u(t)\big)dt + B\big(u(t)\big)dw(t) = f(t)dt + dM(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

où A et B sont des opérateurs non bornés dans des espaces de Hilbert, qui vérifient une hypothèse de type monotonie - dans les applications, A et B seront des opérateurs aux dérivées partielles; $w(t)$ est un processus de Wiener hilbertien, et $M(t)$ une martingale.

Le premier chapitre sera consacré au rappel des résultats déterministes, et à leur extension, qui nous permettra d'étudier l'équation :

$$(2) \qquad \begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) + A\big(u(t)\big) = f(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

dans le cas où f et u_0 sont aléatoires.

Le but du deuxième chapitre est d'établir la règle de calcul différentiel stochastique, ou "formule de Ito", adaptée à la situation des problèmes variationnels paraboliques. Nous établirons dans un premier temps cette règle de calcul dans le cas d'une fonctionnelle particulière, que, appliquée à la solution des équations d'évolution, nous appellerons l'énergie. Ce résultat nous permettra d'établir "l'égalité de l'énergie", qui sera un outil fondamental dans le chapitre suivant.

Cette démonstration se fera simultanément avec l'étude de l'équation :

$$(3) \qquad \begin{cases} du(t) + A\big(u(t)\big)dt = f(t)dt + dM(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Cette équation a déjà été étudiée par BENSOUSSAN-TEMAM [1], et METIVIER-PISTONE [1]. Notre méthode de démonstration nous permettra d'établir la règle de calcul différentiel stochastique.

Dans le <u>troisième chapitre</u>, nous étudierons l'équation (1). Puis nous donnerons des exemples, l'expression de la moyenne et de la covariance de la solution dans le cas où les opérateurs A et B sont linéaires, et un résultat du type "principe du maximum".

Chapitre 1

PREMIERES EXTENSIONS DES RESULTATS DETERMINISTES

§0 Introduction.

§1 Hypothèses et Notations.

§2 Résultats déterministes.

§3 Mesurabilité de la solution par rapport aux données. Un premier type d'équations paraboliques stochastiques.

§0. INTRODUCTION.

Après avoir présenté le cadre d'hypothèses, nous allons rappeler le résultat général de LIONS [1] concernant les équations monotones paraboliques. Nous montrerons ensuite que l'application qui aux données u_0 et f associe la solution est mesurable, et nous en déduirons un résultat d'existence et d'unicité d'un processus solution, lorsque u_0 et f sont aléatoires.

§1. HYPOTHESES ET NOTATIONS.

Soit V un espace de Banach sur le corps des réels, réflexif et séparable, dense dans un espace de Hilbert sur le corps des réels H. On identifie H à son dual. Alors H s'identifie à un sous-espace du dual V' de V :

$$V \subset H \subset V',$$

les injections étant continues, et chaque espace dense dans le suivant.

On notera $\|\cdot\|$, $|\cdot|$ et $\|\cdot\|_*$ les normes dans V,H et V' respectivement, $(\cdot,\cdot)$ le produit scalaire dans H, et $<\cdot,\cdot>$ le produit de dualité V,V'.

Soit p un nombre réel, $p > 1$.

Soit $A(t,\cdot)$ une famille d'opérateurs de V dans V', définis pour presque tout $t \in]0,T[$, où $T \in \mathbb{R}_+$ [dans la suite, nous écrirons "p.p.t"], qui vérifient :

(1.1) $A(t,\cdot)$ est hémicontinu de V dans V' p.p.t, i.e. :
$\lambda \to < A(t,u+\lambda v),w >$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $\forall u,v,w \in V$, p.p.t

(1.2) $A(t,\cdot)$ est borné : $\exists \beta$ tel que :

$$\|A(t,u)\|_* \leqslant \beta \|u\|^{p-1}, \quad \forall u \in V, \text{ p.p.t}$$

(1.3) $A(t,\cdot)$ est coercif : $\exists \alpha > 0$ tel que :

$$< A(t,u),u > \geqslant \alpha \|u\|^p, \quad \forall u \in V, \text{ p.p.t}$$

(1.4) $A(t,\cdot)$ est monotone :

$$< A(t,u)-A(t,v),u-v > \geqslant 0, \quad \forall u,v \in V, \text{ p.p.t}$$

(1.5) $\forall u \in V$, $t \to A(t,u)$ est Lebesgue-mesurable à valeurs dans V'

Remarque 1.1. On montre (cf. LIONS [1]) que grâce à (1.1), (1.2) et (1.4), p.p.t, $u \longrightarrow A(t,u)$ est continue de V fort dans V' faible. ∎

Si X est un espace de Banach séparable, $p \in [1,+\infty[$ on désignera par $L^p(0,T;X)$ l'espace des classes de fonctions Lebesgue mesurables de $[0,T]$ à valeurs dans X, telles que :

$$\int_0^T \| f(t) \|_X^p \, dt < \infty$$

$L^p(0,T;X)$ est un espace de Banach pour la norme :

$$\left(\int_0^T \| f(t) \|_X^p \, dt \right)^{1/p}$$

Si $\mathcal{B}(0,T)$ désigne la tribu des ensembles boréliens de $[0,T]$ et $\overline{\mathcal{B}}(0,T)$ sa tribu complétée,

$$L^p(0,T;X) = L^p([0,T], \overline{\mathcal{B}}(0,T), dt; X)$$

Deux fonctions f_1 et f_2 appartiennent à la même classe d'équivalence si et si seulement si l'ensemble :

$$\{t \in [0,T] \,;\, f_1(t) \neq f_2(t)\}$$

est un ensemble de mesure nulle de la tribu $\overline{\mathcal{B}}(0,T)$.

On identifiera couramment, par abus de langage, une fonction et la classe d'équivalence à laquelle elle appartient.

Remarque 1.2. Si $u(\cdot) \in L^p(0,T;V)$, alors, si $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, A(\cdot, u(\cdot)) \in L^{p'}(0,T;V')$. En effet, grâce à (1.2), il suffit de montrer que :

$t \longrightarrow A(t,u(t))$ est Lebesgue mesurable à valeurs dans V'. Mais puisque V' est un espace de Banach séparable, d'après le Théorème de PETTIS [Théorème 1.1 de la Ième Partie], il suffit pour cela que $\forall v \in V$,

$t \longrightarrow \langle A(t,u(t)), v \rangle$ soit Lebesgue mesurable.

Or ceci est une conséquence de l'Hypothèse (1.5) et du fait que $u \longrightarrow \langle A(t,u), v \rangle$ est continue de V dans $\mathbb{R}$ [cf. Remarque 1.1], d'après un Théorème de SCORZA-DRAGONI [cf. par exemple CASTAING [1] page 8].

Il découle alors de (1.2) que si u_n est une suite bornée dans $L^p(0,T;V)$, $A(u_n)$ est une suite bornée dans $L^{p'}(0,T;V')$. ∎

X étant un espace de Banach, on notera dans toute la suite $C(0,T;X)$ l'espace de Banach des applications $f(\cdot)$ continues de $[0,T]$ à valeurs dans X, muni de la norme :

$$\sup_{t\in[0,T]} \|f(t)\|_X$$

On se donne en outre un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{F},P)$ et une famille croissante $(\mathcal{F}_t)_{t\in R_+}$ de sous σ-algèbres de $\mathcal{F}$, telle que $\mathcal{F}_0$ contienne tous les ensembles P-négligeables de $\mathcal{F}$.

Si X est un espace de Banach, on notera $L^0(\Omega;X)$ l'espace des [classes de] variables aléatoires à valeurs dans X.

§2. LES RESULTATS DETERMINISTES.

Nous allons présenter les quelques résultats sur les équations aux dérivées partielles paraboliques monotones dont nous aurons besoin dans la suite. Pour une étude plus complète de cette question, et plus généralement des équations aux dérivées partielles non linéaires, on consultera LIONS [1], où l'on trouvera en particulier les trois résultats suivants :

LEMME 2.1. *Soit* $u(\cdot)$ *une application absolument continue de* $[0,T]$ *dans* V', *telle que :*

(i) $u \in L^p(0,T;V)$

(ii) $\frac{du}{dt} \in L^{p'}(0,T;V')$

Alors $u \in C(0,T;H)$ *et de plus :*

$$\frac{d}{dt}|u(t)|^2 = 2 < u(t),u'(t) > \text{ , p.p.t} \qquad \blacksquare$$

LEMME 2.2. *Soit* $u(\cdot)$ *une application absolument continue de* $[0,T]$ *dans* V', *telle que :*

(i) $u \in L^p(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$

(ii) $\frac{du}{dt} \in L^{p'}(0,T;V') + L^1(0,T;H)$

Alors $u \in C(0,T;H)$ *et :*

$$\frac{d}{dt}|u(t)|^2 = 2 < u(t),u'(t) > \text{ , p.p.t} \qquad \blacksquare$$

THEOREME 2.1. *Sous les hypothèses* (1.1) ... (1.5), *étant donné :* $u_0 \in H$ *et* $f \in L^1(0,T;H) + L^{p'}(0,T;V')$, *il existe une solution unique :*

$$u \in L^p(0,T;V)$$

de l'équation :

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{du}{dt} + A\big(t,u(t)\big) = f(t) \quad \text{p.p.t} \\ \qquad u(0) = u_0\end{array}\right. \tag{2.1}$$

de plus $u \in C(0,T;H)$ *et :*

$$\frac{d}{dt}|u(t)|^2 = 2 < u(t), \frac{du(t)}{dt} > \text{, p.p.t}$$

■

Remarque 2.1. Pour démontrer le Théorème 2.1, on construit une solution $u \in L^p(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$. Cette solution vérifie donc les hypothèses du Lemme 2.2, et ses conclusions. Il reste alors à montrer que tout $v \in L^p(0,T;V)$ solution de l'équation (2.1) coïncide avec u, ce qui se fait en utilisant le Lemme 2.1 et l'hypothèse de monotonie (1.4). ■

Remarque 2.2. Le Lemme 2.2 est nécessaire pour construire, dans le Théorème 2.1 la solution u. Les Lemmes 2.1 et 2.2 se démontrent indépendamment de tout résultat sur les équations d'évolution (type équation (2.1)). ■

On peut déduire du Théorème 2.1 :

THEOREME 2.2. *Supposons que le triplet* (V,V',p), *avec* $p > 1$, *soit tel qu'il existe un opérateur* A *de* V *dans* V' *qui vérifie les hypothèses* (1.1), (1.2), (1.3) *et* (1.4).

Alors si $u \in L^p(0,T;V)$ *vérifie :*

$$u(t) = u_0 + \int_0^t v(s)ds \quad \forall t \in [0,T]$$

avec $u_0 \in H$,

$v \in L^1(0,T;H) + L^{p'}(0,T;V')$,

les conclusions du Lemme 2.1 *sont encore vraies.*

Démonstration : On vérifie aisément que u est solution de l'équation :

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{du}{dt}(t) + A\big(u(t)\big) = f(t) \quad \text{p.p.t} \\ \qquad u(0) = u_0\end{array}\right. \tag{2.2}$$

où $f(t) = v(t) + A\big(u(t)\big)$.

Or, d'après le Théorème 2.1, l'équation (2.2) a une solution unique qui vérifie les conclusions du Lemme 2.1. ∎

Nous aurons besoin d'un résultat un peu plus général que le Théorème 2.1.

Si $g(\cdot) \in L^p(0,T;V)$, soit $A_g(t,\cdot)$ la famille d'opérateurs de V dans V', définie pour presque tout $t \in]0,T[$, par :

$$A_g(t,u) = A\big(t,g(t)+u\big) \tag{2.3}$$

On a alors :

<u>THEOREME 2.3</u>. *Sous les hypothèses du Théorème* 2.1, $A_g(t,\cdot)$ *étant défini par* (2.3), *il existe une solution unique :*

$$u \in L^p(0,T;V) \cap C(0,T;H)$$

de l'équation :

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} + A_g\big(t,u(t)\big) = f(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{2.4}$$ ∎

On trouvera dans BENSOUSSAN-TEMAM [1] une démonstration du Théorème 2.3, qui utilise une méthode de semi-discrétisation en temps. On peut aussi remarquer que $Ag(t,\cdot)$ vérifie les hypothèses (1.1), (1.4) et (1.5). Les hypothèses (1.2) et (1.3) sont remplacées par :

$$\| Ag(t,u)\|_* \leqslant \beta\big(\| g(t)\| + \| u \|\big)^{p-1} \tag{2.5}$$

$$< A_g(t,u),u > + \lambda \| g(t) \|^p \geqslant \frac{\alpha}{2^p} \| u \|^p \tag{2.6}$$

où λ est une constante qui dépend de α,β et p. (2.5) est immédiat à partir de (1.2). (2.6) se démontre à partir de (1.3), en utilisant quelques inégalités classiques.

Il résulte alors de (2.5) que la Remarque 1.2 est encore vraie, et de (2.6) que si $< A_g\big(\cdot,u_n(\cdot)\big),u_n(\cdot) >$ est une suite bornée dans $L^1(0,T)$, u_n est bornée dans $L^p(0,T;V)$.

On peut alors vérifier aisément que la méthode de démonstration du Théorème 2.1 dans LIONS [1] permet de démontrer le Théorème 2.3.

§3. MESURABILITE DE LA SOLUTION PAR RAPPORT AUX DONNEES. UN PREMIER TYPE D'EQUATIONS PARABOLIQUES STOCHASTIQUES.

Revenons à l'équation (2.4).

Posons :

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t)$$

où

$$f_1 \in L^1(0,T;H)$$
$$f_2 \in L^{p'}(0,T;V')$$

Le Théorème 2.3 définit une application :

$$(u_0,\ f_1,\ f_2,\ g) \to u$$

de $H \times L^1(0,T;H) \times L^{p'}(0,T;V') \times L^p(0,T;V)$ à valeurs dans $L^p(0,T;V) \cap C(0,T;H)$.

On a le théorème :

THEOREME 3.1. *L'application définie par le Théorème* 2.3, *qui à* (u_0, f_1, f_2, g) *associe* u , *solution de l'équation* (2.4) *est continue de :*

$$H \times L^1(0,T;H) \times L^{p'}(0,T;V') \times L^p(0,T;V)$$

à valeurs dans :

$$L^p(0,T;V)\ \textit{faible} \cap C(0,T;H)\ \textit{fort}$$

Démonstration : Il suffit de montrer la continuité pour des suites. Soient donc :

$$(3.1) \qquad \begin{cases} u_0^n \to u_0 \text{ dans } H \\ f_1^n \to f_1 \text{ dans } L^1(0,T;H) \\ f_2^n \to f_2 \text{ dans } L^{p'}(0,T;V) \\ g^n \to g \text{ dans } L^p(0,T;V) \end{cases}$$

On désignera par u^n la solution de l'équation (2.4) avec les données $(u_0^n,\ f_1^n,\ f_2^n,\ g^n)$ et par u la solution de l'équation (2.4) avec les données $(u_0,\ f_1,\ f_2,\ g)$.

Montrons tout d'abord le :

LEMME 3.1. u^n *reste dans un borné de* $L^p(0,T;V) \cap C(0,T;H)$.

Démonstration. Grâce au Lemme 2.2, on a :

$$(3.2)\quad \begin{cases} |u^n(t)|^2 + 2\int_0^t < A_{g^n}(s,u^n(s)),\ u^n(s) > ds = |u_0^n|^2 + \\ \qquad + 2\int_0^t (f_1^n(s),u^n(s))\,ds + 2\int_0^t < f_2^n(s),u^n(s) > ds \end{cases}$$

Grâce à (2.6), on tire de (3.2) :

$$(3.3)\quad \begin{cases} |u^n(t)|^2 + \frac{\alpha}{2^{p-1}} \int_0^t \| u^n(s) \|^p ds \leqslant |u_0^n|^2 + 2\lambda\int_0^t \| g^n(s) \|^p\, ds + \\ \qquad + 2\int_0^t (f_1^n(s),u^n(s))ds + 2\int_0^t < f^n(s),u^n(s) > ds \end{cases}$$

On déduit des inégalités de Hölder et de Young :

$$(3.4)\quad 2\int_0^t (f_1^n(s),u^n(s))ds \leqslant \frac{1}{2} \sup_{t\leqslant T}|u^n(t)|^2 + 4\left(\int_0^T |f_1^n(s)|ds\right)^2.$$

$$(3.5)\quad 2\int_0^t < f_2^n(s),u^n(s) > ds \leqslant \frac{2}{pC^p}\int_0^t \| u^n(s)\|^p ds + \frac{2C^{p'}}{p'}\int_0^t \| f_2^n(s)\|^{p'} ds$$

où l'on choisit C tel que :

$$\frac{2}{pC^p} = \frac{\alpha}{2^p}$$

Grâce à (3.1),

$$(3.6)\quad C_1 = \sup_n \left[|u_0^n|^2 + 2\lambda\int_0^T \| g^n \| dt + 4\left(\int_0^T |f_1|dt\right)^2 + \frac{2C^{p'}}{p'}\int_0^T \| f_2^n \|^{p'} dt\right]$$

est une quantité finie.

On déduit de (3.3), (3.4), (3.5) et (3.6) :

$$(3.7)\quad |u^n(t)|^2 + \frac{\alpha}{2^p}\int_0^t \| u^n(s) \|^p ds \leqslant C_1 + \frac{1}{2} \sup_{t\leqslant T} |u^n(t)|^2$$

De (3.7), on déduit :

$$\sup_{t\leqslant T} |u^n(t)|^2 \leqslant 2C_1$$

$$\int_0^T \| u^n(t) \|^p dt \leqslant \frac{2^{p+1}}{\alpha} C_1$$

On tire du Lemme 3.1, de l'Hypothèse (1.2) et de (3.1) :

$$(3.8)\qquad A_{g^n}(u^n) \text{ reste dans un borné de } L^{p'}(0,T;V')$$

Etablissons maintenant le :

LEMME 3.2. $u^n \to u$ *dans* $C(0,T;H)$.

Démonstration :

$$(3.9)\quad \begin{cases} \frac{d}{dt}[u(t)-u^n(t)] + A_g\big(t,u(t)\big) - A_{g^n}\big(t,u^n(t)\big) = f(t) - f^n(t) \\ u(0) - u^n(0) = u_0 - u_0^n \end{cases}$$

Appliquons le Lemme 2.2 à $u(t)-u^n(t)$:

$$|u(t)-u^n(t)|^2 + 2\int_0^t < A_g(u)-A_{g^n}(u^n),\ u-u^n > ds =$$
$$= |u_0-u_0^n|^2 + 2\int_0^t < f-f^n,\ u-u^n > ds$$

Grâce à l'Hypothèse (1.4) :

$$(3.10)\quad \begin{cases} \sup\limits_{t\leq T}|u(t)-u^n(t)|^2 \leq |u_0-u_0^n|^2 + 2\int_0^T | < A_g(u)-A_g\ (u^n), g-g^n > |dt \\ \qquad + 2\int_0^T |(f_1-f_1^n, u-u^n)|dt + 2\int_0^T | < f_2-f_2^n,\ u-u^n > |dt \end{cases}$$

Grâce à (3.1), au Lemme 3.1 et à (3.8), chaque terme du second membre de (3.10) tend vers zéro, quand $n \to \infty$. ∎

fin de la démonstration du Théorème 3.1.

On a le résultat suivant (cf. YOSIDA [1]).

LEMME 3.3. *Soit* X *un espace de Banach,* X' *son dual. Tout borné de* X' *fort est relativement compact pour la topologie* *faible [*i.e. la topologie* $\sigma(X';X)$].

En particulier, si X *est réflexif, tout borné de* X *est relativement compact pour la topologie faible* [*i.e. la topologie* $\sigma(X;X')$]. ∎

On peut donc, grâce au Lemme 3.1, extraire de la suite u_n une sous-suite qui converge dans $L^p(0,T;V)$ faible. Grâce au Lemme 3.2, la limite de cette sous-suite est nécessairement u. Donc toutes les sous-suite convergentes dans $L^p(0,T;V)$ faible de la suite u^n ont même limite. Donc :

$$(3.11)\qquad u^n \to u \text{ dans } L^p(0,T;V) \text{ faible.}$$

Le Théorème résulte de (3.11) et du Lemme (3.2). ∎

COROLLAIRE : L'application définie par le Théorème 2.3, qui à (u_0, f_1, f_2, g) associe u, solution de l'équation (2.4), est mesurable de :

$$H \times L^1(0,T;H) \times L^{p'}(0,T;V') \times L^p(0,T;V)$$

à valeurs dans :

$$L^p(0,T;V) \cap C(0,T;H),$$

tous les espaces étant munis de leur tribu borélienne.

Démonstration : Cette application est, grâce au Théorème 3.1, continue à valeurs dans : $L^p(0,T;V)$ faible $\cap$ $C(0,T;H)$ fort et donc puisque $L^p(0,T;V)$ est séparable, elle est mesurable à valeurs dans $L^p(0,T;V) \cap C(0,T;H)$, grâce au Théorème de PETTIS (Théorème 1.1. de la Ière Partie). ∎

Nous pouvons maintenant résoudre l'équation :

$$(3.12) \quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + A_g\big(t, u(t)\big) = f_1(t) + f_2(t), \text{ p.p.t} \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

avec des données u_0, f_1, f_2 et g stochastiques.

THEOREME 3.2. *Soient* $u_0 \in L^\circ(\Omega;H)$,

$$f_1 \in L^\circ\big(\Omega; L^1(0,T;H)\big)$$
$$f_2 \in L^\circ\big(\Omega; L^{p'}(0,T;V')\big)$$
$$g \in L^\circ\big(\Omega; L^p(0,T;V)\big)$$

Alors il existe une et une seule solution $u \in L^\circ\big(\Omega; L^p(0,T;V) \cap C(0,T;H)\big)$ *de l'équation* (3.12).

Démonstration : L'existence résulte de la mesurabilité de la composée des deux applications mesurables :

$$\omega \longrightarrow \big(u_0(\omega), f_1(\omega), f_2(\omega), g(\omega)\big)$$

et $(u_0, f_1, f_2, g) \longrightarrow u$.

L'unicité découle de la monotonie de l'opérateur $A_g(\cdot)$. Soient en effet deux solutions u_1 et u_2. Alors :

$$(3.13) \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\big(u_1(t) - u_2(t)\big) + A_g\big(t, u_1(t)\big) - A_g\big(t, u_2(t)\big) = 0 \text{ p.p.t, p.s.} \\ u_1(0) - u_2(0) = 0 \text{ p.s.} \end{cases}$$

Appliquons le Lemme 2.2. à $u_1 - u_2$:

$$(3.14)\qquad |u_1(t)-u_2(t)|^2 + 2\int_0^t < A_g(u_1)-A_g(u_2),\ u_1-u_2 > = 0 \quad \forall t,\ \text{p.s.}$$

Donc :

$$u_1(t) = u_2(t) \quad \forall t,\ \text{p.s.}$$

Et les deux processus étant continus à valeurs dans H, ils sont indistinguables. On peut compléter le résultat du Théorème 3.2 grâce au résultat suivant :

LEMME 3.4. *Si* $u \in L^0(\Omega;L^p(0,T;V))$, *alors*

$$A(u) \in L^0(\Omega;L^{p'}(0,T;V'))$$

Démonstration : Il nous faut montrer que l'application

$$u \longrightarrow A(u)$$

est mesurable de $L^p(0,T;V)$ dans $L^{p'}(0,T;V')$. Mais l'espace $L^{p'}(0,T;V')$ étant séparable, il nous suffit, grâce au Théorème de Pettis de montrer que cette application est mesurable de $L^p(0,T;V)$ dans $L^{p'}(0,T;V')$ faible.

Le résultat se déduit donc du :

LEMME 3.5. *L'application* $u \longrightarrow A(u)$ *est continue de* $L^p(0,T;V)$ *dans* $L^{p'}(0,T;V')$ *faible.*

Démonstration : Soit $u_n \longrightarrow u$ dans $L^p(0,T;V)$. Alors, grâce à l'hypothèse (1.2), la suite $A(u_n)$ reste dans un borné de $L^{p'}(0,T;V')$. On peut donc, d'après le Lemme 3.2, extraire de $A(u_n)$ une sous-suite telle que :

$$A(u_\mu) \longrightarrow \chi \text{ dans } L^{p'}(0,T;V') \text{ faible}$$

Mais :

$$u_\mu \longrightarrow u \text{ dans } L^p(0,T;V)$$

Soit $v \in L^p(0,T;V)$. Posons :

$$X_\mu = \int_0^T < A(u_\mu)-A(v),u_\mu-v > dt$$

Grâce à l'Hypothèse de monotonie (1.4),

$$X_\mu \geqslant 0$$

Mais :

$$\lim_{\mu\to\infty} X_\mu = \int_0^T <\chi - A(v),u-v > dt$$

Donc :

$$(3.15) \qquad \int_0^T < \chi - A(v), u-v > dt \geqslant 0, \quad \forall v \in L^p(0,T;V)$$

Posons :

$$v = u - \lambda w, \ \lambda > 0, \ w \in L^p(0,T;V),$$

et divisons l'inégalité (3.15) par λ :

$$(3.16) \qquad \int_0^T < \chi - A(u-\lambda w), w > dt \geqslant 0$$

Grâce à l'Hypothèse (1.1), on peut faire tendre λ vers zéro dans (3.16), d'où :

$$(3.17) \qquad \int_0^T < \chi - A(u), w > dt \geqslant 0$$

L'inégalité (3.17) étant vraie $\forall w \in L^p(0,T;V)$,

$$\chi = A(u)$$

Mais alors toutes les sous-suites convergentes extraites de la suite $\{A(u_n)\}$ ont même limite, et donc :

$$A(u_n) \longrightarrow A(u) \text{ dans } L^{p'}(0,T;V') \text{ faible}$$ ▫

Remarque 3.1. Le résultat énoncé dans la Remarque 1.1 se démontre de façon analogue au Lemme 3.5. ▫

Nous allons montrer maintenant que si, dans le Théorème 3.2, les données sont non anticipatives, la solution l'est aussi.

Etablissons tout d'abord le :

LEMME 3.6. *Soit* X *un espace de Banach séparable, et* $q \in [1;+\infty[$.

adapté

Si $v \in L^\circ(\Omega; L^q(0,T;X))$, *et si* v *est non anticipatif* [*au sens de la Définition* 3.9 *de la* Ière *Partie*], *alors* $\forall t \in [0,T]$;

$$v 1_{[0,t]} \in L^\circ(\Omega, \mathcal{F}_t, P; L^q(0,t;X))$$

Démonstration : D'après le Théorème de PETTIS [Théorème 1.1. de la Ière Partie] , il suffit de montrer que $\forall t \in [0,T]$, $\forall \theta \in L^{q'}(0,t,X')$ [où $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$] , la v.a. :

$$\int_0^t < v(s), \theta(s) > ds$$

est $\mathcal{F}_t$ mesurable.

On est donc ramené à démontrer la propriété suivante :

"Si $u \in L^{\circ}(\Omega;L^1(0,T))$, et si u est non anticipatif, alors le processus :

$U(t) = \int_0^t u(s)ds$, qui est défini à l'indistinguabilité près, est adapté".

Remarquons tout d'abord qu'il existe nécessairement un représentant $\overline{u}$ de u, qui soit $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(0,T)$ mesurable, et $\mathcal{F}_t$ mesurable p.p.t. L'ensemble négligeable des t pour lesquels $\overline{u}(t)$ n'est pas $\mathcal{F}_t$ mesurable peut être inclu dans un borélien négligeable N.

Donc le processus $\overline{\overline{u}}(t)$ défini par :

$$\overline{\overline{u}}(t) = \overline{u}(t) 1_{N^c}$$

est un représentant de u qui est $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(0,T)$ mesurable, et adapté [i.e. $\overline{\overline{u}}(t)$ est $\mathcal{F}_t$ mesurable, $\forall t \in [0,T]$].

Mais alors, d'après MEYER [1], $\exists \overline{\overline{\overline{u}}}$, modification de $\overline{\overline{u}}$ [donc autre représentant de la classe u], qui soit progressivement mesurable, i.e. tel que :

$$\forall t \in [0,T], \ \overline{\overline{\overline{u}}} 1_{[0,t]} \text{ est } \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}(0,t) \text{ mesurable}$$

Donc :

$$\forall t \in [0,T], \ \int_0^t \overline{\overline{\overline{u}}}(s)ds \text{ est } \mathcal{F}_t \text{ mesurable} \qquad \blacksquare$$

On déduit alors du Théorème 3.2 le :

<u>COROLLAIRE</u> : Supposons, outre les hypothèses du Théorème 3.2, que u_0, f_1, f_2 et g sont non-anticipatifs.

Alors la solution u de l'équation (3.12) est un processus bien-mesurable à valeurs dans H.

<u>Démonstration</u> : Etant donné $t \in [0,T]$, considérons les restrictions à $]0,t[$ de f_1, f_2 et g [que nous noterons encore f_1, f_2 et g], et étudions l'équation (3.12) sur l'intervalle $[0,t]$.

D'après le Lemme 3.6,

$$\begin{aligned}
u &\in L^{\circ}(\Omega,\mathcal{F}_t,P;H) \\
f &\in L^{\circ}(\Omega,\mathcal{F}_t,P;L^1(0,t;H)) \\
f &\in L^{\circ}(\Omega,\mathcal{F}_t,P;L^{p'}(0,t;V')) \\
g &\in L^{\circ}(\Omega,\mathcal{F}_t,P;L^{p}(0,t;V))
\end{aligned}$$

Le raisonnement fait au Théorème 3.2 permet d'affirmer que :

$$u \in L^{\circ}(\Omega,\mathcal{F}_t,P;C(0,t;H)). \qquad \blacksquare$$

Chapitre 2

CALCUL DIFFERENTIEL STOCHASTIQUE ET EGALITE DE L'ENERGIE

§0. INTRODUCTION.

L'étude des équations aux dérivées partielles stochastiques - dans la formulation abstraite variationnelle que nous avons choisie - fait apparaître des processus u(t) du type suivant.

(0.1) $$u(\cdot) \in L^{\circ}\big(\Omega;L^{p}(0,T;V)\big)$$

(0.2) $$u(t) = u_0 + \int_0^t v(s)ds + M(t)$$

où

(0.3) $$u_0 \in L^{\circ}(\Omega,\mathcal{F}_0,P;H)$$

(0.4) $$v \in L^{\circ}\big(\Omega;L^{1}(0,T;H)\big) + L^{\circ}\big(\Omega;L^{p'}(0,T;V')\big)$$
non anticipatif

(0.5) $$M \in \mathcal{M}^2_{loc}\,(0,T;H)$$

Remarquons qu'un tel processus u(t) n'est pas une semimartingale à valeurs dans H. En effet, le processus $\int_0^t v(s)ds$ est à variations bornées à valeurs dans V' (et non H).

Le but principal de ce Chapitre est de montrer qu'un tel processus u est continu à valeurs dans H, et qu'il se prête à une formule de Ito pour certaines fonctionnelles ϕ, en particulier pour la fonctionnelle $\phi(u) = |u|^2_H$.

Nous aurons besoin, pour établir ces résultats - contrairement au cas déterministe - d'étudier l'équation :

(0.6) $$\begin{aligned} du(t) + A\big(t,u(t)\big)dt &= f(t)dt + dM(t), \text{ p.p.t} \\ u(0) &= u_0 \end{aligned}$$

§1. CAS D'UNE MARTINGALE A VALEURS DANS V.

Nous allons supposer ici que la martingale locale $M \in \mathcal{M}^2_{loc}\,(0,T;H)$ vérifie en outre :

(1.1) $$M \in L^{\circ}\big(\Omega;L^{p}(0,T;V)\big)$$

Alors M est non anticipatif à valeurs dans V. En effet, p.p.t, l'application:

$$\omega \longrightarrow M(t,\omega)$$

est à valeurs dans V, et $\mathcal{F}_t$ mesurable à valeurs dans H. Elle est donc mesurable à valeurs dans V, d'après le résultat suivant (cf. VIOT [2]).

LEMME 1.1. *La tribu borélienne de* V [*resp.* H] *coïncide avec la trace sur* V [*resp.* H] *de la tribu borélienne de* H [*resp.* V']. ■

Remarque : La démonstration du Lemme 1.1 utilise le fait que V [resp. H] est un espace polonais, donc en particulier qu'il est séparable.

Nous allons maintenant établir un premier résultat.

LEMME 1.2. *Si le triplet* (V,V',p) *est tel qu'il existe un opérateur* A *de* V *dans* V' *satisfaisant les Hypothèses* (1.1) ...(1.4) *du Chapitre* 1, *alors sous les Hypothèses* (0.1), (0.2), (0.3), (0.4), (0.5) *et* (1.1);

(1.3) $u \in C(0,T;H)$ p.s., *et* $u(t)$ *est bien mesurable à valeurs dans* H.

(1.4) $$\begin{cases} |u(t)|^2 = |u_0|^2 + 2\int_0^t < v(s),u(s) > ds + 2\int_0^t (u(s),dM(s)) + \\ \qquad + \operatorname{Tr} \ll M \gg_t, \quad \forall t \in [0,T], \text{ p.s.} \end{cases}$$

Démonstration. On pose : $\tilde{u}(t) = u(t)-M(t) \in L^p(0,T;V)$ p.s. alors :

$$\frac{d\tilde{u}}{dt}(t) = v(t) \in L^1(0,T;H) + L^{p'}(0,T;V')\text{p.s.}$$

On peut donc appliquer le Théorème 2.2. du Chapitre 1, d'où :

(1.5) $$\tilde{u}(t) \in C(0,T;H) \text{ p.s.}$$

(1.6) $$|\tilde{u}(t)|^2 = |u_0|^2 + 2\int_0^t < u(s),v(s) > ds, \quad \forall t \in [0,T]$$

On déduit de (1.5) :

(1.7) $$u \in C(0,T;H) \text{ p.s.}$$

En effet :

$$u(t) = \tilde{u}(t) + M(t)$$

Grâce à (0.2), $\forall t \in [0,T]$ $u(t)$ est $\mathcal{F}_t$ mesurable à valeurs dans V', donc aussi à valeurs dans H, grâce à (1.7) et au Lemme 1.1. D'où u est bien mesurable à valeurs dans H.

Il nous reste à établir (1.4). Pour cela, nous utiliserons le :

LEMME 1.3. *Soit* $M \in \mathcal{M}^2_{loc}(0,T;H)$, *qui vérifie* (1.1).

Soit u *un processus bien mesurable à valeurs dans* H, *qui vérifie :*

(i) $u \in C(0,T;H)$ p.s.

(ii) $\frac{du}{dt} \in L^{p'}(0,T;V') + L^1(0,T;H)$ p.s.

Alors $\forall t \in [0,T]$,

$$(1.8) \qquad \left(u(t),M(t)\right) = \int_0^t \left(u(s),dM(s)\right) + \int_0^t < M(s),\frac{du}{dt}(s) > ds$$ ∎

Admettons provisoirement le Lemme 1.3. Alors, on tire de (1.6) :

$$(1.9) \qquad |u(t)|^2 - \left(\tilde{u}(t),M(t)\right) - |M(t)|^2 = |u_0|^2 + 2\int_0^t < u(s)-M(s),v(s) > ds$$

D'après le Lemme 1.3,

$$(1.10) \qquad \left(\tilde{u}(t),M(t)\right) = \int_0^t \left(u(s)-M(s),dM(s)\right) + \int_0^t < M(s),v(s) > ds$$

D'après l'Exemple 4.1 de la Ière Partie :

$$(1.11) \qquad |M(t)|^2 = 2\int_0^t \left(M(s),dM(s)\right) + \mathrm{Tr} \ll M \gg_t$$

Et (1.4) découle aisément de (1.9), (1.10) et (1.11). ∎

Démonstration du Lemme 1.3.

On pose :

$$(1.12) \qquad u_n(t) = n\int_{t-\frac{1}{n}}^t u(s)ds,\ t \in [0,T],$$

où $u(s) = 0$ si $s < 0$.

$u_n \in C^1(0,T;H)$ p.s., donc en particulier u_n est à variations bornées à valeurs dans H, et on déduit de la formule de Ito [Théorème 4.1 de la Ière Partie]:

$$(1.13) \qquad \left(u_n(t),M(t)\right) = \int_0^t \left(u_n(s),dM(s)\right) + \int_0^t < M(s), \frac{du_n}{dt}(s) > ds$$

Or :

$$\frac{du_n}{dt} = n\int_{t-\frac{1}{n}}^t \frac{du}{dt}(s)ds,\ t \in [0,T],$$

où $\frac{du}{dt}(s) = 0$ si $s < 0$.

On a les convergences :

(1.14) $$u_n \to u \text{ dans } C(0,T;H) \quad \text{p.s.}$$

(1.15) $$\frac{du_n}{dt} \to \frac{du}{dt} \text{ dans } L^1(0,T;H) + L^{p'}(0,T;V') \quad \text{p.s.}$$

(1.14) est trivial. (1.15) résulte du :

LEMME 1.4. *Soit* X *un espace de Banach, et* q *un réel tel que*

$$1 \leqslant q < +\infty.$$

Alors la suite d'opérateurs P_n *définis par* (1.12) *converge fortement vers l'identité dans* $\mathcal{L}\big(L^p(0,T;X)\big)$, *i.e.* :

$$\forall v \in L^p(0,T;X),\ P_n v \to v \text{ dans } L^p(0,T;X).$$ ∎

Admettons provisoirement le Lemme 1.4, (1.14) et (1.15) permettent de passer à la limite dans la relation (1.13). En particulier

$$\int_0^t (u_n, dM) \to \int_0^t (u, dM) \text{ en probabilité,}$$

grâce au Théorème 3.4 de la Ière Partie. ∎

Démonstration du Lemme 1.4.

L'opérateur P_n défini par (1.12) est évidemment linéaire. Montrons qu'il est continu, de norme 1, de $L^q(0,T;X)$ dans lui-même.

$$\begin{aligned}
\| P_n v \|^q_{L^q(0,T;X)} &= n^q \int_0^T dt \left\| \int_{t-\frac{1}{n}}^t v(s)ds \right\|^q \\
&\leqslant n^q \int_0^T dt \left[\left(\frac{1}{n}\right)^{q/q'} \int_{t-\frac{1}{n}}^t \| v(s) \|^q ds \right] \\
&\leqslant n \int_0^T \int_{-\frac{1}{n}}^0 \| v(t+\sigma) \|^q dt\, d\sigma \\
&\leqslant \int_0^T \| v(t) \|^q d\sigma
\end{aligned}$$

De plus, $\forall v \in C(0,T;X)$, sous ensemble dense de $L^q(0,T;X)$,

$$P_n v \to v \text{ dans } L^q(0,T;X)$$

Le Lemme 1.4 découle alors du Théorème d'Ascoli. ∎

Remarque 1.1 : L'Hypothèse concernant le triplet (V,V',p) faite au Lemme 1.2 était nécessaire pour pouvoir appliquer le Théorème 2.2 du Chapitre 1. On aurait pu s'en passer en faisant des hypothèses un peu plus restrictives sur u ou v, pour pouvoir appliquer le Lemme 2.1 ou 2.2 du Chapitre 1. Pour une discussion de cette hypothèse, voir plus loin au §3.

§2. ETUDE D'UNE EQUATION D'EVOLUTION STOCHASTIQUE.

Pour étendre le Lemme 1.2 au cas où l'hypothèse (1.1) n'est plus vérifiée, nous aurons besoin de résultats sur l'équation :

$$(2.1) \quad \begin{cases} du(t) + A\big(t,u(t)\big)dt = f(t)dt + dM(t), \ t \in [0,T] \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Soit $A(t,\cdot)$, $t \in \,]0,T[$, une famille d'opérateurs de V dans V', définis p.p. t , qui vérifie les hypothèses (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) et (1.5) du Chapitre 1.

Soient :

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t)$$

où :

(2.2) $\quad f_1 \in L^2\big(\Omega;L^1(0,T;H)\big)$, non anticipatif

(2.3) $\quad f_2 \in L^{p'}(\Omega\times]0,T[\,;V')$, non anticipatif

(2.4) $\quad M \in \mathcal{M}^2(0,T;H)$

(2.5) $\quad u_0 \in L^2(\Omega,\mathcal{F}_0,P;H)$

Etablissons tout d'abord le :

LEMME 2.1. *Supposons, outre les hypothèses ci-dessus, que l'hypothèse* (1.1) *est vérifiée.*

Alors l'équation (2.1) *possède une solution unique :*

$$u \in L^p(\Omega\times]0,T[\,;V) \cap L^2\big(\Omega;C(0,T;H)\big),$$

processus bien mesurable à valeurs dans H.

Démonstration. D'après le corollaire du Théorème 3.2 du Chapitre 1, l'équation:

$$(2.6)\qquad \begin{cases} \frac{d}{dt}\tilde{u}(t) + A\big(t,\tilde{u}(t)+M(t)\big) = f(t) \\ \tilde{u}(0) = u_0 \end{cases}$$

a une solution unique :

$$\tilde{u} \in L^{\circ}\big(\Omega;L^p(0,T;V) \cap C(0,T;H)\big)$$

où $\tilde{u}$ est bien mesurable à valeurs dans H.

Il en résulte que :

$$u(t) = \tilde{u}(t) + M(t)$$

définit l'unique solution de l'équation (2.1) dans l'espace $L^{\circ}\big(\Omega;L^p(0,T;V) \cap C(0,T;H)\big)$. De plus, u est bien-mesurable à valeurs dans H.

Pour pouvoir appliquer le Lemme 1.2 à u(t), montrons le :

LEMME 2.2. *Si* $u \in L^{\circ}\big(\Omega;L^p(0,T;V) \cap C(0,T;H)\big)$ *est bien mesurable à valeurs dans* H, *alors* A(u) *est non anticipatif comme élément de* $L^{\circ}\big(\Omega;L^{p'}(0,T;V')\big)$.

Démonstration. Par un raisonnement identique à celui que nous avons fait au §1 pour la martingale M, on déduit des hypothèses que u est non anticipatif comme élément de $L^{\circ}\big(\Omega;L^p(0,T;V)\big)$.

Donc, u(t) est $\mathcal{F}_t$ mesurable à valeurs dans V, p.p.t. Mais [cf. Remarque 1.1 du Chapitre 1], p.p.t, $v \to A(t,v)$ est continue de V dans V' faible, et donc (puisque V' est séparable), mesurable de V dans V', d'après le théorème de Pettis. D'où $A\big(t,u(t)\big)$ est $\mathcal{F}_t$ mesurable à valeurs dans V', p.p.t. ∎

Appliquons donc le Lemme 1.2 à u(t) :

$$(2.7)\qquad \begin{cases} |u(t)|^2 + 2\int_0^t < A\big(s,u(s)\big),u(s) > ds = |u_0|^2 + 2\int_0^t < f(s),u(s) > ds \\ \qquad + 2\int_0^t < u(s),dM(s) > ds + \mathrm{Tr} \ll M \gg_t \end{cases}$$

D'où :

$$E\{\sup_{t\leq T}\Big[|u(t)|^2 + 2\int_0^t < A\big(s,u(s)\big),u(s) > ds\Big]\} \leq E(|u_0|^2) +$$

$$+ 2E\int_0^T| < f(t),u(t) >| dt + 2E\{\sup_{\leq}\Big|\int_0^t\big(u(s),dM(s)\big)\Big|\} + E\big(|M(T)|^2\big)$$

$$(2.8)\quad \frac{1}{2} E\{\sup_{t\leq T}|u(t)|^2\} + E\int_0^T < A\big(t,u(t)\big),u(t) > dt \leq E\big(|u_0|^2\big) +$$

$$+ 2E\int_0^T| < f(t),u(t) >| dt + 2E\{\sup_{t\leq T}\Big|\int_0^t\big(u(s),dM(s)\big)\Big|\} + E\big(|M(T)|^2\big)$$

Utilisant la coercivité de A, on tire de (2.8) :

$$(2.9)\quad \frac{1}{2} E\{\sup_{t\leq T}|u(t)|^2\} + \alpha\, E\int_0^T \|u(t)\|^p dt \leq E\big(|u_0|^2\big) +$$

$$+ 2E\int_0^T| < f(t),u(t) >| dt + 2E\{\sup_{t\leq T}\Big|\int_0^t\big(u(s),dM(s)\big)\Big|\} + E\big(|M(T)|^2\big)$$

On déduit des inégalités de Hölder et de Young :

$$(2.10)\quad 2E\int_0^T| < f(t),u(t) >| dt \leq 2E\int_0^T|\big(f_1(t),u(t)\big)|dt + 2E\int_0^T| < f_2(t),u(t) >| dt$$

$$+ \frac{1}{6} E\big(\sup_{t\leq T}|u(t)|^2\big) + \frac{C^p}{p} E\int_0^T \|u(t)\|^p dt +$$

$$+ 6E\Big|\Big(\int_0^T|f(t)|dt\Big)^2\Big| + \frac{1}{p'C^{p'}} E\int_0^T\|f_2(t)\|_*^{p'}dt$$

Par ailleurs, on déduit du Théorème 1.3 de la Ière Partie :

$$(2.11)\quad 2E\big(\sup_{t\ T}\Big|\int_0^t\big(u(s),dM(s)\big)\Big|\big) \leq 6E\Big|\Big(\int_0^T|u(t)|^2\, d(\mathrm{Tr} \ll M \gg_t)\Big)^{\frac{1}{2}}\Big|$$

$$\leq 6E\Big|\sup_{t\leq T}|u(t)| \times \big(\mathrm{Tr} \ll M \gg_T\big)^{\frac{1}{2}}\Big|$$

$$\leq \frac{1}{6}E\big(\sup_{t\leq T}|u(t)|^2\big) + 54E\big(|M(T)|^2\big)$$

En regroupant (2.9), (2.10) [où l'on choisit C tel que $\frac{C^p}{p} = \frac{\alpha}{2}$, et l'on note $\theta = (p'C^{p'})^{-1}$], et (2.11), on obtient :

$$(2.12)\quad \frac{1}{6}E\big(\sup_{t\leq T}|u(t)|^2\big) + \frac{\alpha}{2}E\int_0 \|u(t)\|^p dt \leq E(|u_0|^2) + 6E\Big[\Big(\int_0^T|f_1(t)|dt\Big)^2\Big] +$$

$$+ \theta\; E\int_0^T\|f_2(t)\|_*^{p'}dt + 55E(|M(T)|^2)$$

Il découle de (2.12) et de ce qui précède que :

$$u \in L^p(\Omega\times]0,T[;V) \cap L^2(\Omega;C(0,T;H)) \qquad \blacksquare$$

Nous pouvons maintenant montrer le

THEOREME 2.1. *Sous les hypothèses* (2.2), (2.3), (2.4) *et* (2.5), *et étant donné une famille d'opérateurs de* V *dans* V' $A(t,\cdot)$, $t \in]0,T[$, *qui vérifie les hypothèses* (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) *et* (1.5) *du Chapitre* 1, *l'équation* (2.1) *a une solution unique :*

$$u \in L^p(\Omega\times]0,T[;V)$$

telle que en outre $u \in L^2(\Omega;C(0,T;H))$, *et* $u(t)$ *est un processus bien mesurable à valeurs dans* H, *qui vérifie :*

$$(2.13)\quad |u(t)|^2 + 2\int_0^t < A(s,u(s)),u(s) > ds = |u_0|^2 +$$

$$+ 2\int_0^t < f(s),u(s) > ds + 2\int_0^t (u(s),dM(s)) + \mathrm{Tr} \ll M \gg_t$$

$$\forall t \in [0,T], \text{ p.s.}$$

Démonstration :

a/ Unicité : Soient u et v deux éléments de $L^p(\Omega\times]0,T[;V)$, solutions de l'équation (2.1). Alors :

$$\begin{cases} d(u(t)-v(t)) + [A(t,u(t))-A(t,v(t))]dt = 0 \\ u(0) - v(0) = 0 \end{cases}$$

On peut alors appliquer le Lemme 2.1 du Chapitre 1 à $u(t)-v(t)$, d'où :

$$|u(t)-v(t)|^2 + 2\int_0^t < A(s,u(s)) - A(s,v(s)),u(s) - v(s) > ds = 0$$

Donc, grâce à l'hypothèse de monotonie sur A,

$$|u(t)-v(t)|^2 \leq 0, \ \forall t \in [0,T], \text{ p.s.}$$

et u et v, en tant que processus à valeurs dans H, sont indistinguables.

b/ Existence : Soit M^n une suite de martingales qui vérifie :

$$(2.14)\qquad M^n \in \mathcal{M}^2(0,T;H) \cap L^\infty(\Omega;L^p(0,T;V))$$

$$(2.15)\qquad M^n \to M \text{ dans } \mathcal{M}^2(0,T;H)$$

Une telle suite existe, on peut en particulier choisir :

$$M^n(t) = \sum_{i=1}^{n} \big(M(t),e_i\big)e_i$$

où $\{e_i\}$ est une base orthonormée de H formée d'éléments de V.

D'après le Lemme 2.1, il existe $u^n \in L^p(\Omega\times]0,T[\,;V) \cap L^2(\Omega;C(0,T;H))$ processus bien mesurable à valeurs dans H, solution de :

$$(2.16)\quad \begin{cases} du^n(t) + A\big(t,u^n(t)\big)dt = f(t)dt + dM^n(t) \\ u^n(0) = u_0 \end{cases}$$

Nous allons maintenant extraire de la suite u^n une sous-suite u^μ qui tende vers une limite u, et nous montrerons que u est solution de l'équation (2.1) (on pourra alors en déduire, grâce à l'unicité, que toute la suite u^n converge vers u).

Montrons tout d'abord le :

LEMME 2.3. *La suite* u^n *reste dans un borné de* $L^p(\Omega\times]0,T[\,,V)$. $A(u^n)$ *reste dans un borné de* $L^{p'}(\Omega\times]0,T[\,;V')$.

Démonstration. On tire de l'inégalité (2.12), appliquée à u^n

$$(2.17)\quad \begin{cases} \frac{\alpha}{2} E\int_0^T \|u_n(t)\|^p dt \leqslant E(|u_0|^2) + 6E\left(\left(\int_0^T |f_1(t)|dt\right)^2\right) + \\ \qquad + \theta E\int_0^T \|f_2(t)\|^{p'}dt + 55E\big(|M^n(T)|^2\big) \end{cases}$$

(2.17), joint à (2.15), démontre la première partie du Lemme. La deuxième partie s'en déduit grâce à l'hypothèse (1.2) du Chapitre 1 :

$$\|A\big(t,u^n(t)\big)\|_* \leqslant \beta \|u^n(t)\|^{p-1} \qquad \blacksquare$$

On peut donc, en utilisant le Lemme 3.3 du Chapitre 1, extraire de la suite u^n une sous-suite u^μ telle que :

(2.18) $\quad u^\mu \to u$ dans $L^p(\Omega\times]0,T[\,;V)$ faible

(2.19) $\quad A(u^\mu) \to \chi$ dans $L^{p'}(\Omega\times]0,T[\,;V')$ faible

LEMME 2.4. $u^\mu \to u$ *dans* $L^2(\Omega;C(0,T;H))$.

Démonstration : Il nous suffit de prouver que la suite u^μ est de Cauchy dans $L^2(\Omega;C(0,T;H))$.

$$d(u^\mu(t)-u^\nu(t)) + \Big[A(t,u^\mu(t))-A(t,u^\nu(t))\Big]dt = d(M^\mu(t)-M^\nu(t))$$
$$u^\mu(0) - u^\nu(0) = 0$$

Appliquons le Lemme 1.2 à $u^\mu-u^\nu$:

$$(2.20)' \quad \begin{cases} |u^\mu(t)-u^\nu(t)|^2 + 2\displaystyle\int_0^t < A(u^\mu)-A(u^\nu),u^\mu-u^\nu > ds = \\ \qquad = 2\displaystyle\int_0^t (u^\mu-u^\nu,d(M^\mu-M^\nu)) + Tr \ll M^\mu-M^\nu \gg_t \end{cases}$$

Utilisant l'hypothèse de monotonie faite sur A, on tire de (2.20) :

$$E\Big[\sup_{t\leq T}|u^\mu(t)-u^\nu(t)|^2\Big] \leq 2E\Big[\sup_{t\leq T}\Big|\int_0 (u^\mu-u^\nu,d(M^\mu-M^\nu))\Big|\Big] + E(|M^\mu(T)-M^\nu(T)|^2)$$

D'où, en utilisant une variante de (2.11) :

$$(2.21) \quad \frac{1}{2}E\Big[\sup_{t\leq T}|u^\mu(t)-u^\nu(t)|^2\Big] \leq 19E(|M^\mu(T)-M^\nu(T)|^2)$$

Le résultat se déduit de (2.15) et (2.21). ▫

On peut alors passer à la limite dans (2.16) :

$$(2.22) \quad \begin{cases} du(t) + \chi(t)dt = f(t)dt + dM(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Pour montrer que u est solution de l'équation (2.1), il nous reste donc à montrer le :

LEMME 2.5. $\chi = A(u)$.

Démonstration : Etant donné $v \in L^p(\Omega\times]0,T[;V)$, posons :

$$X_\mu = E\int_0^T < A(t,u^\mu(t))-A(t,v(t)),u^\mu(t)-v(t) > dt$$

L'hypothèse de monotonie faite sur A nous assure que $X_\mu \geq 0$.

Admettons provisoirement le :

LEMME 2.6. $\forall t \in [0,T]$, $\displaystyle\int_0^t < A(u^\mu),u^\mu > ds \to \int_0^t < \chi,u > ds$ *dans* $L^1(\Omega)$ *faible quand* $\mu \to \infty$. ▫

Nous pouvons passer à la limite dans X_μ, en utilisant (2.18), (2.19) et le Lemme 2.6 :

$$(2.23) \qquad E\int_0^T < \chi(t)-A(t,v(t)), u(t)-v(t) > dt \geqslant 0$$

Dans (2.23), on peut choisir en particulier

$$v(t) = u(t) - \lambda w(t)$$

où

$$\lambda > 0, \; w \in L^p(\Omega\times]0,T[\,;V).$$

$$(2.24) \qquad E\int_0^T < \chi(t)-A(t,u(t)-\lambda w(t)), w(t) > dt \geqslant 0$$

Grâce à l'hypothèse (1.1) du Chapitre 1,

$$< A(t,u(t)- w(t)),w(t) > \longrightarrow A(t,u(t)),w(t) > , \; dt \otimes dP \text{ p.p.}$$

quand $\lambda \to 0$, et l'hypothèse (1.2) du Chapitre 1 nous permet d'utiliser le théorème de convergence dominée de Lebesgue pour passer à la limite dans (2.24) :

$$(2.25) \qquad E\int_0^T < \chi(t)-A(t,u(t)),w(t) > dt \geqslant 0$$

L'inégalité (2.25) étant vraie $\forall w \in L^p(\Omega\times]0,T[\,;V)$,

$$\chi(t) = A(t,u(t)) \text{ p.p.t, p.s.} \qquad \blacksquare$$

<u>Démonstration du Lemme 2.6</u> : Nous suivrons une variante d'une méthode utilisée dans BENSOUSSAN-TEMAN [1].

Fixons $t \in [0,T]$

Il résulte de (2.20), (2.11), (2.15) et (2.21) que

$$(2.26) \qquad E\int_0^t < A(u^\mu)-A(u^\nu), u^\mu-u^\nu > ds \longrightarrow 0$$

Mais :

$$\int_0^t < A(u^\mu)-A(u^\nu), u^\mu-u^\nu > ds \geqslant 0 \text{ p.s.}$$

Donc :

$$\int_0^t < A(u^\mu)-A(u^\nu),u^\mu-u^\nu > ds \longrightarrow 0 \text{ dans } L^1(\Omega)$$

Soit $\phi \in L^\infty(\Omega)$. Alors, $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\mu(\varepsilon)$ et $\nu(\varepsilon)$ tels que, $\forall\mu \geqslant \mu(\varepsilon)$, $\nu \geqslant \nu(\varepsilon)$

$$(2.27) \qquad 0 \leqslant E\Big(\phi\int_0^t < A(u^\mu)-A(u^\nu),u^\mu-u^\nu > ds\Big) \leqslant \varepsilon$$

Fixons $\mu > \mu(\varepsilon)$, et faisons tendre $\nu \to \infty$, on tire de (2.27), en utilisant (2.18) et (2.19) :

$$(2.28)\quad \begin{cases} E\left[\phi\int_0^t\left(< A(u^\mu),u > + < \chi,u^\mu >\right)ds\right] \leqslant \\ \leqslant E\left[\phi\int_0^t < A(u^\mu),u^\mu > ds\right] + \liminf E\left[\phi\int_0^t < A(u^\nu),u^\nu >\right]ds \\ \leqslant E\left[\phi\int_0^t < A(u^\mu),u^\mu > ds\right] + \limsup E\left[\phi\int_0^t < A(u^\nu),u^\nu > ds\right] \leqslant \\ \leqslant \varepsilon + E\left[\phi\int_0^t\left(< A(u^\mu),u > + < \chi,u^\mu >\right)ds\right] \end{cases}$$

Faisons tendre cette fois $\mu \to \infty$ dans (2.28) :

$$(2.29)\quad \begin{cases} 2E\left(\phi\int_0^t < \chi,u > ds\right) \leqslant 2\liminf E\left(\phi\int_0^t < A(u^\mu),u^\mu > ds\right) \leqslant \\ \leqslant 2\limsup E\left(\phi\int_0^t < A(u^\mu),u^\mu > ds\right) \leqslant \\ \leqslant \varepsilon + 2E\left(\phi\int_0^t < \chi,u > ds\right) \end{cases}$$

Le lemme 2.6 découle de ce que (2.29) est vraie $\forall\varepsilon > 0$. ◻

Fin de la démonstration du Théorème 2.1.

En reportant la valeur de χ dans (2.22), on vérifie que u est solution de l'équation (2.1). De plus, le sous-ensemble de $L^2(\Omega;C(0,T;H))$ formé des processus bien mesurables, est un sous-espace vectoriel fermé de $L^2(\Omega;C(0,T;H))$. Donc, grâce au Lemme 2.4, u est bien mesurable à valeurs dans H.

Il nous reste à montrer que u vérifie la relation (2.13).

Il résulte du Lemme 2.3 :

$$|u^\mu(t)|^2 \to |u(t)|^2 \text{ dans } L^1(\Omega)$$

Grâce aux Lemmes 2.4 et 2.5,

$$\int_0^t < A(s,u^\mu(s)),u^\mu(s) > ds \to \int_0^t < A(s,u(s)),u(s) > ds$$

dans $L^1(\Omega)$ faible.

On déduit de (2.18) et du Lemme 2.3 :

$$\int_0^t < f(s),u^\mu(s) > ds \to \int_0 < f(s),u(s) > ds$$

dans $L^1(\Omega)$ faible.

Le lemme 2.4 et (2.15) permettent d'utiliser le Théorème 3.3 de la Ière Partie, d'où :

$$\int_0^t \left(u^\mu(s), dM^\mu(s)\right) \to \int_0^t \left(u(s), dM(s)\right), \text{ dans } L^1(\Omega)$$

Et enfin, grâce à (2.15) :

$$\mathrm{Tr} \ll M^\mu \gg_t \to \mathrm{Tr} \ll M \gg_t \text{ dans } L^1(\Omega).$$

La relation (2.13) est démontrée par passage à la limte sur la relation (1.4), appliquée à u^μ. ∎

Remarque 2.1. Nous avons redémontré le résultat de BENSOUSSAN-TEMAM [1]. Cependant notre méthode, basée sur l'utilisation de l'"égalité de l'énergie stochastique" (égalité du type (2.13)) nous permet d'obtenir une meilleure régularité du processus solution :

$$u \in L^2\left(\Omega; C(0,T;H)\right)$$

Un résultat similaire a été établi par METIVIER-PISTONE [1]. La seconde partie de notre démonstration est très semblable à la leur. Cependant, ils obtiennent l'équivalent de notre Lemme 2.1 par une méthode de discrétisation en espace (méthode de Galerkin), et passage à la limite sur des résultats en dimension finie. Notre démonstration du Lemme 2.1 est au contraire basée sur une extension des résultats sur les équations d'évolution déterministes (en dimension infinie). ∎

Remarque 2.2. Dans le Lemme 2.1, on aurait pu remplacer la martingale M(t) par un processus d'un type plus général, à valeurs dans V. Par contre, dans le Théorème 2.1, le fait que le processus M(t) à valeurs dans H soit une martingale joue un rôle essentiel. ∎

Nous allons maintenant déduire du Théorème 2.1 un autre résultat d'existence, dans le cas où l'on n'a aucune estimation sur les moments des données. Soient :

(2.30) $\quad u_0 \in L^0(\Omega, \mathcal{F}_0, P; H)$

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t), \text{ tels que}$$

(2.31) $\quad f_1 \in L^0\left(\Omega; L^1(0,T;H)\right)$, non anticipatif

(2.32) $\quad f_2 \in L^\circ\left(\Omega;L^{p'}(0,T;V')\right)$, non anticipatif

(2.33) $\quad M \in \mathcal{M}^2_{loc}(0,T;H)$

On a alors le :

THEOREME 2.2. *Sous les hypothèses* (2.30), (2.31), (2.32) *et* (2.33), *et étant donnée une famille d'opérateurs de* V *dans* V', $A(t,\cdot)$, $t \in]0,T[$, *qui vérifie les hypothèses* (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) *et* (1.5) *du Chapitre* 1, *l'équation* :

$$(2.34) \quad \begin{cases} du(t) + A(t,u(t))dt = f(t)dt + dM(t),\ t \in [0,T] \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

a une solution unique :

$$u \in L^\circ\left(\Omega;L^p(0,T;V)\right)$$

qui vérifie en outre :

$$u \in L^\circ\left(\Omega,C(0,T;H)\right),$$

u(t) *est bien mesurable à valeurs dans* H, *et* :

$$(2.35) \quad \begin{cases} |u(t)|^2 + 2\int_0^t < A(s,u(s)),u(s) > ds = |u_0|^2 + \\ \quad + 2\int_0^t < f(s),u(s) > ds + 2\int_0^t u(s),dM(s) \quad + Tr \ll M \gg_t \end{cases}$$

Démonstration : L'unicité se démontre exactement comme pour le Théorème 2.1. Montrons l'existence : Soient :

$$\Omega_n = \{\omega;\ |u_0| \leqslant n\}$$

$$T_n = \inf\{t \leqslant T; |M(t)| > n, \int_0^t |f_1(s)|ds > n,\ \text{ou}\ \int_0^t \|f_2(s)\|^{p'}ds > n\}$$

Posons :

$$u_0^n = 1_{\Omega_n}\ u_0$$

$$f^n(t) = \begin{cases} f(t)\ \text{si}\ t \in [0,Tn] \\ 0\ \text{si}\ t > Tn \end{cases}$$

$$M^n(t) = M(t \wedge Tn)$$

Alors :

$$u_0^n \in L^2(\Omega;H)$$
$$f^n \in L^2\big(\Omega;L^1(0,T;H)\big) + L^{p'}(\Omega\times]0,T[\,;V') \text{ non anticipatif}$$
$$M^n \in \mathcal{M}^2(0,T;H)$$

Donc, d'après le Théorème 2.1,

$$\exists u^n \in L^p(\Omega\times]0,T[\,;V) \text{ unique solution de :}$$

$$(2.36)\qquad \begin{cases} du^n(t) + A\big(t,u^n(t)\big)dt = f^n(t)dt + dM^n(t), \quad t \in [0,T] \\ u^n(0) = u_0^n \end{cases}$$

Remarquons que :

$$u^{n+1}(t,\omega) = u^n(t,\omega),\ \forall(t,\omega) \text{ tel que :}$$
$$\omega \in \Omega_n \text{ et } t \in [0,T_n(\omega)]$$

Donc on peut définir $u(t,\omega)$ par :

$$(2.37)\qquad \begin{cases} \forall n,\ u(t,\omega) = u^n(t,\omega),\ \forall (t,\omega) \text{ tels que :} \\ \omega \in \Omega_n \text{ et } t \in [0,T_n(\omega)] \end{cases}$$

$u(t,\omega)$ est alors défini pour (t,ω) tels que :

$$\omega \in \bigcup_n \Omega_n \text{ et } t \in \bigcup_n [0,T_n(\omega)]$$

Or :

$$P(\bigcup_n \Omega_n) = 1$$

et $\bigcup_n [0,T_n(\omega)] = [0,T]$ p.s.

Fixons ω en dehors de l'ensemble de mesure nulle $\{\Omega - \bigcup_n \Omega_n\} \cup \{\bigcup_n [0,T_n(\omega)] \neq [0,T]\}$

Pour n assez grand, $\omega \in \Omega_n$ et : $[0,T_n(\omega)] = [0,T]$. D'où :

$$u(\cdot,\omega) = u^n(\cdot,\omega) \in L^p(0,T;V)$$

Donc finalement :

$$u^n \rightarrow u \text{ dans } L^p(0,T;V) \quad \text{p.s.}$$

d'où :

$$u \in L^0\big(\Omega;L^p(0,T;V)\big)$$

Et il résulte d'un passage à la limite élémentaire sur (2.36) que u est solution de l'équation (2.34).

De même,

$$u^n \rightarrow u \text{ dans } C(0,T;H) \text{ p.s.,}$$

et (2.35) s'obtient en passant à la limite sur l'égalité :

$$|u^n(t)|^2 + 2\int_0^t < A\big(s,u^n(s)\big), u^n(s) > ds = |u_0^n|^2 +$$

$$+ 2\int_0^t < f^n(s),u^n(s) > ds + 2\int_0^t \big(u^n(s),dM^n(s)\big) + \mathrm{Tr} \ll M^n \gg_t \quad \blacksquare$$

Exemple 2.1. Soit $\mathcal{O}$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. On notera :

$$W^{1,p}(\mathcal{O}) = \{u \in L^p(\mathcal{O}) \text{ t.q. } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\mathcal{O}), \quad i = 1, \ldots, n\},$$

où $p \geq 2$. Soit alors $W_0^{1,p}(\mathcal{O})$ la fermeture de $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ dans $W^{1,p}(\mathcal{O})$.

Posons $V = W_0^{1,p}(\mathcal{O})$. C'est un espace de Banach pour la norme :

$$\| u \|_V = \left(\sum_{i=1}^n \int \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right|^p dx\right)^{1/p}$$

Soit alors A l'opérateur de $W_0^{1,p}(\mathcal{O})$ dans son dual, défini par

$$< A(u),v > = \sum_{i=1}^n \int \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)dx$$

L'opérateur A vérifie les hypothèses du Théorème 2.2, d'après LIONS [1].

Soient $H = L^2(\mathcal{O})$, u_0 et M donnés comme en (2.30), (2.33).

Soit par exemple :

$$f \in L^{p'}(]0,T[\times \mathcal{O}) \text{ p.s., f non anticipatif.}$$

Alors le Théorème 2.2 s'interprète de la façon suivante :

$$\exists u \in L^p\big(0,T;W^{1,p}(\mathcal{O})\big) \cap C\big(0,T;L^2(\mathcal{O})\big) \text{ p.s.,}$$

processus bien mesurable à valeurs dans $L^2(\mathcal{O})$, solution unique de :

$$(2.38\quad \begin{cases} du(t,x) - \displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u(t,x)}{\partial x_i}\right)dt = f(t,x)dt + dM(t,x) \\ \\ u(0,x) = u_0(x),\ u(t,x)\big|_{x\in\partial\mathcal{O}} = 0 \quad \blacksquare \end{cases}$$

§3. EGALITE DE L'ENERGIE STOCHASTIQUE.

Nous allons maintenant déduire des résultats précédents la formule de Ito pour la fonctionnelle qui joue le rôle de l'"énergie" dans les équations paraboliques : $\phi(u) = |u|_H^2$.

Soit $u(t)$ un processus qui vérifie

(3.1) $$u \in L^{\circ}\big(\Omega;L^{p}(0,T;V)\big)$$

(3.2) $$u(t) = u_0 + \int_0^t v(s) + M(t)$$

où

(3.3) $$u_0 \in L^{\circ}(\Omega,\mathcal{F}_0,P;H)$$

(3.4) $$v \in L^{\circ}\big(\Omega;L^{1}(0,T;H)\big) + L^{\circ}\big(\Omega;L^{p'}(0,T;V')\big)\text{, non anticipatif.}$$

(3.5) $$M \in \mathcal{M}^2_{loc}\ (0,T;H)$$

Nous supposerons en outre que le triplet (V,V',p) vérifie :

Hypothèse I : Il existe un opérateur A de V dans V' tel que :

(3.6) $$\exists\alpha > 0 \text{ t.q. } \quad < A(u),u > \geqslant \alpha\| u \|^{p}, \quad \forall u \in V$$

(3.7) $$\exists\beta \text{ t.q. } \quad \| A(u) \|_{*} \leqslant \beta\| u \|^{p-1}, \quad \forall u \in V$$

(3.8) $$< A(u)-A(v),u-v > \geqslant 0, \quad \forall u,v \in V$$

(3.9) $$\lambda \rightarrow < A(u+\lambda v),w > \text{ est continue } \quad \forall u,v,w \in V$$

Remarque 3.1. L'Hypothèse I peut paraître artificielle. Remarquons cependant que dans les exemples, lorsque nous utiliserons l'Egalité de l'Energie, l'opérateur A sera en fait la donnée (qui apparaîtra dans l'équation que nous chercherons à résoudre) et on choisira l'espace V et le nombre p, tels que A vérifie les conditions (3.6), (3.7), (3.8) et (3.9).

On verra cependant au Théorème 3.3. un critère simple qui permet de vérifier l'Hypothèse I. ∎

On a le Théorème :

THEOREME 3.1. *Etant donné un processus* $u(t)$ *qui vérifie* (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) *et* (3.5), *si de plus l'Hypothèse* I *est vérifiée, alors*

$$u \in L^{\circ}\big(\Omega;C(0,T;H)\big)\,,$$

le processus $u(t)$ *est bien mesurable à valeurs dans* H *, et il vérifie*

(3.10) $$\begin{cases} |u(t)|^2 = |u_0|^2 + 2\displaystyle\int_0^t < v(s),u(s) > ds \, + \\ \qquad + 2\displaystyle\int_0^t \big(u(s),dM(s)\big) + \operatorname{Tr} \ll M \gg_t \end{cases}$$

Démonstration. Remarquons que grâce à (3.2), $\forall t \in [0,T]$, $u(t)$ est $\mathcal{F}_t$ mesurable à valeurs dans V' [le fait que $\int_0^t v(s)ds$ est $\mathcal{F}_t$ mesurable à valeurs dans V' résulte du Lemme 3.6 du Chapitre 1].

Mais, d'après (3.1) et le Théorème de Fubini, p.p.t, $u(t)$ est une variable aléatoire à valeurs dans V, et donc d'après le Lemme 1.1, $u(t)$ est p.p.t $\mathcal{F}_t$ mesurable à valeurs dans V. Donc u est non anticipatif comme élément de $L^\circ(\Omega;L^p(0,T;V))$.

On déduit du raisonnement fait au Lemme 2.2 que, si A est un opérateur vérifiant (3.6), (3.7), (3.8) et (3.9), $A(u) \in L^\circ(\Omega;L^{p'}(0,T;V'))$ et est non anticipatif.

On déduit alors du Théorème 2.2 que u est l'unique élément de $L^\circ(\Omega;L^p(0,T;V))$ solution de l'équation :

$$\begin{cases} du(t) + A(u(t))dt = [v(t) + A(u(t))]dt + dM(t), \ t \in [0,T] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad u(0) = u_0 \end{cases}$$

et donc, toujours d'après le Théorème 2.2, $u \in L^\circ(\Omega;C(0,T;H))$ et $u(t)$ est un processus bien mesurable à valeurs dans H qui vérifie :

$$|u(t)|^2 + 2\int_0^t < A(u(s)),u(s) > ds = |u_0|^2 +$$
$$+ 2\int_0^t < v(s) + A(u(s)), u(s) > ds + 2\int_0^t (u(s),dM(s)) + \mathrm{Tr} \ll M \gg_t$$

ce qui démontre (3.10). ∎

On a aussi le Théorème :

THEOREME 3.2. *Supposons, outre les hypothèses du Théorème* 3.1, *que l'on a :*

(3.11) $u \in L^p(\Omega\times]0,T[\,;V)$

(3.12) $u_0 \in L^2(\Omega;H)$

(3.13) $v \in L^2(\Omega;L^1(0,T;H)) + L^{p'}(\Omega\times]0,T[\,;V')$

(3.14) $M \in \mathcal{M}^2(0,T;H)$

Alors :

$$u \in L^2(\Omega;C(0,T;H))$$

et vérifie, en outre (3.10),

(3.15) $E(|u(t)|^2) = E(|u_0|^2) + 2E\int_0^t < v(s),u(s) > ds + E(|M(t)|^2)$

Démonstration : Posons :

$$v = v_1 + v_2 \quad , \text{ où}$$

$$v_1 \in L^2\big(\Omega;L^1(0,T;H)\big)$$

$$v_2 \in L^{p'}(\Omega\times]0,T[\,;V')$$

On tire alors de (3.10) :

$$E\Big(\sup_{t\leq T}|u(t)|^2\Big) \leq E(|u_0|^2) + 2E\int_0^T| < v(t),u(t) > |dt +$$

$$+ 2E\Big(\sup_{t\leq T}\Big|\int_0^t\big(u(s),dM(s)\big)\Big|\Big) + E\big(|M(T)|^2\big)$$

$$\frac{2}{3}E\Big(\sup_{t\leq T}|u(t)|^2\Big) \leq E(|u_0|^2) + 3E\Big(\int_0^T|v_1(t)|dt\Big)^2 +$$

$$+ 2E\int_0^T\|v_2(t)\|_\star\ \|u(t)\|dt + 6E\Big(\sup_{t\leq T}|u(t)|\ \sqrt{Tr \ll M \gg_T}\Big) +$$

$$+ E\big(|M(T)|^2\big)$$

$$(3.16)\quad \begin{cases} \frac{1}{3}E\Big(\sup_{t\leq T}|u(t)|^2\Big) \leq E|u_0|^2 + 3E\Big(\int_0^T|v_1(t)|dt\Big)^2 + \\ \qquad + \frac{2}{p}\ E\int_0^T\|u(t)\|^p dt + \frac{2}{p'}\ E\int_0^T\|v_2(t)\|_\star^{p'}\ dt + 28\ E\big(|M(T)|^2\big) \end{cases}$$

Il résulte de (3.16), et des hypothèses (3.11), (3.12), (3.13) et (3.14) que :

$$u \in L^2\big(\Omega;C(0,T;H)\big)$$

On peut alors prendre l'espérance mathématique dans (3.10), ce qui donne (3.15). [En particulier, $\Big(\int_0^t(u,dM)\Big)_{t\in[0,T]}$ est une martingale d'après le théorème 3.3 de la Ière Partie] $\square$

Nous allons maintenant donner une condition suffisante pour que l'Hypothèse I soit vérifiée.

THEOREME 3.3. *Si l'espace de Banach* V' *est strictement convexe, alors l'Hypothèse* I *est vérifiée,* $\forall p > 1$

Avant de démontrer le Théorème 3.3, introduisons la notion d'application de dualité :

Soit $r \longrightarrow \phi(r)$ une fonction continue monotone strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, qui vérifie :

(3.17) $\qquad \phi(0) = 0$

(3.18) $\qquad \phi(r) \longrightarrow +\infty$ quand $r \longrightarrow +\infty$

On a alors la :

<u>Définition 3.1</u>. Une application $J : V \longrightarrow V'$ est dite application de dualité relative à ϕ si les conditions suivantes sont réalisées :

(3.19) $\qquad < J(u),u > = \| J(u) \|_\star \, \| u \| , \quad \forall u \in V$

(3.20) $\qquad \| J(u) \|_\star = \phi(\| u \|), \quad \forall u \in V$ ▫

Ici, nous nous intéresserons au cas où $\phi(r) = r^{p-1}$, avec $p > 1$. Cette fonction $\phi(\cdot)$ particulière vérifie (3.17) et (3.18).

Donnons deux exemples d'application de dualité relatives à cette fonction ϕ :

<u>Exemple 3.1</u> : Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $V = L^p(\mathcal{O})$, $p > 1$, espace de Banach muni de la norme :

$$\| u \| = \left(\int_{\mathcal{O}} |u(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

Alors l'application $J : L^p(\mathcal{O}) \longrightarrow L^{p'}(\mathcal{O})$ définie par :

$$[J(u)](x) = |u(x)|^{p-2} u(x)$$

vérifie (3.19) et (3.20).

<u>Exemple 3.2</u> : $\mathcal{O}$ désignant un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, soit l'espace de Sobolev $W_0^{1,p}(\mathcal{O})$ défini dans l'Exemple 2.1. Le dual de $W_0^{1,p}(\mathcal{O})$ est $W^{-1,p'}(\mathcal{O})$ [cf. LIONS [2]].

L'application $J : W_0^{1,p}(\mathcal{O}) \longrightarrow W^{-1,p'}(\mathcal{O})$ définie par

$$J(u) = - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$$

vérifie (3.19) et (3.20). ▫

<u>Démonstration du Théorème 3.3</u>. Supposons qu'il existe une application de dualité J, de V, dans V', associée à l'application $\phi(r) = r^{p-1}$. Alors :

$$< J(u), u > = \| u \|^p$$

$$\| J(u) \|_\star = \| u \|^{p-1}$$

et donc J vérifie (3.6) et (3.7).

Le Théorème résulte alors du Lemme suivant (cf. LIONS [1]) :

LEMME 3.1. $\forall F$ *espace de Banach, et* $\forall \phi$ *fonction de* $\mathbb{R}_+$ *dans* $\mathbb{R}_+$ *continue strictement croissante qui vérifie* (3.17) *et* (3.18). *il existe une application de dualité de* F *dans* F', *relative à* ϕ. *Cette application est monotone (i.e. vérifie* (3.8)).

Si F' *est strictement convexe, alors cette application est unique, et elle vérifie la propriété d'hémi-continuité* (3.9) *si* F *est de plus réflexif.* ∎

Le fait de supposer l'espace V' strictement convexe est une restriction nouvelle. Cependant, cette restriction n'est pas très forte. On a en effet le Théorème (cf. BREZIS-CRANDALL-PAZY [1]) :

THEOREME 3.4. *Soit* F *un espace de Banach réflexif de norme* $\| \cdot \|$. *Pour tout* $a > 1$, *il existe une norme* $\| \cdot \|_a$ *sur* F *telle que :*

(i) F *soit strictement convexe ainsi que son dual* F' *(muni de la norme duale* $\| \cdot \|_{a,\star}$ *de* $\| \cdot \|_a$).

$$\text{(ii)} \begin{cases} \frac{1}{a} \| \cdot \|_a \leqslant \| \cdot \| \leqslant a \| \cdot \|_a \\ \frac{1}{a} \| \cdot \|_{a,\star} \leqslant \| \cdot \|_\star \leqslant a \| \cdot \|_a \end{cases}$$

On peut remplacer l'hypothèse de stricte convexité de V' par une hypothèse sur V, qui peut être plus facile à vérifier, l'espace V étant en général plus "concret" que V'.

Définition 3.2. On dit qu'un convexe K d'un espace vectoriel F est lisse (en anglais "smooth") si en tout point de la frontière K il passe au plus un hyperplan d'appui au convexe K.

On dit qu'un espace de Banach F est lisse si sa boule unité est lisse. ∎

Or on a le résultat (cf. KÖTHE [1]) :

LEMME 3.2. *Un espace de Banach réflexif est lisse si et seulement si son dual est strictement convexe.* ▫

Le Théorème 3.3 nous permet donc d'affirmer que l'Hypothèse I est vérifiée pourvu que l'espace de Banach réflexif V soit lisse.

§4. FORMULE DE ITO.

Le Théorème 3.1 établit la formule de Ito pour l'application $\phi : H \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\phi(u) = |u|_H^2$$

Nous allons maintenant généraliser cette formule de calcul différentiel stochastique à une classe plus générale de fonctionnelles.

Soit ϕ une application de H dans $\mathbb{R}$. Soit $u \in H$. Si les dérivées au sens de Fréchet $\phi'(u)$ et $\phi''(u)$ existent, on a :

$$\phi'(u) \in \mathcal{L}(H;\mathbb{R}) \simeq H$$

$\phi''(u)$ est une forme bilinéaire continue symétrique sur H, que nous pouvons identifier à un élément autoadjoint de $\mathcal{L}(H)$. La forme linéaire continue sur $\mathcal{L}^1(H)$ que définit $\phi''(u)$ s'écrit alors [cf. Théorème 2.4 de la Ière Partie] :

$$Q \to \mathrm{Tr}\,[\,\phi''(u) \circ Q\,].$$

On fait les hypothèses suivantes sur ϕ :

$$(4.1)\begin{cases} \text{(i) } \phi \text{ est deux fois dérivable en tout point } u \in H \\ \text{(ii) } \phi(u),\ \phi'(u) \text{ et } \phi''(u) \text{ sont bornés sur les bornés de } H \\ \text{(iii) } u \to \phi(u) \text{ et } u \to \phi'(u) \text{ sont continues de } H \text{ dans } \mathbb{R} \text{ et } H \text{ respectivement.} \\ \text{(iv) } \forall Q \in \mathcal{L}^1(H),\quad u \to \mathrm{Tr}\,[\,\phi''(u) \circ Q] \text{ est continue de } H \text{ dans } \mathbb{R}. \end{cases}$$

[i.e. $u \to \phi''(u)$ est continue de H dans $\mathcal{L}(H)$*faible]

$$(4.2)\begin{cases} \text{La restriction à } V \text{ de l'application} \\ \qquad\qquad u \to \phi'(u) \\ \text{est continue de } V \text{ fort dans } V \text{ faible.} \end{cases}$$

(4.3) $\exists k > 0$ t.q. $\|\phi'(u)\| \leq k\,(1+\|u\|),\quad \forall u \in V$

Montrons tout d'abord que (4.2) et (4.3) entraînent :

LEMME 4.1. *Si* $u \in L^p(0,T;V)$, *alors* $\phi'(u) \in L^p(0,T;V)$. *L'application* $u \to \phi'(u)$ *est continue de* $L^p(0,T;V)$ *dans* $L^p(0,T;V)$ *faible.*

Il en est de même en remplaçant $L^p(0,T;V)$ *par* $L^p(\Omega\times]0,T[;V)$.

Démonstration : V étant séparable, il résulte de (4.2) et du Théorème de Pettis que $u \to \phi(u)$ est une application mesurable de V dans V, et donc si $u(\cdot) \in L^p(0,T;V)$, $t \to \phi(u(t))$ est mesurable à valeurs dans V, donc $\phi(u) \in L^p(0,T;V)$ grâce à (4.3).

Soit $u_n \to u$ dans $L^p(0,T;V)$. D'après (4.3) $\phi(u_n)$ reste dans un borné de $L^p(0,T;V)$. Donc $\exists$ une sous-suite $\phi(u_\mu)$ telle que :

$$\phi(u_\mu) \to v \text{ dans } L^p(0,T;V) \text{ faible}$$

Mais de la suite u_μ on peut extraire une sous suite u_{μ_k} telle que :

$$u_{\mu_k}(t) \to u(t) \text{ dans } V, \text{ p.p.t.}$$

D'où grâce à (4.2),

$$\phi(u_{\mu_k}(t)) \to \phi(u(t)) \text{ dans } V \text{ faible, p.p.t.}$$

Donc nécessairement $v = \phi(u)$, et toutes les sous-suites convergentes de $\phi(u_n)$ ont la même limite, d'où finalement :

$$\phi(u_n) \to \phi(u) \text{ dans } L^p(0,T;V) \text{ faible} \qquad \blacksquare$$

Nous allons remplacer l'Hypothèse I du paragraphe précédent par une Hypothèse un peu plus restrictive.

Hypothèse II : Il existe un opérateur A de V dans V' tel que :

(4.4) $\quad \exists\alpha > 0$ t.q. $\langle A(u),u\rangle \geq \alpha\|u\|^p, \quad \forall u \in V$

(4.5) $\quad \exists\beta$ t.q. $\|A(u)\|_* \leq \beta\|u\|^{p-1}, \quad \forall u \in V$

(4.6) $\quad \langle A(u)-A(v),u-v\rangle \geq 0, \quad \forall u,v \in V$

(4.7) $\quad \lambda \to \langle A(u+\lambda v), w\rangle$ est continue $\forall u,v,w \in V$

(4.8)
$$\left\{\begin{array}{l} \text{Si : (i) } u_n \to u \text{ dans } L^p(\Omega\times]0,T[;V) \text{ faible} \\ \quad\text{(ii) } A(u_n) \to A(u) \text{ dans } L^{p'}(\Omega\times]0,T[;V') \text{ faible} \\ \quad\text{(iii) } E\int_0^T \langle A(u_n),u_n\rangle\,dt \to E\int_0^T \langle A(u),u\rangle\,dt \\ \text{Alors : } \begin{cases} u_n \to u \text{ dans } L^p(\Omega\times]0,T[;V) \text{ fort} \\ A(u_n) \to A(u) \text{ dans } L^{p'}(\Omega\times]0,T[;V') \text{ fort} \end{cases} \end{array}\right. \qquad \blacksquare$$

Rappelons la :

Définition 4.1. On dit qu'un espace de Banach E est uniformément lisse si et seulement si $\forall\varepsilon$, $\exists\rho(\varepsilon)$ tel que $x,y \in E$ avec $\| x \| = 1$ et $\|y\| \leqslant \rho$ entraînent :

$$\| x+y \| + \| x-y \| \leqslant 2 + \varepsilon \|y\| \qquad \blacksquare$$

On a le Lemme (cf. KÖTHE [1]) :

LEMME 4.2. *Un espace de Banach est uniformément lisse (resp. uniformément convexe) si et seulement si son dual fort est uniformément convexe (resp. uniformément lisse).* ■

THEOREME 4.1. *Si* V *est uniformément lisse et uniformément convexe, alors l'Hypothèse* II *est vérifiée.*

Démonstration: D'après la démonstration du Théorème 3.3. l'opérateur de dualité J de V dans V', associé à la fonction r^{p-1}, vérifie (4.4), (4.5), (4.6) et (4.7). Montrons qu'il vérifie de plus (4.8), sous les hypothèses du Théorème.

Si $u \in V$,

$$\begin{aligned} < J(u),u > &= \|u\|^p \\ &= \|J(u)\|_*^{p'} \end{aligned}$$

Donc :

$$E\int_0^T < J(u_n),u_n > dt \to E\int_0^T < J(u),u > dt \tag{4.9}$$

s'écrit des deux façons suivantes :

$$\begin{cases} \|u_n\|^p_{L^p(\Omega\times]0,T[\,;V)} \to \|u\|^p_{L^p(\Omega\times]0,T[\,;V)} \\ \|J(u_n)\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega\times]0,T[\,;V')} \to \|J(u)\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega\times]0,T[\,;V')} \end{cases} \tag{4.10}$$

Or V et V' étant uniformément convexe, $L^p(\Omega\times]0,T[\,;V)$ et $L^{p'}(\Omega\times]0,T[\,;V')$ le sont aussi [ce résultat s'obtient en généralisant la démonstration de l'uniforme convexité des espaces L^p, $p > 1$, cf. KÖTHE [1]].

Mais, dans un espace de Banach uniformément convexe, la convergence faible et la convergence des normes entraînent la convergence forte. Donc J vérifie (4.8). ▪

Etablissons maintenant le :

THEOREME 4.2. *Soit* ϕ *une application de* V *dans* $\mathbb{R}$ *qui vérifie* (4.1), (4.2) *et* (4.3). *Soit* u(t) *un processus qui vérifie* (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) *et* (3.5). *Alors si l'Hypothèse* II *est vérifiée, on a,* $\forall t \in [0,T]$:

$$(4.11)\quad \begin{cases} \phi(u(t)) = \phi(u_0) + \int_0^t < \phi'(u(s)),v(s) > ds + \int_0^t (\phi'(u(s)),dM(s)) + \\ \qquad\qquad + \frac{1}{2}\ \mathrm{Tr} \int_0^t \phi''(u(s))d \ll M \gg_s \end{cases}$$

Démonstration: La démonstration du Théorème 4.2 va se faire en quatre étapes. Rappelons que :

$$u(t) = u_0 + \int_0^t v(s)ds + M(t)$$

On posera :

$$\tilde{u}(t) = u_0 + \int_0^t v(s)ds$$

Etablissons tout d'abord le :

LEMME 4.3. *Si l'on suppose, outre les hypothèses du Théorème* 4.2, *que :*

$$(4.12)\qquad v \in L^1(0,T;H) \quad \text{p.s.}$$

Alors (4.11) *est vérifiée.*

Démonstration : $\tilde{u}(t)$ étant alors un processus à variations bornées à valeurs dans H, on peut appliquer le Théorème 4.1 de la Ière Partie à la fonctionnelle

$$\psi(\tilde{u}(t),M(t)) = \phi(\tilde{u}(t)+M(t)),$$

d'où (4.11). ▪

LEMME 4.4. : *Supposons, outre les hypothèses du Théorème* 4.2, *que :*

$$(4.13)\qquad M \in L^p(0,T;V) \quad \text{p.s.}$$

Alors (4.11) *est vérifiée.*

Démonstration : Grâce à (4.13), $\tilde{u} \in L^p(0,T;V)$ p.s., et $\tilde{u}(t) = u_0 + \int_0^t v(s)ds$, avec $u_0 \in H$ et $v \in L^{p'}(0,T;V') + L^1(0,T;H)$, p.s. Donc, d'après le Théorème 2.2 du Chapitre 1,

$$\tilde{u} \in L^p(0,T;V) \cap C(0,T;H) \text{ p.s.}$$

Soit $\tilde{u}_n \in C^1(0,T;H) \cap L^p(0,T;V)$ p.s. tel que

$$\tilde{u}_n \longrightarrow \tilde{u} \text{ p.s. dans } L^p(0,T;V) \cap C(0,T;H)$$

$$\tilde{u}_n(0) = u_0 \text{ p.s.}$$

$$\frac{d\tilde{u}_n}{dt} \longrightarrow v \text{ p.s. dans } L^{p'}(0,T;V') + L^1(0,T;H)$$

Alors, si :

$$u_n(t) = \tilde{u}_n(t) + M(t)$$

on déduit du Lemme 4.3 que :

$$(4.14) \begin{cases} \phi(u_n(t)) = \phi(u_0) + \int_0^t < \frac{d\tilde{u}_n}{ds}(s), \phi'(u_n(s)) > ds + \\ \qquad + \int_0^t (\phi'(u_n(s)), dM(s)) + \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \int_0^T \phi''(u_n(s)) d \ll M \gg_s \end{cases}$$

Mais on a les convergences :

$$(4.15) \qquad u_n \longrightarrow u \text{ dans } L^p(0,T;V) \cap C(0,T;H) \quad \text{p.s.}$$

$$(4.16) \qquad \frac{d\tilde{u}_n}{dt} \longrightarrow v \text{ dans } L^1(0,T;H) + L^{p'}(0,T;V') \quad \text{p.s.}$$

Il résulte alors de l'hypothèse (4.1) et du Lemme 4.1 :

$$(4.17) \qquad \phi'(u_n) \longrightarrow \phi'(u) \text{ dans } L^p(0,T;V) \text{ faible} \cap C(0,T;H) \quad \text{p.s.}$$

De plus, grâce à (4.1) (iv), on tire de (4.15) :

$$(4.18) \qquad \phi''(u_n(t)) \longrightarrow \phi''(u(t)) \text{ dans } \mathcal{L}(H)^* \text{faible uniformément en } t \in [0,T], \ \text{p.s.}$$

Nous allons maintenant pouvoir passer à la limite dans (4.14). Grâce à (4.15),

$$\phi(u_n(t)) \longrightarrow \phi(u(t)) \text{ p.s.}, \ \forall t \in [0,T]$$

D'après (4.16) et (4.17),

$$\int_0^t < \frac{d\tilde{u}_n}{dt}, \phi'(u_n) > ds \longrightarrow \int_0^t < v, \phi'(u) > ds \quad \text{p.s.}$$

Il résulte de (4.16) et du Théorème 3.4 de la Ière Partie que :

$$\int_0^t (\phi'(u_n),dM) \to \int_0^t (\phi'(u),dM) \quad \text{en probabilité}$$

Il nous reste maintenant, pour terminer la démonstration du Lemme 4.4 à passer à la limite dans le dernier terme de l'égalité (4.14), en utilisant (4.18). Ceci est possible en utilisant le :

LEMME 4.5 : *Soit* $t \to \Lambda_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$, *une suite d'applications continues de* $[0,T]$ *dans* $\mathcal{L}(H)$**faible, telles que :*

$$\Lambda_n(t) \to \Lambda(t) \textit{ dans } \mathcal{L}(H)^*\textit{faible},$$

uniformément en $t \in [0,T]$; et de plus $\|\Lambda_n(t)\| \leq C$, $\|\Lambda(t)\| \leq C$, $\forall t \in [0,T]$.

Alors :

$$\mathrm{Tr}\int_0^t \Lambda_n(s)d \ll M \gg_s \to \mathrm{Tr}\int_0^t \Lambda(s)d \ll M \gg_s \quad \text{p.s.,} \quad \forall t \in [0,T]$$

Démonstration : Soit $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ une base orthonormée de H, et P_μ l'opérateur de projection orthogonale sur $S_p\,[e_1, \ldots, e_\mu]$.

$$\mathrm{Tr}\int_0^t (\Lambda(s)-\Lambda_n(s))d \ll M \gg_s = \mathrm{Tr}\int_0^t (\Lambda(s)-\Lambda_n(s))d(P_\mu \ll M \gg_s P_\mu) +$$

$$+ \mathrm{Tr}\int_0^t (\Lambda(s)-\Lambda_n(s))d \ll (I-P_\mu)M \gg_s$$

or :

$$\left|\mathrm{Tr}\int_0^t (\Lambda(s)-\Lambda_n(s))d \ll (I-P_\mu)M \gg_s\right| \leq 2C \| \ll (I-P_\mu)M \gg_t \|_1$$

$$\forall \varepsilon, \text{ p.s. } \exists \eta(\varepsilon,\omega) \text{ t.q. si } \mu \geq \eta$$

$$2C \| \ll (I-P_\mu)M \gg_t \|_1 \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Fixons $\mu = \eta$

$$\mathrm{Tr}\int_0^t (\Lambda(s)-\Lambda_n(s))d(P_\eta \ll M \gg_s P_\eta) = \mathrm{Tr}\int_0^t P_\eta(\Lambda(s)-\Lambda_n(s))P_\eta \, d \ll M \gg_s$$

Or l'application $\Lambda \to P_\eta \Lambda P_\eta$ est une application compacte de $\mathcal{L}(H)$ dans lui-même. On déduit donc de l'hypothèse du Lemme que :

$$P_\eta(\Lambda(s)-\Lambda_n(s))P_\eta \to 0 \text{ dans } \mathcal{L}(H) \text{ uniformément en } s \in [0,T].$$

Donc p.s ; $\exists N(\varepsilon,\omega)$ tel que si $n > N$

$$\left|\operatorname{Tr}\int_0^t \big(\Lambda(s)-\Lambda_n(s)\big)d(P_\mu \ll M \gg_s P_\mu)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

D'où finalement si $n \geqslant N$:

$$\left|\operatorname{Tr}\int_0^t \big(\Lambda(s)-\Lambda_n(s)\big)d \ll M \gg_s\right| \leqslant \varepsilon$$ ∎

Passons maintenant au :

<u>LEMME 4.6.</u> *Supposons, outre les hypothèses du Théorème 4.2, que l'on a :*

$u \in L^p(\Omega\times]0,T[\,;V)$

$u_0 \in L^2(\Omega;H)$

$v \in L^2\big(\Omega;L^1(0,T;H)\big) + L^{p'}(\Omega\times]0,T[\,;V')$

$M \in \mathcal{M}^2(0,T;H)$

Alors la relation (4.11) *est vérifiée.*

<u>Démonstration</u> : Soit une suite $M^n \in \mathcal{M}^2(0,T;H)$ telle que :

$M^n \in L^p(0,T;V)$ p.s.

$M^n \longrightarrow M$ dans $\mathcal{M}^2(0,T;H)$

Soit A un opérateur de V dans V', qui vérifie (4.4), (4.5), (4.6), (4.7) et (4.8).

Soit alors $u^n \in L^p(\Omega\times]0,T[\,;V) \cap L^2\big(\Omega;C(0,T;H)\big)$ la solution de l'équation (cf. Lemme 2.1) :

$$(4.19)\quad \begin{cases} du^n(t) + A\big(u^n(t)\big)dt = \big(v(t)+A(u(t))\big)dt + dM^n(t) \\ \qquad\qquad\qquad u^n(0) = u_0 \end{cases}$$

On peut appliquer le Lemme 4.4 à u^n, et donc :

$$(4.20)\quad \begin{cases} \phi\big(u^n(t)\big) = \phi(u_0) + \displaystyle\int_0^t < v(s)+A\big(u(s)\big)-A\big(u^n(s)\big),\ \phi'\big(u^n(s)\big) > ds + \\ \qquad + \displaystyle\int_0^t \big(\phi'\big(u^n(s)\big), dM^n(s)\big) + \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\int_0^t \phi''\big(u^n(s)\big)d \ll M \gg_s \end{cases}$$

Or, d'après la démonstration du Théorème 2.1, quand $n \longrightarrow +\infty$,

$$(4.21)\quad \begin{cases} u^n \to u \text{ dans } L^2(\Omega;C(0,T;H)) \\ u^n \to u \text{ dans } L^p(\Omega\times]0,T[\,;V) \text{ faible} \\ A(u^n) \to A(u) \text{ dans } L^{p'}(\Omega\times]0,T[\,;V') \text{ faible} \\ E\int_0^T < A(u^n),u^n > dt \to E\int_0^T < A(u),u > dt \end{cases}$$

Donc, grâce à (4.8),

$$(4.22)\quad \begin{cases} u_n \to u \text{ dans } L^p(\Omega\times]0,T[\,;V) \\ A(u_n) \to A(u) \text{ dans } L^{p'}(\Omega\times]0,T[\,;V') \end{cases}$$

Et, d'après le Lemme 4.1 :

$$(4.23)\quad \phi'(u^n) \to \phi'(u) \text{ dans } L^p(\Omega\times\ 0,T\ ;V) \text{ faible}$$

Mais on tire de (4.21) et (4.1) :

$$(4.24)\quad \phi'(u^n) \to \phi'(u) \text{ dans } C(0,T;H) \text{ en probabilité}$$

$$(4.25)\quad \phi''(u^n(t)) \to \phi''(u(t)) \text{ dans } \mathcal{L}(H)^* \text{faible uniformément en } t \in [0,T] \text{, en probabilité}$$

Grâce à (4.22), (4.23), (4.24) et (4.25) on peut passer à la limite dans chacun des termes de (4.20) en probabilité, par des raisonnements similaires à ceux faits au Lemme 4.3, sauf pour le terme :

$$\int_0^t < v(s) + A(u(s)) - A(u^n(s)),\ \phi'(u^n(s)) > ds$$

qui converge vers $\int_0^t < v(s),\phi'(u(s)) > ds$ dans $L^1(\Omega)$ faible [i.e. pour la topologie $\sigma(L^1,L^\infty)$].

Il nous reste donc, pour établir le Lemme 4.6, à démontrer le :

<u>LEMME 4.7</u>. *Soit* ξ_n *une suite de* $L^1(\Omega)$.

Si : (i) $\xi_n \to \zeta$ *dans* $L^1(\Omega)$ *faible*

(ii) $\xi_n \to \xi$ *en probabilité*

Alors :

$$\xi = \zeta \text{ p.s.}$$

<u>Démonstration</u> : Nous allons nous inspirer d'une démonstration d'un résultat analogue, faite dans LIONS [1], comme dans le Lemme 4.2 de la Ière Partie.

Remarquons tout d'abord que l'on peut, en extrayant une sous-suite (que nous noterons encore ξ_n) remplacer (ii) par :

$$\text{(ii)}' \quad \xi_n \to \xi \quad \text{p.s.}$$

On pose :

$$\Omega_N = \{\omega / \ |\xi_n - \xi| \leq 1, \ \forall n \geq N\}$$

$\Omega_N \in \mathcal{F}$, la suite Ω_N est croissante, et

$$\lim_{N\to\infty} P(\Omega_N) = 1$$

Soit F_n l'ensemble des fonctions de $L^\infty(\Omega)$ à support dans Ω_N. Alors $\bigcup_N F_N$ est dense dans $L^\infty(\Omega)$.

Soit $\rho \in \bigcup_N F_N$. Alors $\exists N_0$ tel que $\rho \in F_{N_0}$ et grâce au Théorème de convergence dominée de Lebesgue :

$$E\,[\rho(\xi_n - \xi)] \to 0$$

Mais on a aussi :

$$E\,[\rho(\xi_n - \zeta)] \to 0$$

Donc :

$$E\,[\rho(\xi - \zeta)] = 0, \ \forall \rho \in \bigcup_N F_N$$

D'où :

$$\xi = \zeta \quad \text{p.s.}$$ ▫

Le Théorème 4.2 est maintenant une conséquence facile du Lemme 4.6 :

<u>Démonstration du Théorème 4.2.</u> Soit $v = v_1 + v_2$ une décomposition de v telle que :

$$v_1 \in L^0\big(\Omega; L^1(0,T;H)\big)$$

$$\text{et} \qquad v_2 \in L^0\big(\Omega; L^{p'}(0,T;V')\big),$$

v_1 et v_2 étant tous deux non anticipatifs.

Soient :

$$\Omega_n = \{\omega;\ |u_0| \leq n\}$$

$$T_n = \inf\Big\{t \leq T;\ |M(t)| > n,\ \int_0^t |v_1(s)|\,ds > n,$$

$$\int_0^t \| v_2(s)\|_*^{p'} ds > n,\ \int_0^t \| u(s)\|^p ds > n\Big\}$$

On vérifie aisément que :

(4.26) $P\left(\bigcup_n \Omega_n\right) = 1$

(4.27) $\bigcup_n [0,T_n(\omega)] = [0,T]$ p.s.

On pose d'autre part :

$$u_0^n = 1_{\Omega_n} u_0$$

$$v^n(t) = 1_{[0,T_n]} v(t)$$

$$A^n(u(t)) = 1_{[0,T_n]} A(u(t))$$

$$M^n(t) = M(t \wedge T_n)$$

Alors :

$$u_0^n \in L^2(\Omega;H)$$

$v^n + A^n(u) \in L^2(\Omega;L^1(0,T;H)) + L^{p'}(\Omega\times]0,T];V')$, non anticipatif

$$M^n \in \mathcal{M}^2(0,T;H)$$

Donc, d'après le Théorème 2.1, l'équation :

$$(4.28) \quad \begin{cases} du^n(t) + A(u^n(t))dt = [v^n(t)+A^n(u(t))]dt + dM^n(t) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad u^n(0) = u_0^n \end{cases}$$

a une solution unique :

$$u^n \in L^p(\Omega\times]0,T[\,;V) \cap L^2(\Omega;C(0,T;H))$$

On peut donc appliquer à u^n le Lemme 4.6, d'où :

$$(4.29) \begin{cases} \phi(u^n(t)) + \int_0^t < A(u^n(s)) - A^n(u(s)),\ \phi'(u^n(s)) > ds = \phi(u_0^n) + \\ \qquad + \int_0^t < v^n(s),\ \phi'(u^n(s)) > ds + \int_0^t (\phi'(u^n(s)),dM^n(s) + \\ \qquad\qquad + \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \int_0^t \phi''(u^n(s))\, d \ll M^n \gg_s \end{cases}$$

En particulier, si $\omega \in \Omega_n$, et $t \leqslant T_n(\omega)$, (4.29) s'écrit :

$$(4.30)\begin{cases} \phi(u^n(t)) + \int_0^t < A(u^n(s))-A(u(s)), \phi'(u^n(s)) > ds = \phi(u_0) + \\ \int_0^t < v(s), \phi'(u^n(s)) > ds + \int_0^t (\phi'(u^n(s)), dM(s)) + \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \int_0^t \phi''(u^n(s)) d \ll M \gg_s \end{cases}$$

Mais, si $\omega \in \Omega_n$ et $t \leq T_n(\omega)$,

$$\begin{cases} d(u^n(t)-u(t)) + A(u^n(t))-A(u(t))dt = 0 \\ u^n(0)-u(0) = 0 \end{cases}$$

Donc :

$$|u^n(t)-u(t)|^2 + 2\int_0^t < A(u^n(s))-A(u(s)), u^n(s)-u(s) > ds = 0$$

D'où, grâce à (4.6),

$$(4.31) \qquad |u^n(t)-u(t)|^2 = 0 \quad \text{p.s. dans } \Omega_n, \text{ si } t \in [0,T_n].$$

En reportant (4.31) dans (4.30), on obtient que (4.11) est vérifiée p.s. dans Ω_n, et $\forall t \in [0,T_n]$. Mais ceci est vrai $\forall n$. Donc, grâce à (4.26) et (4.27), (4.11) est vérifiée p.s., $\forall t \in [0,T]$. ∎

Nous allons maintenant reprendre l'Exemple 4.2 de la Ière Partie.

<u>Exemple 4.1.</u> Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $H = L^2(\mathcal{O})$, $V = H^1(\mathcal{O})$ [$= W^{1,2}(\mathcal{O})$, cf. Exemple 2.1].

Soit $\phi \in C^2(\mathbb{R})$, telle que :

$$(4.32) \qquad |\phi(r)| \leq K(\theta+|r|^2)$$

$$(4.33) \qquad |\phi'(r)| \leq K(\theta+|r|)$$

$$(4.34) \qquad |\phi''(r)| \leq K$$

$$\text{où} \quad \theta = \begin{cases} 1 & \text{si mes}\,\mathcal{O} < +\infty \\ 0 & \text{si mes}\,\mathcal{O} = +\infty \end{cases}$$

Soit alors Φ la fonctionnelle sur $L^2(\mathcal{O})$ définie par :

$$\Phi(u) = \int_{\mathcal{O}} \phi(u(x))dx$$

D'après les résultats de la Ière Partie, un tel Φ vérifie l'hypothèse (4.1).

Montrons maintenant que Φ vérifie (4.2) et (4.3).

$\Phi'(u)$ s'identifie avec l'élément $\phi'(u(\cdot))$ de $L^2(\mathcal{O})$.

Montrons que si $u \in H^1(\mathcal{O})$, $\phi'(u) \in H^1(\mathcal{O})$.

Soit $u_n \in H^1(\mathcal{O}) \cap C^1(\bar{\mathcal{O}})$ tel que $u_n \to u$ dans $H^1(\mathcal{O})$.

Alors :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \phi'\big(u_n(x)\big) = \phi''\big(u_n(x)\big) \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x), \quad \forall x \in \mathcal{O}$$

Or, grâce à (4.34),

$$\phi''\big(u_n(\cdot)\big) \in L^\infty(\mathcal{O})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \phi'\big(u_n(\cdot)\big) \in L^2(\mathcal{O}), \ i = 1, \ldots, n$$

On sait d'après les résultats de la première partie que :

$u \to \phi'(u)$ est continue de $L^2(\mathcal{O})$ dans $L^2(\mathcal{O})$

$u \to \phi''(u)$ est continue de $L^2(\mathcal{O})$ dans $L^\infty(\mathcal{O})$* faible

Donc, quand $n \to \infty$,

(4.35) $\quad \phi'(u_n) \to \phi'(u)$ dans $L^2(\mathcal{O})$

(4.36) $\quad \phi''(u_n) \dfrac{\partial u_n}{\partial x_i} \to \phi''(u) \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ dans $L^2(\mathcal{O})$ faible

Mais il résulte de (4.35)

(4.37) $\quad \dfrac{\partial}{\partial x_i} \phi'(u_n) \to \dfrac{\partial}{\partial x_i} \phi'(u)$ dans $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$

Donc, en comparant (4.36) et (4.37) :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \phi'(u) = \phi''(u) \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

Or $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\mathcal{O})$ et $\phi''(u) \in L^\infty(\mathcal{O})$, donc :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \phi'(u) \in L^2(\mathcal{O}), \text{ et :}$$

$$\phi'(u) \in H^1(\mathcal{O})$$

De plus si $u_n \to u$ dans $H^1(\mathcal{O})$, on a les convergences (4.35) et (4.36)

Donc Φ vérifie l'hypothèse (4.2).

De plus :

$$\|\Phi'(u)\|^2 = \int_{\mathcal{O}} \big|\phi'\big(u(x)\big)\big|^2 dx + \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathcal{O}} \Big|\phi''\big(u(x)\big) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\Big|^2 dx$$

$$\leq 2\tilde{\theta} K^2 + 2\, K^2 \ \|u\|^2$$

$$\text{où : } \tilde{\theta} = \begin{cases} \text{mes } \mathcal{O} & \text{si mes } \mathcal{O} < +\infty \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc $\exists k > 0$ tel que :

$$\|\phi'(u)\| \leq k(1+\|u\|)$$

Et ϕ vérifie (4.3), donc on peut lui appliquer le Théorème 4.1. ◻

Remarque 4.1. On peut montrer de la même façon que la fonctionnelle ϕ de l'Exemple 4.1 vérifie les hypothèses du Théorème 4.1 si $V = W^{1,p}(\mathcal{O})$ ou bien $V = L^p(\mathcal{O})$. ◻

Remarque 4.2. Si l'on rajoute aux hypothèses (4.32), (4.33) et (4.34) l'hypothèse :

$$\phi'(0) = 0 \tag{4.38}$$

alors la fonctionnelle ϕ de l'Exemple 4.1 vérifie les hypothèses du Théorème 4.1 avec $V = W_0^{1,p}(\mathcal{O})$, pourvu que la frontière $\partial\mathcal{O}$ soit de classe C^1. En effet, dans ce cas $W_0^{1,p}(\mathcal{O})$, fermeture de $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ dans $W^{1,p}(\mathcal{O})$, se définit aussi par : $W_0^{1,p}(\mathcal{O}) = \{u \in W^{1,p}(\mathcal{O}) \text{ t.q. } u|_{\partial\mathcal{O}} = 0\}$.

Donc, grâce à (4.38), si $u \in W_0^{1,p}(\mathcal{O})$, $\phi'(u) \in W_0^{1,p}(\mathcal{O})$. ◻

Remarque 4.3. On verra au Chapitre 3 une application de la formule de Ito pour une fonctionnelle ϕ du type décrit dans l'Exemple 4.1. On pourra trouver une autre application, à un résultat d'unicité, dans VIOT [1].

§5. SOMME D'OPERATEURS.

Dans beaucoup d'applications, l'opérateur A dont il a été question aux paragraphes précédents, est une somme de q opérateurs A_i qui correspondent à des espaces V_i, avec des p_i différents.

On ne peut plus alors appliquer les résultats des paragraphes précédents. Nous allons maintenant indiquer la généralisation de ces résultats à la nouvelle situation.

Soient V_i, $i = 1, \ldots, q$, q espaces de Banach séparables et réflexifs, inclus [avec densité et injection continue] dans un espace de Hilbert H. On identifie H à son dual. Alors :

$$V_i \subset H \subset V'_i$$

Soit $V = \bigcap_{i=1}^{q} V_i$. Muni de la norme :

$$\| v \| = \sum_{i=1}^{q} \| v \|_i$$

V est un espace de Banach.

On suppose que V est dense dans H, et séparable. Alors :

$$V \subset H \subset V'$$

Soient p_i, $i = 1, \ldots, q$, q nombre réels tels que $p_i > 1$; on définit p'_i par $\frac{1}{p_i} + \frac{1}{p'_i} = 1$.

Soit $u(t)$ un processus du type suivant :

(5.1) $\quad u(\cdot) \in \bigcap_{i=1}^{q} L^{p_i}(0,T;V_i)$ p.s.

(5.2) $\quad u(t) = u_0 + \int_0^t v(s)ds + M(t)$

où

(5.3) $\quad u_0 \in L^o(\Omega,\mathcal{F}_0,P;H)$

(5.4) $\quad v \in L^o(\Omega;L^1(0,T;H)) + \sum_{i=1}^{q} L^o(\Omega;L^{p'_i}(0,T;V'_i))$ non anticipatif

(5.5) $\quad M \in \mathcal{M}^2_{loc}(0,T;H)$

Alors on vérifie aisément que le Lemme 1.2 se généralise en :

<u>LEMME 5.1</u>. *Supposons vérifiées* (5.1), (5.2), (5.3), (5.4) *et* (5.5), *et en outre que :*

(5.6) $$M \in C(0,T;V) \text{ p.s.}$$

Alors :

(5.7) $\quad u \in C(0,T;H)$ p.s. *et* u *est bien mesurable à valeurs dans* H.

(5.8) $$\begin{cases} |u(t)|^2 = |u_0|^2 + 2\int_0^t < v(s),u(s) > ds + \\ \qquad + 2\int_0^t (u(s),dM(s)) + Tr \ll M \gg_t, \ \forall t \in [0,T] \text{ p.s.} \end{cases}$$ ∎

Soient maintenant A_i, $i = 1, \ldots, q$, q opérateurs, A_i opérant de V_i dans V_i', tels que :

(5.9) $\exists \alpha > 0$ t.q. $< A_i(u), u > \geqslant \alpha \| u \|_i^{p_i}, \quad \forall u \in V_i$

(5.10) $\exists \beta$ t.q. $\| A_i(u) \|_{*,i} \leqslant \beta \| u \|_i^{p_i}, \quad \forall u \in V_i$

(5.11) $< A_i(u) - A_i(v), u-v > \geqslant 0, \quad \forall u,v \in V_i$

(5.12) $\lambda \rightarrow < A_i(u+\lambda v), w >$ est continue, $\forall u,v,w \in V_i$

On définit alors l'opérateur $A : V \rightarrow V'$ par :

$$(5.13) \qquad A(u) = \sum_{i=1}^{q} A_i(u)$$

On peut alors démontrer, par la méthode du Théorème 2.1, le :

THEOREME 5.1 : *Si l'opérateur* A *est donné par* (5.13), *où chaque* A_i *vérifie* (5.9), (5.10), (5.11) *et* (5.12), *étant donnés :*

$$(5.14) \qquad u_0 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, P; H)$$

$$(5.15) \qquad f \in L^2(\Omega; L^1(0,T;H)) + \sum_{i=1}^{q} L^{p_i'}(\Omega \times]0,T[\,; V'_i), \text{ non anticipatif},$$

$$(5.16) \qquad M \in \mathcal{M}^2(0,T;H)$$

l'équation :

$$(5.17) \qquad \begin{cases} du(t) + A(u(t))dt = f(t)dt + dM(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

admet une solution unique :

$$u \in \bigcap_{i=1}^{q} L^{p_i}(\Omega \times]0,T[\,; V_i)$$

de plus, $u \in L^2(\Omega; C(0,T;H))$, u *est bien mesurable à valeurs dans* H, *et vérifie :*

$$(5.18) \qquad \begin{cases} |u(t)|^2 + 2\int_0^t < A(u(s)), u(s) > ds = |u_0|^2 + 2\int_0^t < f(s), u(s) > ds + \\ \qquad + 2\int_0^t (u(s), dM(s)) + \operatorname{Tr} \ll M \gg_t \end{cases}$$

$$(5.19) \qquad \begin{cases} E(|u(t)|^2) + 2E\int_0^t < A(u(s)), u(s) > ds = E(|u_0|^2) \\ \qquad + 2E\int_0^t < f(s), u(s) > ds + E(|M(t)|^2) \end{cases}$$

□

Donnons un exemple d'application du Théorème 5.1 :

Exemple 5.1 : Soit $\mathcal{O}$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$; soient $V_1 = H_0^1(\mathcal{O})$ (cf. Exemple 4.1) $p_1 = 2$, A_1 défini par :

$$< A_1 u,v > = \int \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx$$

Soient $V_2 = L^p(\mathcal{O})$ $(p \geq 2)$, $p_2 = p$, A_2 défini par :

$$< A_2 u,v > = \int |u(x)|^{p-2} u(x)v(x)dx$$

Alors, si u , f et M sont donnés par (5.14), (5.15) et (5.16), le Théorème 5.1 assure l'existence et l'unicité d'une solution :

$$u \in L^2(\Omega\times]0,T[;H_0^1(\mathcal{O})) \cap L^p(\Omega\times]0,T[\times\mathcal{O}) \cap L^2(\Omega;C(0,T;L^2(\mathcal{O}))$$

à l'équation :

$$(5.20) \quad \begin{cases} du(t) - \Delta u(t)dt + |u(t)|^{p-2}u(t)dt = f(t)dt + dM(t) \\ \qquad\qquad u(t,x)\big|_{x\in\partial\mathcal{O}} = 0 \;,\; u(0) = u_0 \end{cases}$$

□

On a l'égalité de l'énergie stochastique :

THEOREME 5.2 : *Soit* $u(t)$ *un processus qui vérifie* (5.1), (5.2), (5.3), (5.4) *et* (5.5). *Supposons que chacun des triplets* V_i, V'_i, p_i *vérifie l'Hypothèse* I,

alors $u \in L^o(\Omega;C(0,T;H))$, $u(t)$ *est bien mesurable à valeurs dans* H, *et vérifie*

$$(5.21) \quad |u(t)|^2 = |u_0|^2 + 2\int_0^t < v(s),u(s) > ds + 2\int_0^t (u(s),dM(s)) + \mathrm{Tr} \ll M \gg_t$$

□

Soit enfin ϕ une application de H dans $\mathbb{R}$ qui vérifie l'Hypothèse (4.1) et en outre :

$$(5.22) \quad \begin{cases} \forall i \in \{1, \ldots, q\}, \text{ la restriction à } V_i \text{ de l'application } u \to \phi'(u) \\ \text{est continue de } V_i \text{ fort dans } V_i \text{ faible} \end{cases}$$

$$(5.23) \quad \exists k > 0 \ \text{ t.q. } \|\phi'(u)\|_i \leq k(1+\|u\|_i), \ \forall u \in V_i, \ i \in \{1, \ldots, q\}$$

On a alors le :

THEOREME 5.3. *Soit* $u(t)$ *un processus qui vérifie* (5.1) ... (5.5). *Supposons que chacun des triplets* (V_i, V'_i, p_i) *vérifie l'Hypothèse* II.

Alors si $\phi : H \to \mathbb{R}$ *vérifie* (4.1), (5.22) *et* (5.23), *on a :*

$$\phi(u(t)) = \phi(u_0) + \int_0^t < \phi'(u(s)), v(s) > ds +$$

$$+ \int_0^t (\phi'(u(s)), dM(s)) + \frac{1}{2} \mathrm{Tr} \int_0^t \phi''(u(s)) d \ll M \gg_s$$

■

Exemple 5.2: $q = 2 \quad V_1 = H^1(\mathcal{O}), \; p_1 = 2,$

$V_2 = L^p(\mathcal{O}), \; P_1 = P, \; (P \geq 2)$

Dans ce cadre la fonctionnelle ϕ introduite dans l'Exemple 4.1 vérifie les Hypothèses du Théorème 5.3. ■

CHAPITRE 3

EQUATIONS PARABOLIQUES STOCHASTIQUES

§0. INTRODUCTION

Nous allons maintenant étudier l'équation :

$$(0.1) \quad \begin{cases} du(t) + A(u(t))\, dt + B(u(t))\, dW(t) = f(t)\, dt + dM(t) \\ u(o) = u_o \end{cases}$$

où $W(t)$ sera un processus de Wiener sur un espace de Hilbert K, et B un opérateur linéaire ou non de V dans $\mathcal{L}(K\,;\,H)$ (ou $\mathcal{L}^2(K\,;\,H)$).

Soit J l'isomorphisme de K' sur K. On peut toujours supposer - et c'est ce que nous ferons dans la majeure partie de ce chapitre - que J est l'opérateur de covariance du Wiener $W(t)$. Cette hypothèse n'implique aucune restriction quant à la classe d'équations étudiée. En effet, d'après le théorème 3.8. de la Ière partie , si $W(t)$ est un Wiener sur K, d'opérateur de covariance $Q = CJC^*$, il existe un wiener $\tilde{W}(t)$ sur un espace de Hilbert $\tilde{K}$, d'opérateur de covariance $\tilde{J}$ (isomorphisme de $\tilde{K}'$ sur $\tilde{K}$), tels que :

$$W(t) = C\pi\tilde{W}(t)$$

où $\pi \in \mathcal{L}(\tilde{K}\,;\,K)$. Donc si l'on pose :

$$\tilde{B}(u(t)) = B(u(t))\, C\pi,$$

alors : $$B(u(t))\, dW(t) = \tilde{B}(u(t))\, d\tilde{W}(t),$$

d'après la relation (3.4) de la 1ère partie.

Nous chercherons donc à résoudre l'équation (0.1) lorsque B applique V dans $\mathcal{L}^2(K\,;\,H)$, et vérifie certaines hypothèses que l'on précisera. A, quant à lui, sera, comme au chapitre précédent, un opérateur monotone, hémicontinu, borné et coercif de V dans V'.

Nous allons d'abord établir un premier résultat, par une méthode, du type "méthode itérative de Picard", dans le cas où B est Lipschitzienne de H dans $\mathcal{L}^2(K\,;\,H)$. Puis nous traiterons le cas général par une approximation en dimension finie (méthode de Galerkin).

Nous donnerons enfin des exemples, et un résultat du type "principe du maximum".

§ 1. METHODE DE PICARD

Les espaces $V \subset H \subset V'$ étant définis comme au chapitre 1, on se donne une famille $A(t,.)$ d'opérateurs de V dans V', définis pour presque tout $t \in]0,T[$, et un nombre $p > 1$, qui vérifient :

(1.1) Coercivité : $\exists\ \alpha > 0$, λ et ν tels que :

$$<A(t,u), u> + \lambda |u|^2 + \nu \geqslant \alpha ||u||^p, \quad \forall u \in V, \text{ p.p.t.}$$

(1.2) Monotonie : $<A(t,u) - A(t,v), u - v> + \lambda |u-v|^2 \geqslant 0, \forall u, v \in V, \text{p.p.t.}$

(1.3) Bornitude : $\exists\ \beta$ t.q $||A(t,u)||_* \leqslant \beta ||u||^{p-1}$, $\forall u \in V$, p.p.t.

(1.4) Hémicontinuité : $\theta \to <A(t,u+\theta v), w>$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $\forall u, v \in V$, p.p.t.

(1.5) Mesurabilité : $\forall u \in V$, l'application :

$$t \to A(t,u)$$

est Lebesgue mesurable de $]0,T[$ à valeurs dans V'.

On se donne, comme aux chapitres précédents, un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, et une famille croissante $\mathcal{F}_t$ de sous-tribus de $\mathcal{F}$, telle que $\mathcal{F}_0$ contienne tous les P-négligeables de $\mathcal{F}$.

Soit K un espace de Hilbert séparable, $W(t)$ un processus de Wiener défini sur K, d'opérateur de covariance J (= l'isomorphisme canonique de K' sur K), adapté à la famille $\mathcal{F}_t$.

Soit $B(t,.)$ une famille d'opérateurs de H dans $\mathcal{L}^2(K, H)$ définis p.p.$t \in]0,T$ qui vérifie :

(1.6) $B(t,o) = 0$

(1.7) $\exists\, k$ t.q. $\|B(t,u) - B(t,v)\|_2 \leq k\ |u - v|$,
$\forall\, u, v \in \mathcal{H}$, p.p.t, où $\|.\|_2$ désigne la norme de $\mathcal{L}^2(K,H)$.

(1.8) $\forall\, u \in H$, $t \to B(t,u)$ est Lebesque-mesurable de $]0,T[$ à valeurs dans $\mathcal{L}^2(K\ ;\ H)$.

Remarque 1.1. :

Il résulte de (1.6), (1.7) et (1.8) que si $u \in L^2(0,T\ ;\ H)$, $B(u) \in L^2(0,T\ ;\mathcal{L}^2(K,\ H))$ [cf. Remarque 1.2. du chapitre 1] . Mais, grâce à (1.7), $u \to B(u)$ est une application continue de $L^2(0,T\ ;\ H)$ dans $L^2(0,T\ ;\mathcal{L}^2(K,\ H))$. Cette application est donc mesurable.

Donc, si $u \in L^2(\Omega \mathrm{x}\ ]0,T[\ ;\ H)$, $B(u) \in L^2(\Omega \mathrm{x}\ ]0,T[\ ;\mathcal{L}^2(K,H))$.

De plus, si u^n reste dans un borné de $L^2(\Omega \mathrm{x}\ ]0,T[\ ;\ H)$, $B(u^n)$ reste dans un borné de $L^2(\Omega \mathrm{x}\ ]0,T[\ ;\mathcal{L}^2(K,H))$.
En outre, p.p.t, $u \to B(t,u)$ est continue de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{L}^2(K,H)$. Donc si $u(t)$ est non anticipatif à valeurs dans $\mathcal{H}$, $B(t,u(t))$ est non anticipatif à valeurs dans $\mathcal{L}^2(K,H)$. ▩

On se donne en outre :

(1.9) $u_o \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_o, P\ ;\ H)$.

(1.10) $f \in L^2(\Omega\ ;\ L^1(0,T\ ;\ H)) + L^{p'}(\Omega \mathrm{x}\ ]0,T[\ ;V')$, non anticipatif.

(1.11) $M \in \mathfrak{M}^2(0,T\ ;\ H)$.

Et on cherche à résoudre l'équation :

$$(1.12)\ \begin{cases} du(t) + A(t,u(t))\,dt + B(t,u(t))\,dW(t) = f(t)\,dt + dM(t) \\ u(o) = u_o . \end{cases}$$

Théorème 1.1. : *Sous les hypothèses* (1.1)...(1.11), *l'équation* (1.12) *a une solution unique :*

$$u \in L^p\ (\Omega x\ ]0,T[\ ;V) \cap L^2(\Omega\ ;\ C(0,T\ ;\ H))\ ,$$

processus bien mesurable à valeurs dans H.

Démonstration :

a) Unicité : Soient u et v deux processus bien mesurables à valeurs dans H, éléments de $L^p(\Omega x\ ]0,T[\ ;V) \cap L^2\ (\Omega;\ C(0,T;H))$, solutions de l'équation (1.12).

Alors :

$$d(u(t)-v(t)) + (A(t,u(t)) - A(t,v(t))\ dt + \left[(B(t,u(t)) - B(t,v(t))\right] dW(t) = 0$$
$$u(o) - v(o) = 0.$$

On déduit alors du théorème 3.2. du chapitre 2 que :

$$E(|u(t)-v(t)|^2) + 2E\int_o^t < A(s,u(s)) - A(s,v(s)),\ u(s) - v(s)> ds = $$
$$= E\int_o^t ||B(s,u(s)) - B(s,v(s)\ ||_2^2\ ds.$$

D'où, grâce aux hypothèses (1.2) et (1.7),

$$(1.13)\qquad E(|u(t)-v(t)|^2) \leqslant (\lambda+k)\int_o^t E\ (|u(s) - v(s)|^2)\ ds.$$

On déduit de (1.13), en utilisant le lemme de Gronwall, que :

$$E(|u(t) - v(t)|^2) = 0.$$

b) Existence : Considérons les équations.

$$(1.14)\quad \begin{cases} du^1(t) + A(t,u^1(t))\ dt + \lambda u^1(t)\ dt = f(t)\ dt + dM(t) \\ u^1(o) = u_o \end{cases}$$

$$(1.15)\quad \begin{cases} du^{n+1}(t) + A(t,u^{n+1}(t))\ dt + \lambda u^{n+1}(t)\ dt + B(t,u^n(t))\ dW(t) = \\ \qquad = \lambda u^n(t)\ dt + f(t)\ dt + dM(t) \\ u^{n+1}(o) = u_o \end{cases}$$

$n = 1,\ 2\ \ldots.$

L'opérateur $\tilde{A}(t,u) = A(t,u) + \lambda u$ vérifie les hypothèses du Théorème 2.1. du Chapitre 2, donc (1.14) a une solution unique :

$$u^1 \in L^p (\Omega \times]0,T[; V) \cap L^2(\Omega ; C(0,T ; H)),$$

processus bien mesurable à valeurs dans H.

Il en résulte, d'après la Remarque 1.1, que $B(u^1) \in L^2(\Omega \times]0,T[; \mathcal{L}^2(K,H))$ et est non anticipatif. Donc :

$$\int_0^{\cdot} B(u^1)\, dW \in \mathcal{M}^2(0,T ; H).$$

Et donc, d'après le Théorème 2.1. du Chapitre 2, (1.15) (avec $n = 1$) définit :

$$u^2 \in L^p(\Omega \times]0,T[; V) \cap L^2(\Omega ; C(0,T ; H)),$$

processus bien mesurable à valeurs dans H.

On définit ainsi de suite u^n, $n \geq 1$. Nous allons montrer que la suite u^n converge vers la solution de l'équation étudiée.

Montrons tout d'abord le :

<u>Lemme 1.1.</u> : *La suite* u^n *est une suite de Cauchy dans* $L^2(\Omega ; C(0,T ; H))$.

<u>Démonstration</u> : On tire de (1.15) que si $n > 1$,

$$\left\{ \begin{array}{l} d(u^{n+1}(t) - u^n(t)) + \{A(u^{n+1}) - A(u^n) + \lambda(u^{n+1} - u^n)\}\, dt \; + \\[1ex] \qquad + (B(u^n) - B(u^{n-1}))\, dW(t) = \lambda(u^n - u^{n-1})\, dt \\[1ex] \qquad u^{n+1}(o) - u^n(o) = 0 \end{array} \right.$$

On peut donc appliquer le Théorème 3.2. du Chapitre 2 à $u^{n+1}(t) - u^n(t)$, d'où :

$$(1.16)\quad \begin{cases} |u^{n+1}(t) - u^n(t)|^2 + 2\int_0^t \langle A(u^{n+1})-A(u^n), u^{n+1}-u^n\rangle\, ds + \\ \quad + 2\lambda\int_0^t |u^{n+1}-u^n|^2\, ds + 2\int_0^t (u^{n+1}-u^n, B(u^n)-B(u^{n+1}))\, dW(s) = \\ = 2\lambda\int_0^t (u^{n+1}-u^n, u^n-u^{n-1})ds + \int_0^t \|B(u^n) - B(u^{n-1})\|_2^2\, ds \end{cases}$$

où $(v, B(\tilde{v}))$ désigne l'élément de $\mathcal{L}^2(K\,;\mathbf{R})$ défini par :

$$(v, B(\tilde{v}))\, k = (v, B(\tilde{v})\, k),\ \forall\, k \in K .$$

En utilisant l'hypothèse (1.2), on tire de (1.16) :

$$|u^{n+1}(t) - u^n(t)|^2 \leqslant 2\lambda\int_0^t (u^{n+1}- u^n, u^n-u^{n-1})\, ds + \int_0^t \|B(u^n)-B(u^{n-1})\|_2^2\, ds$$
$$- 2 \int_0^t (u^{n+1}-u^n, B(u^n) - B(u^{n-1}))\, dW(s).$$

Donc, à fortiori :

$$(1.17)\quad \begin{cases} E(\sup_{\theta\leqslant t} |u^{n+1}(\theta) - u^n(\theta)|^2) \leqslant 2\lambda\, E \int_0^t |(u^{n+1}-u^n, u^n-u^{n-1})|\, ds + \\ \quad + E\int_0^t \| B(u^n)-B(u^{n-1})\|_2^2\, ds + \\ \quad + 2E \left(\sup_{\theta\leqslant t} \left| \int_0^\theta (u^{n+1}-u^n, B(u^n) - B(u^{n-1}))\, dW(s)\right|\right) \end{cases}$$

Or :

$$\forall\, t \in [0,T]\ ,\ 2\lambda E \int_0^t |(u^{n+1}-u^n,u^n-u^{n-1})|\, ds \leqslant \frac{1}{3T}\, E\int_0^t |(u^{n+1}-u^n|^2 ds +$$
$$+ 3\lambda^2 TE \int_0^t |u^n-u^{n-1}|^2\, ds.$$
$$\leqslant \frac{1}{3}\, E(\sup_{\theta\leqslant t} |u^{n+1}(\theta) - u^n(\theta)|^2) +$$
$$+ 3\lambda^2 TE \int_0^t |u^n-u^{n-1}|^2\, ds.$$

$$2E\left(\sup_{\theta\leqslant t}\left|\int_o^\theta (u^{n+1}-u^n,\ B(u^n)-B(u^{n-1}))\ dW(s)\right|\right)\leqslant 6\ E\left[\left(\int_o^t |u^{n+1}-u^n|^2.\right.\right.$$

$$\left.\left. .\,||B(u^n)-B(u^{n-1})||_2^2\ ds\right)^{1/2}\right]$$

$$\leqslant \frac{1}{3}\,E\,\left(\sup_{\theta\leqslant t}|\ u^{n+1}(\theta)-u^n(\theta)|^2\right)+$$

$$+\ 9E\int_o^t ||B(u^n)-B(u^{n-1})||_2^2\ ds.$$

En reportant ces majorations dans (1.17), et en utilisant l'hypothèse (1.7) on obtient :

$$(1.18)\qquad E\left(\sup_{\theta\leqslant t}|u^{n+1}(\theta)-u^n(\theta)\ |^2\right)\leqslant C\int_o^t E\ |u^n(s)-u^{n-1}(s)|^2\ ds$$

$$\text{où } C = 3\,(10\ k^2+3\lambda^2 T).$$

Posons :

$$\varphi^n(t) = E\ \left(\sup_{\theta\leqslant t}|u^{n+1}(\theta)-u^n(\theta)\ |^2\right).$$

On déduit de (1.18) que :

$$(1.19)\qquad \varphi^n(t)\leqslant C\int_o^t \varphi^{n-1}(s)\ ds.$$

En itérant l'inégalité (1.19), on obtient :

$$(1.20)\qquad \varphi^n(t)\leqslant \frac{C^nT^n}{n!}\,\varphi^1(T).$$

Donc :

$$E\left(\sup_{t\leqslant T}|u^{n+1}(t)-u^n(t)|^2\right)\leqslant \frac{C^nT^n}{n!}\ \varphi^1(T).$$

Le lemme découle de cette majoration. ▪

Etablissons maintenant le :

Lemme 1.2. : u^n *reste dans un borné de* $L^p(\Omega\times\,]0,T[\, ;V)$.

Démonstration : Appliquons le Théorème 2.1. du Chapitre 2 à $u^n(t)$:

$$(1.21)\quad \left\{\begin{aligned} & |u^n(T)|^2 + 2\int_0^T \langle A(u^n), u^n\rangle\, dt + 2\lambda\int_0^T |u^n|^2\, dt + \\ & + 2\int_0^T (u^n, B(u^{n-1}))\, dW(t) = |u_o|^2 + 2\lambda\int_0^T (u^n, u^{n-1})\, dt + \\ & + 2\int_0^T \langle f, u^n\rangle\, dt + 2\int_0^T (u^n, dM) + \mathrm{Tr} \ll M - \int_0^{\cdot} B(u^{n-1})\, dW \gg_T \end{aligned}\right.$$

D'où :

$$(1.22)\quad \left\{\begin{aligned} & 2E\int_0^T \langle A(u^n), u^n\rangle\, dt + 2\lambda E\int_0^T |u^n|^2\, dt \leqslant E\,(|u_o|^2) \\ & + 2\lambda E\int_0^T (u^n, u^{n-1})dt + 2E\int_0^T \langle f, u^n\rangle\, dt + \\ & \qquad + E\Big(\Big|M(T) - \int_0^T B(u^{n-1})dW\Big|^2\Big). \end{aligned}\right.$$

Posons :

$f = f_1 + f_2$, où :

$f_1 \in L^2(\Omega; L^1(0,T,H))$

$f_2 \in L^{p'}(\Omega\times\,]0,T[\, ; V')$

Il résulte du Lemme 1.1. que u^n reste dans un borné de $L^2(\Omega; C(0,T\,;H))$.

D'où :

$$(1.23)\quad \left\{\begin{aligned} & E\,|u_o|^2 + 2\lambda E\int_0^T (u^n, u^{n-1})\, dt + 2E\int_0^T (f_1, u^n)\, dt \\ & \qquad + E\,\Big|M(T) - \int_0^T B(u^{n-1})\, dW\Big|^2 \leqslant C' . \end{aligned}\right.$$

Et on tire de (1.22) et (1.23), en utilisant l'hypothèse de coercivité (1.1

$$(1.24) \qquad 2\alpha E \int_0^T ||u^n||^p dt \leqslant C' + \nu T + 2\, E \int_0^T \langle f_2, u^n \rangle\, dt$$

or :

$$(1.25) \qquad 2\, E \int_0^T \langle f_2, u^n \rangle\, dt \leqslant \frac{2\alpha}{p} E \int_0^T ||u^n||^p dt + \frac{2}{p'}\ \alpha^{-\frac{p'}{p}}\ E\int_0^T ||f||_*^{p'}\, dt$$

Il résulte finalement de (1.24) et (1.25) :

$$E \int_0^T ||u^n||^p\, dt \leqslant C''$$

Il résulte du Lemme 1.1 et de l'hypothèse (1.7) que :

$$(1.26) \qquad u^n \to u \quad \text{dans } L^2\, (\Omega;\ C(0,T\ ;\ H))$$

$$(1.27) \qquad B(u^n) \to B(u) \text{ dans } L^2(\Omega;\ L^\infty(0,T\ ; \mathcal{L}^2(K,H)))$$

Par ailleurs, il résulte du Lemme 1.2 et de (1.26) :

$$(1.28) \qquad u^n \rightharpoonup u \text{ dans } L^p\ (\Omega \times\,]0,T[\ ;V) \text{ faible.}$$

De plus, d'après le Lemme 1.2 et l'hypothèse (1.2), $A(u^n)$ reste dans un borné de $L^{p'}(\Omega \times]0,T[\ ;V')$. Donc de toute sous-suite de $A(u^n)$, on peut extraire une sous-suite qui converge dans $L^{p'}(\Omega \times]0,T[\ ;V')$ faible. Mais toutes les limites sont nécessairement égales.

Soient en effet χ_1 et χ_2 des limites correspondant à des sous-suites différentes. En reportant (1.26) et (1.27) dans l'équation (1.15), on s'aperçoit que toute la suite $\int_{t_1}^{t_2} A(s,u^n(s))\, ds$ converge dans $L^1\ (\Omega,\ V')$, $\forall t_1$ et $t_2 \in [0,T]$. D'où :

$$\int_{t_1}^{t_2} \chi_1(s)\, ds = \int_{t_1}^{t_2} \chi_2\ (s)\, ds\ ,\ \forall\, t_1,\ t_2 \in [0,T]\ ,$$

l'égalité ayant lieu dans l'espace $L^{p'}\ (\Omega;\ V')$. Et ceci entraîne que $\chi_1 = \chi_2$ dans $L^{p'}\ (\Omega \times]0,T[\ ;V')$.

Et finalement :

$$(1.29) \qquad A(u^n) \rightharpoonup \chi \quad \text{dans } L^{p'}(\Omega x \,]0,T[\, ;V') \text{ faible}$$

En utilisant (1.26), (1.27), (1.28) et (1.29), on peut passer à la limite dans l'équation (1.15), d'où :

$$(1.30) \quad \begin{cases} du(t) + \chi(t)\, dt + B(t,u(t))\, dW(t) = f(t)\, dt + dM(t) \\ \qquad\qquad u(o) = u_o \end{cases}$$

Il nous reste donc, pour terminer la démonstration du Théorème 1.1, à montrer que $\chi = A(u)$.

En prenant l'espérance mathématique dans (1.21), on obtient :

$$2E \int_o^T \langle A(u^n),\, u^n \rangle\, dt = E(|u_o|^2) - E(|u^n(T)|^2) + 2E \int_o^T \langle f,u^n\rangle dt$$

$$+ 2\lambda E \int_o^T (u^n, u^{n-1} - u^n)\, dt + E(|M(T) - \int_o^T B(u^{n-1})\, dW|^2)$$

Et grâce à (1.26), (1.27) et (1.28) :

$$\lim_{n \to \infty} E \int_o^T \langle A(u^n),\, u^n \rangle\, dt = \frac{1}{2} E\,(|u_o|^2) - \frac{1}{2} E\,(|u(T)|^2) + E \int_o^T \langle f,u \rangle dt$$

$$+ \frac{1}{2} E \;|M(T) - \int_o^T B(u)\, dW|^2$$

Et donc, d'après (1.30) et le Théorème 2.1. du Chapitre 2,

$$(1.31) \qquad \lim_{n\to\infty} E \int_o^T \langle A(u^n),\, u^n \rangle\, dt = E \int_o^T \langle \chi,\, u \rangle\, dt$$

Or, d'après l'hypothèse de monotonie (1.1),

$$\forall\, v \in L^p(\Omega x \,]0,T[\, ;V) \cap L^2 (\Omega x \,]0,T[\, ;H),$$

$$(1.32) \qquad E\int_0^T \langle A(u^n)-A(v),\ u^n-v\rangle\, dt + \lambda E\int_0^T |u^n-v|^2\, dt \geq 0$$

Passons à la limite dans (1.32), en utilisant (1.26), (1.28), (1.29) et (1.31). Il vient :

$$(1.33) \qquad E\int_0^T \langle \chi-A(v),\ u-v\rangle\, dt + \lambda E\int_0^T |u-v|^2\, dt \geq 0$$

On peut maintenant, comme dans la démonstration du Lemme 2.5 du Chapitre 2, poser $v = u - \theta w$ $\left[\theta > 0,\ w \in L^p(\Omega \times]0,T[\,;V) \cap L^2(\Omega\times]0,T[\ H)\right]$, diviser (1.33) par θ et faire tendre $\theta \to 0$. D'où :

$$E\int_0^T \langle \chi-A(u),\ w\rangle\, dt \geq 0,\ \forall w \in L^p(\Omega\times]0,T[\,;V) \cap L^2(\Omega\times]0,T[\,;H)$$

Donc $\chi = A(u)$. ∎

Remarque 1.2. :

On a un résultat analogue en remplaçant A par une somme d'opérateurs, comme au §5 du chapitre 2.

Sous les hypothèses énoncées dans ce paragraphe quant aux espaces V_i, si $A = \sum_{i=1}^{q} A_i$, où chaque A_i vérifie les hypothèses (1.1) ... (1.5) [où V, V' et p sont remplacés par V_i, V_i', p_i $(p_i > 1)$], alors l'équation (1.12) a une solution unique :

$$u \in \bigcap_{i=1}^{q} L^{p_i}(\Omega\times]0,T[\,;V_i) \cap L^2(\Omega, C(0,T\,;H))$$ ∎

Donnons un exemple qui rentre dans le cadre :

Exemple 1.1. : Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, W(t) un mouvement brownien scalaire. On étudie l'équation :

$$(1.34) \qquad \begin{cases} du(t,x) - \Delta u(t,x)\, dt + u^3(t,x)\, dt + u(t,x)\, dW(t) = 0 \\ u(t,x)|_\Sigma = 0, \quad u(o,x) = u_o(x) \end{cases}$$

où $\Sigma = \partial\mathcal{O} \times]0,T[$, $u_o(.) \in L^2(\mathcal{O})$

Posons :

$$K = \mathbb{R}, \quad H = L^2(\mathcal{O}), \quad V_1 = H_0^1(\mathcal{O}), \quad P_1 = 2, \quad A_1(u) = -\Delta u$$

$$V_2 = L^4(\mathcal{O}), \quad P_2 = 4, \quad A_2(u) = u^3$$

Alors l'équation (1.34) s'écrit :

$$(1.35) \quad \begin{cases} du(t) + A_1 u(t)\, dt + A_2(u(t))\, dt + u(t)\, dW(t) = 0 \\ u(o) = u_o \end{cases}$$

Et cette équation a une solution unique :

$$u \in L^2(\Omega \times]0,T[\,;\, H_0^1(\mathcal{O})) \cap L^4(\Omega \times]0,T[\times \mathcal{O}) \cap L^2(\Omega;\, C(0,T;L^2(\mathcal{O})))$$

§2. EXTENSION DES RESULTATS DE LA METHODE DE PICARD

Nous allons maintenant généraliser le Théorème 1.1, en remplaçant l'hypothèse de Lipschitz sur la famille d'opérateurs B, (1.7), par une hypothèse de Lipschitz locale. Le résultat que nous allons établir nous sera utile dans le paragraphe suivant.

Le cadre général étant le même que ci-dessus, on fait les mêmes hypothèses (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) et (1.5) sur la famille d'opérateurs A(t,.), et on se donne le même processus de Wiener W(t).

On suppose que la famille d'opérateurs B(t,.) de H dans $\mathcal{L}^2(K;H)$ vérifie :

(2.1) $\quad B(t,o) = 0$

(2.2) $\quad \forall C$ sous-ensemble borné de H, $\exists\, k_C$ tel que :

$$||B(t,u) - B(t,v)||_2 \leq k_C\, |u-v| \quad , \forall u, v \in C, \text{ p.p.t.}$$

(2.3) $\quad \forall u \in H, \ t \to B(t,u)$ est Lebesgue mesurable de $]0,T[$ à valeurs dans $\mathcal{L}^2(K;H)$.

On fait de plus l'hypothèse suivante sur A et B : $\exists \alpha > 0$ et λ, ν tels que :

$$(2.4) \qquad 2 < A(t,u),u > + \lambda |u|^2 + \nu \geqslant \alpha ||u||^p + ||B(t,u)||_2^2$$

Remarque 2.1. :

On vérifie aisément que (2.4)$\Longrightarrow$(1.1). Par ailleurs, (1.1) + (1.6) + (1.7) $\Longrightarrow$ (2.4). ▪

Remarque 2.2. :

Grâce à (2.2), p.p.t $u \to B(t,u)$ est continue de H dans $\mathcal{L}^2(K;H)$. Donc si u(t) est non anticipatif à valeurs dans V, B(t,u(t)) est non anticipatif à valeurs dans $\mathcal{L}^2(K;H)$. ▪

Lemme 2.1. :

Sous les hypothèses (1.3), (2.2), (2.3) et (2.4),

si $u \in L^p(\Omega \times]0,T[\,;V) \cap L^2(\Omega \times]0,T[\,;H)$, *alors :*

$B(u) \in L^2(\Omega \times]0,T[\,;\mathcal{L}^2(K;H))$.

Démonstration :

Il résulte de (1.3) et (2.4) :

$$(2.5) \qquad ||B(t,u)||_2^2 \leqslant 2\beta ||u||^p + \lambda |u|^2 + \nu, \quad \forall u \in V, \text{ p.p.t.}$$

Donc, d'après (2.3) et (2.5),

si, $u \in L^p(0,T;V) \cap L^2(0,T;H)$, $B(u) \in L^2(0,T;\mathcal{L}^2(K,H))$.

Il nous reste à montrer que B est mesurable de $L^p(0,T;V) \cap L^2(0,T;H)$ dans $L^2(0,T;\mathcal{L}^2(K,H))$. Pour cela, $L^2(0,T;\mathcal{L}^2(K,H))$ étant séparable, il nous suffit de montrer que B est continue de $L^p(0,T;V) \cap L^2(0,T;H)$ dans $L^2(0,T;\mathcal{L}^2(K,H))$ faible.

Soit $\{u_n\}$ une suite convergente de $L^p(0,T;V) \cap L^2(0,T;H)$, et u sa limite. Alors, grâce à (2.5), $B(u_n)$ reste dans un borné de $L^2(0,T;\mathcal{L}^2(K,H))$.

Donc, de toute sous-suite de la suite $\{B(u_n)\}$, on peut extraire une sous-suite qui converge dans $L^2(0,T;\mathcal{L}^2(K,H))$ faible. Si nous montrons que toutes les limites de ces sous-suites convergentes sont égales à $B(u)$, cela suffira à prouver que :

$$B(u_n) \rightharpoonup B(u) \quad \text{dans} \quad L^2(0,T;\mathcal{L}^2(K,H)) \text{ faible.}$$

Soit donc une sous-suite $\{B(u_\mu)\}$ telle que :

$$B(u_\mu) \rightharpoonup \chi \quad \text{dans} \quad L^2(0,T;\mathcal{L}^2(K,H)) \text{ faible.}$$

Alors, de la suite $\{u_\mu\}$, on peut extraire une sous-suite $\{u_{\mu_k}\}$ telle que :

$$u_{\mu_k}(t) \to u(t) \quad \text{dans } H, \text{ p.p.t, et donc, grâce à (2.2),}$$

$$B(t,u_{\mu_k}(t)) \to B(t,u(t)) \text{ dans } H, \text{ p.p.t.}$$

D'où nécessairement :

$$\chi = B(u).$$

<u>Théorème 2.1.</u> :

Sous les hypothèses (1.2), (1.3), (1.4), (1.5), (2.1), (2.2), (2.3) (2.4), *si* u_o *est donnée par* (1.9), M *par* (1.11) *et* :

(2.6) $$f \in L^{p'}(\Omega \times]0,T[\,;V') \text{ \textit{non anticipatif, alors l'équation :}}$$

(2.7) $$\begin{cases} du(t) + A(t,u(t))\,dt + B(t,u(t))\,dW(t) = f(t)\,dt + dM(t) \\ u(o) = u_o \end{cases}$$

a une solution unique.

$$u \in L^p(\Omega \times]0,T[\,;V) \cap L^2(\Omega;\, C(0,T,H)),$$

processus bien mesurable à valeurs dans H.

Démonstration :

a) Existence

Nous allons "approximer" la famille d'opérateurs $B(t,\cdot)$ par des familles d'opérateurs $B^n(t,\cdot)$ qui vérifient :

(2.8) $B^n(t,\cdot)$ vérifie les hypothèses de Lipschitz (1.7) et de mesurabilité (1.8).

(2.9) $B^n(t,u) = B(t,u)$ si $|u| \leqslant n$, p.p.t.

(2.10) $||B^n(t,u)||_2 \leqslant ||B(t,u)||_2$, $\forall u \in H$, p.p.t.

On a le :

Lemme 2.2. :

Il existe une suite $B^n(t,\cdot)$ *qui vérifie* (2.8), (2.9), (2.10).

Admettons pour l'instant ce lemme, que nous démontrerons après le Théorème.

On peut appliquer le théorème 1.1 à l'équation.

$$(2.11) \quad \begin{cases} du^n(t) + A(t,u^n(t))\, dt + B^n(t,u^n(t))\, dW(t) = f(t)\, dt + dM(t) \\ u^n(o) = u_o \end{cases}$$

u^n est donc défini de façon unique comme élément de $L^p(\Omega x\,]0,T[\, ;V) \cap L^2(\Omega; C(0,T;H))$, $u^n(t)$ étant bien mesurable à valeurs dans H.

Définissons la suite de temps d'arrêt :

(2.12) $T_n = \inf \{t \leqslant T \; ; \; |u^n(t)| > n\}$.

Sur l'intervalle stochastique $[0,T_n]$, u_n vérifie l'équation (2.7).

De plus, on vérifie aisément que la suite des temps d'arrêt T_n est croissante, et que :

(2.13) si $m > n$, $u^m(t) = u^n(t)$, $\forall\, t \in [0,T_n]$

La relation :

(2.14) $u(t) = u^n(t)$, $\forall\, t \in [0,T_n]$

définit donc un processus à valeurs dans H sur l'intervalle $\bigcup_n [0,T_n]$, qui est solution de (2.7) sur ce même intervalle $\bigcup_n [0,T_n]$.

Il nous reste à montrer que :

(2.15) $\bigcup_n [0,T_n] = [0,T]$ p.s.

(2.16) $u \in L^p(\Omega\times]0,T[;V) \cap L^2(\Omega; C(0,T;H))$

Pour cela, nous allons établir le :

Lemme 2.3. :

u^n *reste dans un borné de :*

$$L^p(\Omega\times]0,T[;V) \cap L^2(\Omega; C(0,T;H)).$$

Admettons un instant ce Lemme, que nous démontrerons après la fin du Théorème 2.1.

Alors, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebicheff) :

$$(2.17)\quad \left\{ \begin{aligned} P(\sup_{t\leq T} |u^n(t)| > n) &\leq \frac{E(\sup_{t\leq T} |u^n(t)|^2)}{n^2} \\ &\leq \frac{C}{n^2} \end{aligned} \right.$$

Donc la suite décroissante d'événements $\{T_n < T\}$ vérifie :

$P(\bigcap_n \{T_n < T\}) = 0$, ce qui signifie que :

(2.18) $P(\bigcup_n \{T_n = T\}) = 1$

(2.15) est démontré, et de plus :

(2.19) p.s., $u^n(t) \to u(t)$ dans H, uniformément en t.

Mais alors, d'après le Lemme 2.3,

(2.20) $u^n \rightharpoonup u$ dans $L^p(\Omega x \,]0,T[\,;V)$ faible et dans $L^2(\Omega; L^\infty(0,T;H))$ $*$ faible.

(2.16) résulte alors de (2.19) et (2.20).

b) Unicité

Introduisons la suite croissante de temps d'arrêt :

$$S_n = \inf \{t \leqslant T \; ; \; |u(t)| > n\} .$$

Alors $u(t) = u^n(t)$, $\forall\, t \in [0,S_n]$, où u^n est l'unique solution de l'équation (2.11).

Or $\bigcup_n [0,S_n] = [0,T]$ p.s.

Donc u est unique à l'indistinguabilité près.

Démonstration du Lemme 2.3. :

Il résulte de (2.4), (2.5) et (2.10) :

(2.21) $$2 < A(t,u),u > - ||B^n(t,u)||_2^2 + \lambda|u|^2 + \nu \geqslant \alpha \quad ||u||^p$$

(2.22) $$||B^n(t,u)||_2^2 \leqslant 2\beta \; ||u||^p + \lambda|u|^2 + \nu$$

Appliquons le Théorème 2.1. du Chapitre 2 à u^n :

(2.23) $$\left\{ \begin{aligned} & |u^n(t)|^2 + 2\int_0^t < A(u^n),\, u^n > ds + 2\int_0^t (u^n, B^n(u^n))\; dW(s) = |u_0|^2 + \\ & + 2\int_0^t <f,\, u^n > ds + 2\int_0^t (u^n,\, dM) + Tr << M - \int_0^{\cdot} B^n(u^n)\; dW >>_t \end{aligned} \right.$$

Il résulte de ce que :

$$u^n \in L^p(\Omega\mathrm{x}\,]0,T[\,;V) \cap L^2(\Omega;\, C(0,T;H))$$

que les intégrales stochastiques dans (2.23) sont des martingales, car la racine carrée de leur processus croissant appartient à $L^1(\Omega)$. On peut donc prendre l'espérance mathématique dans (2.23) :

$$(2.24)\quad \left\{ \begin{aligned} & E(|u^n(t)|^2) + E\int_o^t \left[2 < A(u^n),u^n> - \|B^n(u^n)\|_2^2\right] ds = \\ & = E(|u_o|^2) + 2E\int_o^t <f,\, u^n> ds + E|M(t)|^2 - 2E(M(t), \int_o^t B^n(u^n)dW) \end{aligned} \right.$$

On tire de (2.21) et (2.24) :

$$(2.25)\quad \left\{ \begin{aligned} & E(|u^n(t)|^2) + \alpha E\int_o^t \|u^n(s)\|^p ds \leqslant E(|u_o|^2) + \nu t + \lambda E\int_o^t |u^n(s)|^2 ds \\ & + 2E\left[\left(\int_o^t \|f\|_*^{p'}\, ds\right)^{1/p'}\left(\int_o^t \|u^n\|^p ds\right)^{1/p}\right] + E\,|M(t)|^2 + \\ & + 2\left(E\{|M(t)|^2\}\ E\int_o^t \|B^n(u^n)\|_2^2\, ds\right)^{1/2} \end{aligned} \right.$$

Mais :

$$(2.26)\qquad 2E\left[\left(\int_o^t \|f\|_*^{p'} ds\right)^{1/p'}\left(\int_o^t \|u^n\|^p ds\right)^{1/p}\right] \leqslant \frac{\alpha}{3}\, E\int_o^t \|u^n(s)\|^p ds + $$

$$+ C_1\, E\int_o^t \|f\|_*^{p'} ds$$

$$(2.27)\qquad 2\left(E\{|M(t)|^2\}\ E\int_o^t \|B^n(u^n)\|_2^2\, ds\right)^{1/2} \leqslant \frac{\alpha}{6\beta}\, E\int_o^t \|B^n(u^n)\|_2^2\, ds + $$

$$+ C_2\, E\,(|M(t)|^2)$$

Or, grâce à (2.22) :

$$(2.28) \qquad \frac{\alpha}{6\beta} E\int_o^t ||B^n(u^n)||_2^2 ds \leqslant \frac{\alpha}{3} E\int_o^t ||u^n(s)||^p ds + $$

$$+ \frac{\alpha\lambda}{6\beta} E\int_o^t |u^n(s)|^2 ds + \frac{\alpha\nu}{6\beta} t$$

D'après (2.25), (2.26) et (2.28) :

$$(2.29) \quad \left\{ \begin{array}{l} E(|u^n(t)|^2 + \frac{\alpha}{3} E\int_o^t ||u^n(s)||^p ds \leqslant E(|u_o|^2) + (1 + \frac{\alpha}{6\beta}) \nu T + \\ \quad + C_1 E \int_o^T ||f||_*^{p'} ds + (1+C_2) E(|M(T)|^2) + \\ \quad + \lambda(1+ \frac{\alpha}{6\beta}) \int_o^t E(|u^n(s)|^2) ds \end{array} \right.$$

De (2.29), on tire, en utilisant le Lemme de Gronwall :

$$(2.30) \qquad \sup_{t\leqslant T} E(|u^n(t)|^2) \leqslant k_1 .$$

Et donc, en reportant (2.30) dans (2.29) :

$$(2.31) \qquad E \int_o^T ||u^n(t)||^p dt \leqslant k_2$$

Par ailleurs, on tire de (2.23) :

$$|u^n(t)|^2 + \alpha\int_o^t ||u^n(s)||^p ds \leqslant |u_o|^2 + \nu t + \lambda\int_o^t |u^n(s)|^2 ds +$$

$$+ 2 \int_o^t < f,u^n > ds + 2 \int_o^t (u^n,dM) - 2 \int_o^t (u^n,B^n(u^n)) dW(s) -$$

$$- 2 \,\mathrm{Tr} << M, \int_o^{\cdot} B^n(u^n) dW >>_t + \mathrm{Tr} << M >>_t$$

$$(2.32)\quad \left\{\begin{array}{l} E(\sup\limits_{t\leq T} |u^n(t)|^2) \leq E\left(\sup\limits_{t\leq T} \{|u^n(t)|^2 + \alpha\int_o^t ||u^n(s)||^p ds\}\right) \leq \\ \leq E(|u_o|^2) + \nu T + \lambda E \int_o^T |u^n(t)|^2\, dt + \frac{2}{p} E\int_o^T ||u^n(t)||^p\, dt + \\ + \frac{2}{p'} E \int_o^T ||f(t)||_*^{p'} dt + 2E(|M(t)|^2) + E\int_o^T ||B^n(u^n)||_2^2\, dt + \\ + 2E\left(\sup\limits_{t\leq T}\left|\int_o^t (u^n, dM)\right|\right) + 2E\left(\sup\limits_{t\leq T}\left|\int_o^t (u^n, B^n(u^n))\, dW\right|\right) \end{array}\right.$$

Or, d'après le Théorème 1.3 de la 1ère partie :

$$(2.33)\quad 2E\left(\sup\limits_{t\leq T}\left|\int_o^t (u^n, dM)\right|\right) \leq 6E\left[\left(\int_o^T |u^n(t)|^2\, d\,\{Tr <<M>>_t\}\right)^{1/2}\right]$$

$$\leq \frac{1}{3} E\left(\sup\limits_{t\leq T} |u^n(t)|^2\right) + C_3\, E(|M(T)|^2)$$

$$(2.34)\quad 2E\left(\sup\limits_{t\leq T}\left|\int_o^t (u^n, B^n(u^n))dW\right|\right) \leq 6E\left[\left(\int_o^T |u^n|^2 . ||B^n(u^n)||_2^2\, dt\right)^{1/2}\right]$$

$$\leq \frac{1}{3} E\left(\sup\limits_{t\leq T} |u^n(t)|^2\right) + C_3 E \int_o^T ||B^n(u^n)||_2^2 dt$$

Il résulte de (2.22), (2.30), (2.31), (2.32), (2.33) et (2.34) que :

$$(2.35)\quad E(\sup\limits_{t\leq T} |u^n(t)|^2) \leq k_3$$

Le Lemme découle de (2.31) et (2.35). ▒

<u>Démonstration du Lemme 2.2.</u> :

Soit k_n la constante de Lipschitz des $B(t,.)$ sur la boule $\{|u| \leq n\}$.

On pose :

$$\rho = n + \frac{1}{k_n} \operatorname*{sup\,ess}_t \left(\sup_{|u| \leqslant n} ||B(t,u)||_2\right).$$

Soit k_ρ la constante de Lipschitz des $B(t,.)$ sur la boule $\{|u| \leqslant \rho\}$.
Si $u \in H$, on note $[u]_n$ la projection de u sur la boule $\{|u| \leqslant n\}$.
Si $x \in \mathbb{R}$, on note $x^+ = \sup (x,0)$.

On définit alors $B^n(t,u)$ par :

$$B^n(t,u) = \left(1 - \frac{k_\rho \,.\, |u - [u]_n|}{||B(t,[u]_n)||_2}\right)^+ B(t,[u]_n) \ , \tag{2.36}$$

avec la convention $B^n(t,u) = 0$ si $||B(t,[u]_n)||_2 = 0$

Nous allons montrer que la suite $B^n(t,.)$, définie par (2.36), vérifie (2.8), (2.9) et (2.10).

Pour alléger les notations nous écrirons $B^n(u)$ et $B(u)$ au lieu de $B^n(t,u)$ et $B(t,u)$. Toutes les inégalités ci-dessous seront vraies p.p.t.

(2.9) est immédiat.

Remarquons que grâce à la définition de ρ, $B^n(t,u) = 0$ si $|u| \geqslant \rho$. En effet, si $|u| \geqslant \rho$, $|u-[u]_n| \geqslant \rho - n$.

Mais par définition de ρ,

$$\frac{k_\rho}{||B([u]_n)||_2} \geqslant \frac{1}{\rho-n} \text{ ,d'où si } |u| \geqslant \rho :$$

$$\left(1 - \frac{k_\rho \ |u - u_n|}{||B([u]_n)||_2}\right)^+ = 0$$

Il suffit donc de vérifier (2.10) pour les u tels que $|u| < \rho$. Or, si $|u| < \rho$,

$$||B(u) - B([u]_n)||_2 \leqslant k_\rho \ |u - [u]_n|$$

D'où :

$$||B([u]_n)||_2 \leq ||B(u)||_2 + k_\rho |u-[u]_n|$$

Mais :

$$||B^n(u)||_2 \leq (||B([u]_n)||_2 - k_\rho|u-[u]_n|)^+$$

Donc :

$$||B^n(u)||_2 \leq ||B(u)||_2$$

Montrons maintenant que $\forall u, v \in H$,

$$||B^n(u) - B^n(v)||_2 \leq (2k_n + k_\rho) |u-v| \tag{2.37}$$

Considérons trois cas :

<u>1er cas</u> : $||B^n(u)||_2 = ||B^n(v)||_2 = 0$. (2.37) est vérifié.

<u>2ème cas</u> : $||B^n(u)||_2 = 0$, $||B^n(v)||_2 > 0$

Alors nécessairement :

$$||B([u]_n)||_2 \leq k_\rho |u-[u]_n| \tag{2.38}$$

$$||B([v]_n)||_2 \geq k_\rho |v-[v]_n|$$

Donc :

$$\begin{aligned} ||B^n(u) - B^n(v)||_2 &= ||B^n(v)||_2 \\ &= ||B([v]_n)||_2 - k_\rho |v-[v]_n| \\ &= ||B([v]_n)||_2 - k_\rho |u-[u]_n| + \\ &\quad + k_\rho (|u-[u]_n| - |v-[v]_n|) \end{aligned} \tag{2.39}$$

Or on vérifie aisément que :

$$\text{(2.40)} \qquad \Big|\, |u-[u]_n| - |v-[v]_n| \,\Big| \leqslant |u-v|$$

Il résulte de (2.38), (2.39) et (2.40) :

$$||B^n(u) - B^n(v)||_2 \leqslant ||B([v]_n)||_2 - ||B([u]_n)||_2 + \\ + k_\rho \; |u-v|$$

$$\leqslant ||B([v]_n) - B([u]_n)||_2 + k_\rho |u-v|$$

$$\leqslant (k_n + k_\rho) \; |u-v|$$

<u>3ème Cas</u> : $||B^n(u)||_2 > 0$, $||B^n(v)||_2 > 0$

Alors :

$$||B^n(u) - B^n(v)||_2 = \left\| \left(1 - \frac{k_\rho |u - [u]_n|}{||B([u]_n)||_2}\right) B([u]_n) - \right.$$

$$\left. - \left(1 - \frac{k_\rho \; |v-[v]_n|}{||B([v]_n)||_2}\right) B([v]_n) \right\|_2$$

$$\leqslant \left| \frac{k_\rho \; |u-[u]_n|}{||B([u]_n)||_2} - \frac{k_\rho \; |v-[v]_n|}{||B([v]_n)||_2} \right| . ||B([u]_n)||_2 +$$

$$+ ||B([u]_n) - B([v]_n)||_2$$

$$\leqslant k_\rho \Big| |u-[u]_n| - | v - [v]_n| \Big| \quad +$$

$$+ \frac{k_\rho |v-[v]_n|}{||B([v]_n)||_2} \Big| \, ||B([u]_n||_2 - ||B([v]_n)||_2 \Big|$$

$$+ ||B([u]_n) - B([v]_n)||_2$$

$$\text{Or } ||B^n(v)||_2 > 0 \implies \frac{k_\rho |v-[v]_n|}{||B([v]_n)||_2} < 1$$

Donc :

$$||B^n(u) - B^n(v)||_2 \leqslant (k_\rho + 2k_n) |u-v|$$

Remarque 2.2. :

Nous avons été obligé de remplacer :

l'hypothèse : $f \in L^2(\Omega; L^1(0,T;H)) + L^{p'}(\Omega x]0,T[;V')$;

par : $f \in L^{p'}(\Omega x]0,T[;V')$

Avec la première hypothèse, nous n'aurions pas pu établir (2.31).

En fait, nous aurions pu nous donner :

$$f \in L^2(\Omega x]0,T[;H) + L^{p'}(\Omega x]0,T[;V')$$

Or, dans la plupart des applications, $p \geqslant 2$, donc $p' \leqslant 2$, auquel cas cette dernière hypothèse est identique à celle que nous avons faite, que nous avons choisie pour simplifier les écritures.

§3. METHODE DE GALERKIN

Les hypothèses concernant les espaces V, H et K, l'espace de probabilité $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, et la famille de σ-algèbres $\mathfrak{F}_t$, sont les mêmes que dans les paragraphes précédents.

Soit $A(t,.)$ une famille d'opérateurs de V dans V' définis pour presque tout $t \in]0,T[$, et un nombre $p > 1$, qui vérifient :

(3.1) Bornitude : $\exists\, \beta$ t.q.

$$||A(t,u)||_* \leqslant \beta \, ||u||^{p-1} , \; \forall u \in V, \text{ p.p.t.}$$

(3.2) Hémicontinuité :

$\theta \to < A(t,u+\theta v), w >$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $\forall u,v, w \in V$, p.p.t.

(3.3) Mesurabilité : $\forall u \in V$, $t \to A(t,u)$ est Lebesgue mesurable, de $]0,T[$ à valeurs dans V'.

Soit $B(t,.)$ une famille d'opérateurs de V dans $\mathcal{L}^2(K,H)$, définis pour presque tout $t \in]0,T[$, qui vérifie :

(3.4) $\forall h \in H, \forall k \in K, \forall N \in \mathbb{R}_+, \exists L$ t.q. :

$$|(h, B(t,u)\, k) - (h, B(t,v)\, k)| \leqslant L\, ||u-v||$$

$$\forall u,v \in V \text{ t.q. } ||u||, ||v|| \leqslant N$$

(3.5) $\forall u \in V$, $t \to B(t,u)$ est Lebesgue mesurable, de $]0,T[$ à valeurs dans $\mathcal{L}^2(K;H)$.

On fait d'autre part les deux hypothèses fondamentales suivantes sur les opérateurs $A(t,.)$ et $B(t,.)$:

(3.6) Coercivité : $\exists\, \alpha > 0, \lambda, \nu$ tels que :

$$2 < A(t,u), u > + \lambda\, |u|^2 + \nu \geqslant \alpha\, ||u||^p + ||B(t,u)||_2^2 ,$$

$$\forall u \in V, \text{ p.p.t.}$$

(3.7) Monotonie :

$$2 < A(t,u) - A(t,v), u-v > + \lambda\, |u-v|^2 \geqslant ||B(t,u) - B(t,v)||_2^2$$

$$\forall u, v \in V, \text{ p.p.t.}$$

Remarque 3.1. :

L'hypothèse de coercivité (3.6) implique que $A(t,.)$ est coercif au sens de l'hypothèse (1.1). Donc grâce au Lemme 3.2. du Chapitre I, et à l'hypothèse (3.1), si $u \in L^p(\Omega \times]0,T[;V)$, $A(u) \in L^{p'}(\Omega \times]0,T[;V')$; et si u est non anticipatif $A(u)$ est non anticipatif.

Remarque 3.2. :

Grâce à (3.4), (3.5), (3.7) et (3.1), on montre aisément, par une démonstration analogue à celle du Lemme 2.1, que si $u \in L^p(\Omega \times]0,T[\,;V) \cap L^2(\Omega \times]0,T[\,;H)$, $B(u) \in L^2(\Omega \times]0,T[\,;\mathcal{L}^2(K,H))$. De même si $u \in L^o(\Omega;\ L^p(0,T;V)) \cap L^o(\Omega;L^2(0,T;H))$, alors $B(u) \in L^o(\Omega;\ L^2(0,T;\mathcal{L}^2(K,H)))$.

De même, on montre que p.p.t, l'application $u \to B(t,u)$ est continue de V fort dans $\mathcal{L}^2(K,H)$ faible. $\mathcal{L}^2(K,H)$ étant séparable, cette application est donc mesurable de V dans $\mathcal{L}^2(K,H)$. Il en résulte que si :

$u \in L^o(\Omega;\ L^p(0,T;V)) \cap L^o(\Omega;\ L^2(\,]0,T[\,;H))$ est non anticipatif,

$B(u) \in L^o(\Omega;\ L^2(0,T;\mathcal{L}^2(K;H)))$ est non anticipatif. ▨

On se donne enfin :

(3.8) $\quad u_o \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_o, P\ ;\ H)$.

(3.9) $\quad f \in L^{p'}(\Omega \times]0,T[\,;V')$ non anticipatif.

(3.10) $\quad M \in \mathcal{M}^2(0,T;H)$.

(3.11) $\quad$ W(t) un processus de Wiener défini sur K, d'opérateur de covariance J, l'isomorphisme canonique de K' sur K, adapté à la famille $\mathcal{F}_t$.

On étudie l'équation :

$$(3.12)\qquad \begin{cases} du(t) + A(t,u(t))\,dt + B(t,u(t))\,dW(t) = f(t)\,dt + dM(t) \\ u(o) = u_o \end{cases}$$

On va établir le :

Théorème 3.1. :

Sous les hypothèses (3.1) ...(3.11), *l'équation* (3.12) *a une solution unique :*

$$u \in L^p(\Omega \times]0,T[\,;V) \cap L^2(\Omega;\, C(0,T;H)),$$

processus bien mesurable à valeurs dans H.

Démonstration :

a) Unicité :

Soient u et v deux éléments de $L^p(\Omega \times]0,T[\,;V) \cap L^2(\Omega;\, C(0,T;H))$,

processus bien mesurables à valeurs dans H, solutions de l'équation (3.12).

Alors :

$$(3.13)\quad \begin{cases} d(u(t)-v(t)) + \left[A(t,u(t)) - A(t,v(t))\right] dt + \left[B(t,u(t) - B(t,v(t))\right] \\ \hfill dW(t) = 0 \\ \hfill u(o) - v(o) = 0 \end{cases}$$

Appliquons le Théorème 3.2. du Chapitre 2 à u(t)-v(t) :

$$E(|u(t) - v(t)|^2) + 2E\int_o^t < A(u) - A(v),\, u-v > ds =$$
$$= E\int_o^t ||B(u)-B(v)||_2^2\, ds$$

Donc, grâce à l'hypothèse de monotonie (3.7) :

$$(3.14)\qquad E(|u(t)-v(t)|^2) \leqslant \lambda\int_o^t E(|u(s) - v(s)|^2)\, ds$$

D'après le Lemme de Gronwall, (3.14) entraîne :

$$E(|u(t)-v(t)|^2) = 0,\quad \forall\, t \in [0,T]$$

b) Existence :

Nous allons approximer l'équation (3.12) par la méthode de Galerkin, établir des estimations sur les solutions approchées, et passer à la limite en utilisant la monotonie.

La démonstration va se faire en quatre parties.

i) Equation approchée

Soit $\{\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n, \ldots\}$ une base orthonormée de H formée d'éléments de V.

On notera $V_n = H_n = V'_n$ l'espace vectoriel engendré par le système de vecteurs $\{\ell_1, \ldots, \ell_n\}$.

Soit $P_n \in \mathcal{L}(H, H_n)$ l'opérateur de projection orthogonale dans H sur H_n. On peut étendre P_n en un opérateur $\tilde{P}_n$ de V' sur V'_n défini par :

$$\tilde{P}_n u = \sum_{i=1}^{n} \langle u, \ell_i \rangle \ell_i \quad , \quad u \in V'$$

Soit $\{k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots\}$ une base orthonormée de l'espace K, et soit $\pi_n \in \mathcal{L}(K, K_n)$ l'opérateur de projection dans K sur $K_n = \mathrm{Sp}\left[k_1, \ldots, k_n\right]$.

Etudions l'équation :

$$(3.15)\quad \begin{cases} d(u^n(t), \ell_i) + \langle A(t, u^n(t)), \ell_i \rangle dt + (\ell_i, B(t, u^n(t))\, d(\pi_n W(t)) \\ \qquad = \langle f(t), \ell_i \rangle dt + d(M(t), \ell_i) \quad , \quad i = 1 \ldots n \\ u^n(o) = P_n u_o \end{cases}$$

Nous allons réécrire l'équation (3.15) sous une autre forme :

Soit $A^n(t,.)$ la famille d'opérateurs de V_n dans V'_n définie par :

$$A^n(t,u) = \tilde{P}_n A(t,u) \quad , \quad u \in V_n$$

Soit $B^n(t,.)$ la famille d'opérateurs de H_n dans $\mathcal{L}^2(K_n, H_n)$ définie par :

$$B^n(t,u) = P_n B(t,u) \quad , \quad u \in H_n$$

Soit $W^n(t)$ le processus de Wiener à valeurs dans K_n défini par :

$$W^n(t) = \Pi_n W(t)$$

Soient :

$$f^n = P_n f \in L^{p'}(\Omega \times]0,T[; V'_n)$$

$$M^n = P_n M \in \mathcal{M}^2(0,T;H_n)$$

$$u_o^n = P_n u_o \in L^2(\Omega;H_n)$$

L'équation (3.15) s'écrit alors :

$$\text{(3.16)} \quad \begin{cases} du^n(t) + A^n(t,u^n(t))\, dt + B^n(t,u^n(t))\, dW^n(t) = \\ \qquad\qquad = f^n(t)\, dt + dM^n(t) \\ u^n(o) = u_o^n \end{cases}$$

L'équation (3.16) peut être considérée comme une équation différentielle stochastique de Ito dans $\mathbb{R}^n$, à laquelle on ne peut pas appliquer les résultats classiques : A^n ne vérifie aucune hypothèse de Lipschitz.

Mais on peut appliquer à cette équation les résultats du §2. En effet, on remarque aisément que A^n, B^n, W^n, f^n, M^n et u_o^n vérifient les hypothèses du Théorème 2.1, si on y remplace les espaces V, H, V' par les espaces V_n, H_n et V'_n (si $B^n(t,o) \not\equiv 0$, on modifie B^n et M^n pour s'y ramener).

L'équation (3.16) a donc une solution unique :

$$u^n \in L^p(\Omega \times]0,T[;V_n) \cap L^2(\Omega; C(0,T;H_n))$$

où u^n est un processus bien mesurable à valeurs dans H_n.

En utilisant les injections naturelles, on remarque :

(3.17) $\quad u^n \in L^p(\Omega \times \,]0,T[\,;V) \cap L^2(\Omega;\, C(0,T;H))$

ii) Estimations à priori

Appliquons le Théorème 3.1. du Chapitre 2 à $u^n(t)$:

(3.18)
$$\left\{\begin{aligned} & |u^n(t)|^2 + 2\int_o^t < A^n(u^n),u^n > ds + 2\int_o^t (u^n,B^n(u^n))\, dW^n(s) = \\ & = |u_o^n|^2 + 2\int_o^t < f^n,\, u^n > ds + 2\int_o^t (u^n,dM^n) + \\ & \qquad + \mathrm{Tr} << M^n - \int_o^{\cdot} B^n(u^n)\, dW^n >>_t \end{aligned}\right.$$

On tire de (3.18) :

(3.19)
$$\left\{\begin{aligned} & |u^n(t)|^2 + 2\int_o^t < A(u^n),u^n > ds + 2\int_o^t (u^n,B(u^n))\, dW^n(s) = \\ & = |u_o^n|^2 + 2\int_o^t < f^n,\, u^n > ds + 2\int_o^t (u^n,dM) + \\ & \qquad + \mathrm{Tr} << P_n M - P_n \int_o^{\cdot} B(u^n) dW^n >>_t \end{aligned}\right.$$

Si $N(t) = M(t) - \int_o^t B(u^n)\, dW^n$,

$$\mathrm{Tr} << P_n N >>_t = \sum_{t=1}^{n} (N,\, \ell_i)>_t$$

$$\leqslant \mathrm{Tr} << N >>_t$$

De plus :

$$\mathrm{Tr} << \int_o^{\cdot} B(u^n)\, dW^n >>_t = \int_o^t ||B(u^n)\,\pi_n||_2^2\, ds$$

$$\leqslant \int_o^t ||B(u^n)||_2^2\, ds$$

On tire donc de (3.19) :

$$(3.20)\quad \left\{ \begin{aligned} & |u^n(t)|^2 + \int_o^t \left[2 < A(u^n), u^n > - ||B(u^n)||_2^2\right] ds \leqslant |u_o|^2 + \\ & + 2\int_o^t < f,u^n > + 2\int_o^t (u^n,dM) - 2\int_o^t (u^n,B(u^n)) \pi_n dW(s) + \\ & + Tr<< M >>_t - 2\, Tr<< M, \int_o^{\cdot} B(u^n)\, \pi_n\, dW >>_t \end{aligned} \right.$$

Grâce à l'hypothèse de coercivité (3.6), on déduit de (3.20) :

$$(3.21)\quad \left\{ \begin{aligned} & |u^n(t)|^2 + \alpha\int_o^t ||u^n(s)||^p ds \leqslant |u_o|^2 + \nu t + \lambda\int_o^t |u^n|^2 ds + \\ & + 2\int_o^t < f,u^n > ds + 2\int_o^t (u^n,dM) - 2\int_o^t (u^n,B(u^n)) \pi_n dW(s) + \\ & + Tr<< M >>_t + 2(Tr<< M >>_t)^{1/2}\left(\int_o^t ||B(u^n)||_2^2 ds\right)^{1/2} \end{aligned} \right.$$

Grâce à (3.17), on peut prendre l'espérance mathématique dans (3.21), d'où:

$$(3.22)\quad \left\{ \begin{aligned} & E\,|u^n(t)|^2 + \alpha E\int_o^t ||u^n(s)||^p ds \leqslant E\,|u_o|^2 + \nu t + \lambda E\int_o^t |u^n|^2 ds + \\ & + 2E\int_o^t < f,u^n > ds + E\,|M(t)|^2 + \\ & + 2(E|M(t)|^2)^{1/2}\left(E\int_o^t ||B(u^n||_2^2 ds\right)^{1/2} \end{aligned} \right.$$

Or :

$$(3.23)\qquad 2E\int_o^t < f(s),u^n(s) > ds \leqslant \frac{\alpha}{3}\, E\int_o^t ||u^n(s)||^p ds + C'E\int_o^t ||f(s)||_*^{p'} ds$$

$$(3.24)\quad \begin{cases} 2(E|M(t)|^2)^{1/2}\left(E\int_0^t ||B(u^n)||_2^2\, ds\right)^{1/2} \leqslant \frac{\alpha}{6\beta} E\int_0^t ||B(u^n)||_2^2\, ds + \\ \qquad + C''E|M(t)|^2 \\ \qquad \leqslant \frac{\alpha}{3} E\int_0^t ||u^n(s)||^p ds + \\ \qquad + \frac{\alpha\nu}{6\beta} t + \frac{\alpha\lambda}{6\beta} E\int_0^t |u^n(s)|^2\, ds + \\ \qquad + C''E\, |M(t)|^2 \end{cases}$$

En regroupant (3.22), (3.23) et (3.24), on obtient :

$$(3.25)\qquad E|u^n(t)|^2 + \frac{\alpha}{3} E\int_0^t ||u^n(s)||^p ds \leqslant C_o + C_1 t + C_2\int_0^t E|u^n(s)|^2\, ds$$

$$\forall\, t \in [0,T]$$

où :

$$(3.26)\quad \begin{cases} C_o = E|u_o|^2 + C'E\int_0^T ||f||_*^{p'}\, ds + (1+C'')\, E|M(t)|^2 \\ C_1 = \nu(1+\frac{\alpha}{6\beta}) \\ C_2 = \lambda(1+\frac{\alpha}{6\beta}) \end{cases}$$

De (3.25), on déduit, en utilisant le Lemme de Gronwall que :

$$(3.27)\qquad \sup_{t\leqslant T} E\, |u^n(t)|^2 \leqslant C_3$$

Et aussi :

$$(3.28)\qquad E\int_0^T ||u^n(t)||^p\, dt \leqslant C_4$$

On déduit de (3.21) :

$$(3.29)\quad \begin{cases} E\left(\sup\limits_{t\leq T} |u^n(t)|^2\right) \leq E\,|u_o|^2 + \nu T + \lambda E \displaystyle\int_o^T |u^n(t)|^2\, ds \;+ \\ \quad + 2E\displaystyle\int_o^T |<f,u^n>|\, dt + 2E\left(\sup\limits_{t\leq T} \left|\int_o^t (u^n, dM)\right|\right) + \\ \quad + 2E\left(\sup\limits_{t\leq T}\left|\displaystyle\int_o^t (u^n, B(u^n)\;\pi_n dW\right|\right) + 2E\,|M(T)|^2 + E\displaystyle\int_o^T ||B(u^n)||_2^2\, dt \end{cases}$$

Mais grâce à (3.1), (3.6), (3.27) et (3.28) :

$$(3.30)\qquad E\int_o^T ||B(u^n)\;||_2^2\, dt \;\leq\; C_5$$

$$(3.31)\qquad E|u_o|^2 + \nu T + \lambda E\int_o^T |u^n(t)|^2\, dt + 2E\int_o^T |<f,u^n>|\,dt + 2E\,|M(T)|^2 \leq C_6$$

Par ailleurs, d'après le Théorème 1.3. de la 1ère partie,

$$(3.32)\quad \begin{cases} 2E\left(\sup\limits_{t\leq T}\left|\displaystyle\int_o^t (u^n, dM)\right|\right) \leq 6E\left[\left(\displaystyle\int_o^T |u^n(t)|^2\; d\,\{Tr<< M >>_t\}\right)^{1/2}\right] \\ \qquad\qquad \leq \dfrac{1}{3}\, E\left(\sup\limits_{t\leq T} |u^n(t)|^2\right) + C_7\, E\,|M(T)|^2 \end{cases}$$

$$(3.33)\quad \begin{cases} 2E\left(\sup\limits_{t\leq T}\left|\displaystyle\int_o^t (u^n, B(u^n)\;\pi_n dW\right|\right) \leq 6E\left[\left(\displaystyle\int_o^T |u^n|^2 . ||B(u^n)||_2^2\, dt\right)^{1/2}\right] \\ \qquad\qquad \leq \dfrac{1}{3}\, E\left(\sup\limits_{t\leq T} |u^n(t)|^2\right) + C_8 E\displaystyle\int_o^T ||B(u^n)||_2^2 dt \end{cases}$$

Il résulte de (3.29), (3.30), (3.31), (3.32) et (3.33) :

$$(3.34)\qquad E\left(\sup\limits_{t\leq T} |u^n(t)|^2\right) \leq C_9$$

D'après (3.28), (3.34), (3.1) et (3.6) :

$$(3.35)\quad \begin{cases} u^n \text{ reste dans un borné de } L^p(\Omega x\,]0,T[\, ;V) \cap L^2(\Omega;\, C(0,T;H)) \\ A(u^n) \text{ reste dans un borné de } L^{p'}(\Omega x\,]0,T[\, ;V') \\ B(u^n) \text{ reste dans un borné de } L^2(\Omega x\,]0,T[\, ;\mathcal{L}^2(K,H)) \end{cases}$$

iii) Passage à la limite faible

Grâce à (3.35), on peut extraire de la suite $\{u^n\}$ une sous-suite $\{u^\mu\}$ telle que :

$u^\mu \rightharpoonup u$ dans $L^p(\Omega x\,]0,T[\, ;V)$ faible et dans $L^2(\Omega;\, L^\infty(0,T;H))$ $*$faible.

$u^n(T) \rightharpoonup \xi$ dans $L^2(\Omega;H)$ faible.

$A(u^n) \rightharpoonup \chi$ dans $L^{p'}(\Omega x\,]0,T[\, ;V')$ faible.

$B(u^n) \rightharpoonup \zeta$ dans $L^2(\Omega x\,]0,T[\, ;\mathcal{L}^2(K,H))$ faible.

L'ensemble des (classes de) processus non anticipatifs de $L^p(\Omega x\,]0,T[\, ;V)$ $\left[\text{resp. } L^{p'}(\Omega x\,]0,T[\, ;V'), \text{ resp. } L^2(\Omega x\,]0,T[\, ;\mathcal{L}^2(K,H))\right]$ est un sous-espace vectoriel fermé, donc faiblement fermé de $L^p(\Omega x\,]0,T[\, ;V)$ $\left[\text{resp } L^{p'}(\Omega x\,]0,T[\, ;V'), \text{resp. } L^2(\Omega x\,]0,T[\, ;\mathcal{L}^2(K,H))\right]$. En effet, les convexes fermés d'un espace de Banach sont fermés pour la topologie faible.

Donc u, χ et ζ sont non anticipatifs.

Posons :

$$\theta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Si $\varphi(t)$ est une fonction définie sur $[0,T]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, on notera $\tilde{\varphi}(t)$ la fonction définie sur $]-\rho\,,\ T+\rho[$ (où $\rho > 0$) par :

$$\tilde{\varphi}(t) = \begin{cases} \varphi(t) \text{ si } t \in [0,T] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

L'équation (3.15) peut se réécrire (avec $n = \mu$) :

$$(3.36) \quad \begin{cases} \widetilde{(u^\mu(t), \ell_i)} + \widetilde{\int_0^t < A(u^\mu), \ell_i > ds} + \widetilde{\int_0^t (\ell_i, B(u^\mu))\, \pi_\mu dW(s)} = \\ = \widetilde{\int_0^t < f, \ell_i > ds} + \widetilde{M}(t) + (u_0, \ell_i)\, \theta(t) - (u^\mu(T), \ell_i)\, \theta(t-T) \end{cases}$$

$$\forall\, t \in \left]-\rho, T+\rho\right[\quad , i = 1 \ldots \mu$$

L'application :

$$\phi \rightarrow \int_0^{\cdot} \phi(s)\, dW(s).$$

est linéaire continue du sous-espace de $L^2(\Omega x \left]0,T\right[; \mathcal{L}^2(K,\mathbb{R}))$ des (classes de) processus non anticipatifs, à valeurs dans $L^2(\Omega x \left]0,T\right[)$. Cette application est donc continue pour les topologies faibles.

Montrons que :

$$(3.37) \qquad B(u^\mu)\, \pi_\mu \rightarrow \zeta \quad \text{dans } L^2(\Omega x \left]0,T\right[; \mathcal{L}^2(K,H)) \text{ faible.}$$

Cette convergence est équivalente à :

$$E \int_0^t \operatorname{Tr}\left[Q^* B(u^\mu)\, \pi_\mu\right] dt \rightarrow E \int_0^T \operatorname{Tr}\left[Q^* \zeta\right] dt$$

$$\forall\; Q(.,.) \in L^2(\Omega x \left]0,T\right[; \mathcal{L}^2(K,H))$$

Or :

$$E \int_0^T \operatorname{Tr}\left[Q^* B(u^\mu)\, \pi_\mu\right] dt = E \int_0^T \operatorname{Tr}\left[\pi_\mu^*\, Q^*\, B(u^\mu)\right] dt$$

$$= ((B(u^\mu),\; Q\, \pi_\mu)),$$

si $((.,.))$ désigne le produit scalaire dans l'espace de Hilbert $L^2(\Omega x \left]0,T\right[; \mathcal{L}^2(K,H))$.

Donc pour montrer (3.37), il suffit de montrer :

$$((B(u^\mu), Q\,\pi_\mu)) \to ((\zeta, Q))$$

et pour cela, il suffit que :

$$Q\,\pi_\mu \quad \to \quad Q \qquad \text{dans } L^2(\Omega x\,]0,T[\,;\, \mathcal{L}^2(K,H)) \text{ fort}$$

Or, d'après le Théorème 2.3. de la Ière partie,

$$||Q\,(t,\omega)\ \pi_\mu - Q\,(t,\omega)||_2^2 \to 0 \qquad \text{p.p.t, p.s.,}$$

et donc grâce au Théorème de convergence dominée de Lebesgue,

$$E\int_0^T ||Q\pi_\mu - Q||_2^2\ dt \to 0$$

On peut donc passer à la limite dans (3.36), grâce à (3.35) et (3.37) :

$$(3.38)\quad \begin{cases} \widetilde{(u(t),\ \ell_i)} + \widetilde{\displaystyle\int_0^t <\chi,\ell_i>\, ds} + \widetilde{\displaystyle\int_0^t (\ell_i,\zeta)\ dW(s)} = \\[2ex] = \widetilde{\displaystyle\int_0^t <f,\ell_i>ds} + \widetilde{M(t)} + (u_o,\ell_i)\ \theta(t) - (\xi,\ell_i)\ \theta(t-T) \\[2ex] \qquad \forall\ t\in\,]-\rho,\ T+\rho\,[\quad \forall\, i \in N \end{cases}$$

De (3.38), on tire :

$$(3.39)\qquad \xi = u(T)$$

$$(3.40)\quad \begin{cases} du(t) + \chi(t)\ dt + \zeta(t)\ dW(t) = f(t)\ dt + dM(t), \qquad t\in[0,T] \\[1ex] u(o) = u_o \end{cases}$$

Il nous reste maintenant à montrer que $\chi = A(u)$ et $\zeta = B(u)$.

iv) Méthode de monotonie

Soit $v \in L^p(\Omega x]0,T[;V) \cap L^2(\Omega x]0,T[;H)$

Posons :

$$X_\mu = 2E\int_0^T e^{-\lambda t} <A(u^\mu) - A(v), u^\mu - v > dt + \lambda E\int_0^T e^{-\lambda t} |u^\mu - v|^2 dt -$$

$$- E\int_0^T e^{-\lambda t} ||B(u^\mu) - B(v)||_2^2 dt$$

Grâce à l'hypothèse de monotonie (3.7),

$$X_\mu \geqslant 0.$$

Dans X_μ, tous les termes passent à la limite grâce à (3.35), sauf :

$$Y_\mu = 2E\int_0^T e^{-\lambda t} < A(u^\mu), u^\mu > dt + \lambda E\int_0^T e^{-\lambda t}|u^\mu|^2 dt -$$

$$-E\int_0^T e^{-\lambda t} ||B(u^\mu)||_2^2 dt$$

En prenant l'espérance mathématique dans (3.20), on obtient :

$$(3.41)\quad \left\{\begin{aligned} &E|u^\mu(t)|^2 + 2E\int_0^t < A(u^\mu), u^\mu > ds = E|P_\mu u_o|^2 + 2E\int_0^t <f, u^\mu >ds + \\ &\qquad + E\{Tr<<P_\mu M - P_\mu\int_0^{\cdot} B(u^\mu)dW^\mu>>_t\}\end{aligned}\right.$$

La relation (3.41) prouve en particulier que la fonction $t \to E|u^\mu(t)|^2$ est absolument continue, donc :

$$(3.42)\qquad d\{e^{-\lambda t} E|u^\mu(t)|^2\} + \lambda e^{-\lambda t} E|u^\mu(t)|^2 dt = e^{-\lambda t} d\{E|u^\mu(t)|^2\}$$

De (3.41) et (3.42), on déduit :

$$e^{-\lambda T}\, E|u^{\mu}(T)|^2 + 2E\int_0^T e^{-\lambda t} < A(u^{\mu}),\ u^{\mu} > dt + \lambda E\int_0^T e^{-\lambda t}|u^{\mu}|^2 dt =$$

$$= E\ |P_{\mu}u_o|^2 + 2E\int_0^T e^{-\lambda t} <f,u^{\mu}>\ dt + E\int_0^T e^{-\lambda t}||P_{\mu}B(u^{\mu})\pi_{\mu}||_2^2\ dt +$$

$$+ E\int_0^T e^{-\lambda t}\ d\left\{ Tr\left[<<P_{\mu}M>>_t - 2<<P_{\mu}M, \int_0^{\cdot} B(u^{\mu})\ dW^{\mu}>>_t \right]\right\}$$

Or :

$$Y_{\mu} \leqslant 2E\int_0^T e^{-\lambda t} < A(u^{\mu}),\ u^{\mu} > dt + \lambda E\int_0^T e^{-\lambda t}|u^{\mu}|^2\ dt -$$

$$- E\int_0^T e^{-\lambda t}||P_{\mu}B(u^{\mu})\pi_{\mu}\ ||_2^2\ dt$$

$$(3.43)\quad \left\{ \begin{aligned} & Y_{\mu} \leqslant E|u_o|^2 - e^{-\lambda T}\, E\ |u^{\mu}(T)|^2 + 2E\int_0^T e^{-\lambda t} <f,\ u^{\mu}>\ dt\ + \\ & + \int_0^T e^{-\lambda t}\ d\left\{ E\ |P_{\mu}M(t)|^2 \right\} - 2\int_0^T e^{-\lambda t} d\left\{ E\left(P_{\mu}M(t), \int_0^t B(u^{\mu})dW^{\mu}\right)\right\} \end{aligned} \right.$$

Mais il résulte de (3.35) et (3.39) que :

$$(3.44)\qquad \limsup\ (-\ E\ |u^{\mu}(T)|^2) \leqslant -\ E|u(T)|^2$$

D'autre part si $t \to g_{\mu}(t)$ est une suite de fonctions à variation bornée de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}$, t.q. $g_{\mu}(o) = 0$,

$$(3.45)\qquad \int_0^T e^{-\lambda t} dg_{\mu}(t) = e^{-\lambda T}\ g_{\mu}(T) + \frac{1}{\lambda}\int_0^T e^{-\lambda t}\ g_{\mu}(t)\ dt$$

En posant successivement :

$$g_\mu(t) = E\ |P_\mu M(t)|^2 \text{ et } g_\mu(t) = E\left(P_\mu M(t), \int_0^t B(u^\mu)\ dW^\mu\right)$$

On s'aperçoit que l'on peut passer à la limite dans le membre de droite de l'égalité (3.45), en utilisant notamment le théorème de convergence dominée de Lebesgue. Donc :

$$\int_0^T e^{-\lambda t}\ d\ \{E|P_\mu M(t)|^2\} \to \int_0^T e^{-\lambda t}\ d\ \{E|M(t)|^2\} \tag{3.46}$$

$$\int_0^T e^{-\lambda t}\ d\ \{E(P_\mu M(t), \int_0^t B(u^\mu)\ dW^\mu)\} \to \int_0^T e^{-\lambda t}\ d\ \{E(M(t), \int_0^t \zeta dW)\} \tag{3.47}$$

On tire de (3.43), (3.35), (3.44), (3.46) et (3.47) :

$$\left\{\begin{aligned} &\limsup Y_\mu \leqslant E\ |u_0|^2 - e^{-\lambda T}E|u(T)|^2 + 2E\int_0^T e^{-\lambda t}\ \langle f,u\rangle\ dt \\ &+\int_0^T e^{-\lambda t}\ d\ \{E\ |M(t)|^2\} - 2\int_0^T e^{-\lambda t}\ d\ \{E(M(t), \int_0^t \zeta dW)\} \end{aligned}\right. \tag{3.48}$$

Par ailleurs, grâce à (3.40), on peut appliquer à u(t) le Théorème 3.2. du Chapitre 2 :

$$E|u(t)|^2 + 2E\int_0^t \langle \chi,u\rangle\ ds = E\ |u_0|^2 + 2E\int_0^t \langle f,u\rangle\ ds$$

$$+ E|M(t) - \int_0^t \zeta dW|^2$$

De plus, en utilisant une relation analogue à (3.42), on obtient :

$$(3.49)\quad \left\{\begin{aligned} & 2E\int_0^T e^{-\lambda t} <\chi,u> dt + \lambda E\int_0^T e^{-\lambda t}|u|^2\,dt - E\int_0^T e^{-\lambda t}||\zeta||_2^2\,dt \\ & = E|u_o|^2 - e^{-\lambda T}E|u(T)|^2 + 2E\int_0^T e^{-\lambda t} <f,u>\,dt \\ & + \int_0^T e^{-\lambda t}\,d\,\{E|M(t)|^2\} - 2\int_0^T e^{-\lambda t}\,d\,\{E(M(t),\int_0^t \zeta dW)\} \end{aligned}\right.$$

Comparant (3.48) et (3.49), on obtient :

$$\limsup Y_\mu \leqslant E\int_0^T e^{-\lambda t}\left[2<\chi,u> + \lambda|u|^2 - ||\zeta||_2^2\right] dt$$

D'où finalement :

$$(3.50)\quad \left\{\begin{aligned} & 0 \leqslant \limsup X_\mu \leqslant 2E\int_0^T e^{-\lambda t} <\chi-A(v),\ u-v>\,dt \\ & + \lambda E\int_0^T e^{-\lambda t}|u-v|^2\,dt - E\int_0^T e^{-\lambda t}||\zeta-B(v)||_2^2\,dt \end{aligned}\right.$$

L'inégalité (3.50) étant vérifiée $\forall v \in L^p(\Omega x\,]0,T[\,;V) \cap L^2(\Omega x\,]0,T[\,;H)$, on en déduit, en posant $v = u$, que :

$$\zeta = B(u).$$

Mais de plus il résulte de (3.50) :

$$2E\int_0^T e^{-\lambda t} <\chi-A(v),\ u-v>\,dt + \lambda E\int_0^T e^{-\lambda t}|u-v|^2\,dt \geqslant 0$$

$$\forall v \in L^p(\Omega x\,]0,T[\,;V) \cap L^2(\Omega x\,]0,T[\,;H)$$

On en déduit, comme dans la démonstration du Théorème 1.1, que :

$$\chi = A(u).$$

$$u \in L^p(\Omega x\,]0,T[\,;V) \cap L^2(\Omega\,;\,L^\infty(0,T;H))\ ,$$

est donc solution de l'équation (3.12). Il résulte en outre du Théorème 3.1. du Chapitre 2 que $u \in L^2(\Omega; C(0,T;H))$, et $u(t)$ est un processus bien mesurable à valeurs dans H. ∎

Nous allons maintenant établir un autre Théorème d'existence et d'unicité, avec des hypothèses plus faibles sur les données u_o, f et M.

Soient :

(3.51) $\quad u_o \in L^o(\Omega, \mathcal{F}_o, P ; H)$.

(3.52) $\quad f \in L^o(\Omega; L^{p'}(0,T;V'))$ non anticipatif.

(3.53) $\quad M \in \mathcal{M}^2_{loc}(0,T;H)$.

Théorème 3.2. :

Sous les hypothèses (3.1) ... (3.7), (3.11), (3.51), (3.52) *et* (3.53), *l'équation :*

$$(3.54) \quad \begin{cases} du(t) + A(t,u(t))\,dt + B(t,u(t))\,dW(t) = f(t)\,dt + dM(t) \\ u(o) = u_o \end{cases}$$

a une solution unique :

$$u \in L^o(\Omega; L^p(0,T;V) \cap C(0,T;H)),$$

processus bien mesurable à valeurs dans H.

Démonstration :

a) Existence :

Nous allons procéder comme au Théorème 2.2 du chapitre 2.

Posons :

$$\Omega_n = \{\omega \; ; \; |u_o| \leq n\}$$

$$T_n = \inf \; \{t \leq T; \; M(t) > n \quad \text{ou} \int_o^t ||f(s)||_*^{p'} \, ds > n\}$$

On définit alors :

$$u_o^n = I_{\Omega_n} u_o$$

$$f^n(t) = \begin{cases} f(t) \text{ si } & t \in [0,T_n] \\ 0 \text{ si } & t > T_n \end{cases}$$

$$M^n(t) = M(t \wedge T_n)$$

u_o^n , f^n et M^n vérifient les hypothèses du Théorème 3.1. Donc l'équation :

$$(3.55) \quad \begin{cases} du^n(t) + A(t,u^n(t)) \, dt + B(t,u^n(t)) \, dW(t) = f^n(t) \, dt + dM^n(t) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad u^n(o) = u_o^n \end{cases}$$

a une solution unique :

$$u^n \in L^p(\Omega x \,]0,T[\, ;V) \cap L^2(\Omega; C(0,T;H))$$

Mais on montre aisément, comme au Théorème 2.2. du Chapitre 2, que :

$$u^n \to u \quad \text{p.s.} \quad \text{dans } L^p(0,T;V) \cap C(0,T;H),$$

où u est solution de l'équation (3.54)

b) Unicité :

Soient u et v deux solutions de l'équation (3.54). Alors :

$$
(3.56)\quad \begin{cases} d(u(t)-v(t)) + \left[A(u)-A(v)\right]dt + \left[B(u)-B(v)\right]\,dW(t) = 0 \\ u(o) - v(o) = 0 \end{cases}
$$

Donc, d'après le théorème 3.1. du chapitre 2 et l'hypothèse de monotonie :

$$
|u(t)-v(t)|^2 \leqslant \lambda \int_o^t |u(s)-v(s)|^2\,ds +
$$

$$
+ 2\int_o^t (u-v,\ B(u)-B(v))\,dW(s).
$$

Si l'on pose :

$$
S_n = \operatorname{Inf}\left\{ t \leqslant T\ ;\ |u(t)| > n,\ |v(t)| > n,\ \int_o^t ||u(s)||^p ds > n \right.
$$

$$
\left. \text{ou} \int_o^t ||v(s)||^p\,ds > n \right\}.
$$

Alors $\int_o^{\cdot \wedge S_n} (u-v,\ B(u)-B(v))\,dW(s)$ est une martingale, donc :

$$
E\,|u(t\wedge S_n)| - v(t\wedge S_n)|^2 \leqslant \lambda \int_o^{t\wedge S_n} E|u(s\wedge S_n) - v(s\wedge S_n)|^2\,ds
$$

$$
\leqslant \lambda \int_o^t E\,|u(s\wedge S_n) - v(s\wedge S_n)|^2\,ds .
$$

Donc, grâce au lemme de Gronwall :

$$E\ \left|u(t\wedge S_n) - v(t\wedge S_n)\right|^2 = 0$$

$$\forall t \in [0,T]\ ,\ \forall n \in N.$$

Le résultat découle alors de ce que,

$$\bigcup_n\ [0,S_n] = [0,T] \quad p.s.$$

§4. SOMME D'OPERATEURS

Soient H un espace de Hilbert, et V_i, $i = 1, \dots q$, q espaces de Banach réflexifs.

Soit $V = \bigcap_{i=1}^{q} V_i$. Muni de la norme :

$$||v|| = \sum_{i=1}^{q} ||v||_i$$

V est un espace de Banach réflexif.

On pose :

$$\mathcal{V}_i = V_i \cap H\ ,\quad i = 1 \dots q$$

$$\mathcal{V} = V \cap H.$$

Munis des normes :

$$||v||_{\mathcal{V}_i} = ||v||_i + |v|$$

$$||v||_{\mathcal{V}} = ||v|| + |v|$$

$\mathcal{V}_i$, i = 1 ... q, et $\mathcal{V}$ sont des espaces de Banach réflexifs. On suppose que chaque $\mathcal{V}_i$, i = 1 ... q, et $\mathcal{V}$, est séparable et dense dans H. Alors :

$$\mathcal{V}_i \subset H \simeq H' \subset \mathcal{V}_i'$$

$$\mathcal{V} \subset H \simeq H' \subset \mathcal{V}'$$

<u>Remarque 4.1.</u> :

Les espaces $\mathcal{V}_i$, i = 1 .... q, $\mathcal{V}$ et H ont les mêmes propriétés que les espaces V_i, i = 1 ... q, V et H introduits au §5 du Chapitre 2. Le fait de faire sur nos opérateurs des hypothèses relatives aux V_i, et non aux $\mathcal{V}_i$, constitue une généralisation qui sera utile au §5. Nous aurions pu faire cette transformation dès le début. Mais nous avons voulu éviter d'alourdir l'exposé. ▩

Soient $A_i(t,.)$, i = 1 ... q, q famille d'opérateurs, tels que chaque $A_i(t,.)$ applique V_i dans V_i', et vérifie :

(4.1) Bornitude $\exists\, \beta$ t.q. : $||A_i(t,u)||_{*,i} \leqslant \beta \; ||u||_i^{p_i}$

$$\forall\, u \in V_i$$

(4.2) Hémicontinuité $\theta \to \langle A_i(t,u+\theta v), w\rangle$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$,

$$\forall u, v, w \in V_i$$

(4.3) Mesurabilité : $\forall\, u \in V_i$, $t \to A_i(t,u)$ est Lebesgue mesurable de $]0,T[$ à valeurs dans V_i'.

Etant donné un espace de Hilbert séparable K, soient $B_i(t,.)$, $i = 1 \ldots q$, q familles d'opérateurs tels que : $\forall i$ et p.p.t, $B_i(t,.)$ applique V_i dans $\mathcal{L}^2(K;H)$ et vérifie :

(4.4) $\quad \forall h \in H, \forall k \in K, \quad \forall N \in \mathbb{R}_+, \exists L$ t.q. :

$$|(h, B_i(t,u)\, k) - (h, B_i(t,v)\, k)| \leqslant L\,||u-v||_i$$

$$\forall u, v \in V_i \quad \text{t.q.} \quad ||u||_i, ||v||_i \leqslant N$$

(4.5) $\quad \forall u \in V_i$, $t \to B_i(t,u)$ est Lebesgue mesurable de $]0,T[$ à valeurs dans $\mathcal{L}^2(K;H)$.

On fait de plus les hypothèses fondamentales suivantes sur les 2q familles d'opérateurs $A_i(t,.)$ et $B_i(t,.)$.

(4.6) Coercivité $\quad \exists\, \alpha > 0$, λ et ν tels que :

$$2 \sum_{i=1}^{q} < A_i(t,u), u > + \lambda\, |u|^2\, \nu \geqslant \alpha \sum_{i=1}^{q} ||u||_i^{p_i} +$$

$$+ || \sum_{i=1}^{q} B_i(t,u)\, ||_2^2 , \quad \forall u \in V, \text{ p.p.t.}$$

(4.7) Monotonie :

$$2 \sum_{i=1}^{q} < A_i(t,u) - A_i(t,v), u-v > + \lambda |u-v|^2 \geqslant$$

$$\geqslant || \sum_{i=1}^{q} (B_i(t,u) - B_i(t,v)) ||_2^2$$

On se donne en outre :

(4.8) $\quad u_o \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_o, P;H)$

(4.9) $\quad f \in \sum_{i=1}^{q} L^{p'_i}(\Omega \times]0,T[\, ;V'_i)$, non anticipatif

(4.10) $\quad M \in \mathcal{M}^2(0,T;H)$

ainsi que W(t), wiener sur K d'opérateurs de covariance J, l'isomorphisme canonique de K' sur K, adaptée à la famille $\mathcal{F}_t$.

Théorème 4.1. :

Sous les hypothèses (4.1) ... (4.7), *si* u_o, f *et* M *sont donnés par* (4.8), (4.9) *et* (4.10),

$$\exists\, u \in \bigcap_{i=1}^{q} L^{p_i}(\Omega \times]0,T[\, ;V_i) \cap L^2(\Omega;\, C(0,T;H)),$$

processus bien mesurable à valeurs dans H, *unique solution de :*

$$(4.11)\quad \left\{ \begin{aligned} & du(t) + \sum_{i=1}^{q} A_i(t,u(t))\, dt + \sum_{i=1}^{q} B_i(t,u(t))\, dW(t) = f(t)\, dt + dM(t) \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad u(o) = u_o \end{aligned} \right.$$

Démonstration :

Nous allons préciser ce qui dans cette démonstration, diffère de celle du Théorème 3.1.

Nous nous contenterons de montrer l'existence, l'unicité découlant immédiatement de l'hypothèse de monotonie (4.7).

Soit $\{\ell_1, \ldots, \ell_n, \ldots\}$ une base orthonormée de H, formée de vecteurs de V. On notera :

$$V_n = H_n = V'_n$$

l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$, et P_n l'opérateur de projection orthogonale de H sur H_n, qui se prolonge en un opérateur $\tilde{P}_n$ de V' sur V'_n.

Soit $\{k_1, \ldots, k_n, \ldots\}$ une base orthonomée de K, K_n l'espace vectoriel engendré par $(k_1, \ldots, k_n)$, π_n l'opérateur de projection orthogonale de K sur K_n.

Soit alors $A_i^n(t,.)$, $t \in]0,T[$, $i = 1, \ldots, q$, la famille d'opérateurs de V_n dans V_n' définie par :

$$A_i^n(t,u) = \tilde{P}_n A_i(t,u).$$

Soit $B_i^n(t,.)$, $t \in]0,T[$, $i = 1 \ldots q$, la famille d'opérateurs de H_n dans $\mathcal{L}^2(K_n,H_n)$ définie par :

$$B^n(t,u) = P_n\, B(t,u) \quad , \; u \in H_n$$

Soient :

$$u_o^n = P_n u_o \in L^2(\Omega\, ;H_n)$$

$$f^n = \tilde{P}_n\, f$$

Alors si :

$$p = \sup_{i \in \{1,..,q\}} p_i$$

$$f^n \in L^{p'}(\Omega \times]0,T[\; ;V'_n)$$

$$M^n = P_n M \in \mathcal{M}^2(0,T;H_n)$$

$W^n = \pi_n W$ est un processus de Wiener à valeurs dans K_n.

On considère l'équation :

$$(4.12)\quad \begin{cases} du^n(t) + \sum\limits_{i=1}^{q} A_i^n(t,u^n(t))\, dt + \sum\limits_{i=1}^{q} B_i^n(t,u^n(t))\, dW^n(t) = \\ \qquad\qquad = f^n(t)\, dt + dM^n(t) \\ u^n(o) = u_o^n \end{cases}$$

Les opérateurs $\sum_{i=1}^{q} A_i^n(t,.)$, $\sum_{i=1}^{q} B(t,.)$, et les données u_o^n, f^n, M^n et W^n, vérifient les hypothèses du Théorème 2.1, si l'on remplace les espaces V, H, V' par les espaces V_n, H_n, V'_n.

En particulier, il résulte de l'hypothèse de coercivité (4.6) :

$$2 < \sum_{i=1}^{q} A_i^n(t,u), u > + \lambda|u|^2 + \nu \geqslant \alpha \, ||u||_{i_o}^p + || \sum_{i=1}^{n} B_i^n(t,u)||_2^2 ,$$

$\forall u \in V_n$, où i_o est tel que $p_{i_o} = p$, et on peut choisir $||.||_{i_o}$ comme norme sur V_n.

L'équation (4.12) a donc une solution $u^n \in L^p(\Omega x]0,T[;V_n) \cap L^2(\Omega;\, C(0,T;H_n))$

De plus, on déduit de l'hypothèse de coercivité (4.6) et de l'hypothèse (4.1) :

$$(4.13)\quad \begin{cases} u^n \text{ reste dans un borné de } \bigcap_{i=1}^{q} L^{p_i}(\Omega x]0,T[\,;V_i) \cap L^2(\Omega;\, C(0,T;H)) \\[2ex] A_i(u^n) \text{ reste dans un borné de } L^{p'_i}(\Omega x]0,T[\,;V'_i),\ i=1 \dots q \\[2ex] \sum_{i=1}^{q} B_i(u^n) \text{ reste dans un borné de } L^2(\Omega x]0,T[\,;\mathcal{L}^2(K,H)) \end{cases}$$

On peut donc extraire de la suite $\{u^n\}$ une sous-suite $\{u^\mu\}$ telle que :

$$(4.14)\quad \begin{cases} u^\mu \rightharpoonup u \text{ dans } L^{p_i}(\Omega x]0,T[\,;V_i) \text{ faible, } i=1 \dots.q, \text{ et dans} \\ \qquad L^2(\Omega;\, L^\infty(0,T;H)) * \text{ faible.} \\[2ex] u^\mu(T) \rightharpoonup \xi \text{ dans } L^2(\Omega;H)) \text{ faible.} \\[2ex] A_i(u^\mu) \rightharpoonup \chi_i \text{ dans } L^{p'_i}(\Omega x]0,T[\,;V'_i) \text{ faible, } i=1 \dots q. \\[2ex] \sum_{i=1}^{q} B_i(u^\mu) \rightharpoonup \zeta \text{ dans } L^2(\Omega x]0,T[\,;\mathcal{L}^2(K;H)) \text{ faible.} \end{cases}$$

Alors u, χ_i, ζ sont non-anticipatifs, et on peut passer à la limite faible dans l'équation (4.12), d'où :

$$
(4.15)\quad \begin{cases} du(t) + \sum_{i=1}^{q} \chi_i(t)\, dt + \zeta(t)\, dW(t) = f(t)\, dt + dM(t) \\ u(o) = u_o \\ u(T) = \xi \end{cases}
$$

De (4.14), on déduit que :

$$
(4.16)\quad \begin{cases} u \in \bigcap_{i=1}^{q} L^{p_i}(0,T;\mathcal{V}_i) \text{ p.s.} \\ \chi_i \in L^{p'_i}(0,T;\mathcal{V}'_i) \text{ p.s. }, \quad i = 1 \dots q \end{cases}
$$

On peut donc appliquer le Théorème 5.2. du Chapitre 2, d'où :

$$
(4.17)\quad \begin{cases} |u(t)|^2 + 2 \sum_{i=1}^{q} \int_o^t <\chi_i(s), u(s)> ds + 2\int_o^t (u(s),\zeta(s))\, dW(s) \\ = |u_o|^2 + 2E\int_o^t <f(s), u(s)> ds + 2\int_o^t (u(s), dM(s)) \\ + \operatorname{Tr} <<M. - \int_o^{\cdot} \zeta(s)\, dW(s)>>_t \end{cases}
$$

Mais de (4.14) et des hypothèses (4.8), (4.9) et (4.10), il résulte que l'on peut prendre l'espérance mathématique dans (4.17) :

$$
E|u(t)|^2 + 2 \sum_{i=1}^{q} E\int_o^t <\chi_i(s), u(s)> ds =
$$

$$
= E|u_o|^2 + 2E\int_o^t <f(s), u(s)>ds + E\left|M(t)-\int_o^t \zeta(s)\, dW(s)\right|^2
$$

On peut donc mettre en oeuvre la "méthode de monotonie", d'une façon analogue à ce qui a été fait dans la démonstration du Théorème 3.1, ce qui donne ici :

$$(4.18)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{q} X_i(t) = \sum_{i=1}^{q} A_i(t,u(t)) \\ \\ \displaystyle\zeta(t) = \sum_{i=1}^{q} B_i(t,u(t)) \end{cases}$$

Le Théorème est alors démontré.

On peut aussi démontrer dans ce cadre l'analogue du Théorème 3.2.:

Théorème 4.2. :

Sous les hypothèses (4.1) ... (4.8), *et si* :

$$u_o \in L^o(\Omega, \mathcal{F}_o, P\ ;\ H)$$

$$f \in \prod_{i=1}^{q} L^o(\Omega;\ L^{p'_i}(0,T;V'_i)) \qquad \text{non anticipatif}$$

$$M \in \mathcal{M}^2_{loc}(0,T;H)$$

alors l'équation (4.11) *a une solution unique* :

$$u \in L^o(\Omega;\ \bigcap_{i=1}^{q} L^{p_i}(0,T;V_i) \cap C(0,T;H));$$

processus bien mesurable à valeurs dans H.

§5. EXEMPLES

Introduisons les notations que nous utiliserons.

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, de frontière Γ.

On notera $W^{1,p}(\mathcal{O})$ $(p \geq 1)$ l'espace de Sobolev défini par :

$$W^{1,p}(\mathcal{O}) = \{u \in L^p(\mathcal{O}) \ ; \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\mathcal{O}) \ , \ i = 1 \dots n\}$$

On définit en outre $W_0^{1,p}(\mathcal{O})$ comme la fermeture de $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ dans $W^{1,p}(\mathcal{O})$. Si la frontière Γ est de classe C^1, alors on peut définir la trace sur Γ de tout élément $u \in W^{1,p}(\mathcal{O})$ (cf. LIONS [2]), et alors :

$$W_0^{1,p}(\mathcal{O}) = \{u \in W^{1,p}(\mathcal{O}) \ ; \ u|_\Gamma = 0\}$$

Dans le cas $p = 2$, on utilisera les notations suivantes :

$$H^1(\mathcal{O}) = W^{1,2}(\mathcal{O}) \quad , \quad H_0^1(\mathcal{O}) = W_0^{1,2}(\mathcal{O})$$

Si la frontière Γ est de classe C^2, on peut définir une direction normale à Γ en tout point $x \in \Gamma$, orientée vers l'extérieur. On notera $\frac{\partial}{\partial n}$ la dérivée suivant cette direction, prise en un point $x \in \Gamma$.

Etant donné $T \in \mathbb{R}+$, on notera $\mathcal{C}$ le cylindre ouvert $]0,T[\times \mathcal{O}$, et $\Sigma =]0,T[\times \Gamma$ sa frontière latérale.

Dans toute la suite, on choisira $H = L^2(\mathcal{O})$. Remarquons que si $\mathcal{O}$ est borné et $p \geq 2$, alors :

$$L^p(\mathcal{O}) \subset L^2(\mathcal{O})$$

$$W^{1,p}(\mathcal{O}) \subset L^2(\mathcal{O})$$

avec densité et injection continue.

Dans les autres cas, $L^p(\mathcal{O}) \cap L^2(\mathcal{O})$ et $W^{1,p}(\mathcal{O}) \cap L^2(\mathcal{O})$ sont denses dans $L^2(\mathcal{O})$. On pourra utiliser les théorèmes 4.1 et 4.2.

<u>Exemple 5.1.</u> : <u>Equation aux dérivées partielles stochastique linéaire intervenant en théorie du filtrage non linéaire.</u>

Ici, $\mathcal{O} = \mathbb{R}^n$.

Soient $V = H^1(\mathbb{R}^n)$, et $A(t)$ une famille d'opérateurs linéaires continus de $H^1(\mathbb{R}^n)$ dans $H^{-1}(\mathbb{R}^n)$ définie par :

$$\langle A(t)\ u,v\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \alpha_{i,j}(t,x)\ \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\ \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\ dx$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \beta_i(t,x)\ \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\ v(x)\,dx$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(t,x)\,u(x)\,v(x)\,dx$$

$$u,\ v \in H^1(\mathbb{R}^n)$$

où les $\alpha_{i,j}$, β_j et γ sont des éléments de $L^\infty(\mathcal{C})$.

Soient $H = L^2(\mathbb{R}^n)$, $K = \mathbb{R}$, et $W(t)$ un mouvement brownien réel. Soit $B(t)$ la famille d'applications linéaires continues de $H^1(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ définies par :

$$\left[B(t)\ u\right](x) = \sum_{i=1}^{n} \rho_i(t,x)\ \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + \theta(t,x)\ u(x) \quad \text{p.p. dans } \mathcal{C}$$

$$u \in H^1(\mathbb{R}^n)$$

où les ρ_i et θ sont des éléments de $L^\infty(\mathcal{C})$.

On suppose, pour que soit vérifiée l'hypothèse de coercivité (3.6), qu'il existe $\alpha > 0$, tel que :

$$(5.1) \qquad \sum_{i,j=1}^{n} (2\alpha_{i,j}(t,x) - \rho_i(t,x)\ \rho_j(t,x))\ \xi_i\xi_j \geqslant \alpha \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$$

$$\text{p.p. dans } \mathcal{C},\ \forall\ (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$$

Les autres hypothèses du Théorème 3.1. sont alors vérifiées, avec $P = 2$, notamment grâce à la linéarité des opérateurs $A(t)$ et $B(t)$, et donc étant donné $u_o(.) \in L^2(\mathbb{R}^n)$, l'équation :

$$(5.2)\quad \left\{ \begin{array}{l} du(t,x) - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} (\alpha_{i,j}(t,x) \frac{\partial u(t,x)}{\partial x_i}) \, dt \\ \quad + \sum_{i=1}^{n} \beta_i(t,x) \frac{\partial u(t,x)}{\partial x_i} \, dt + \gamma(t,x)\, u(t,x)\, dt \\ \quad + (\sum_{i=1}^{n} \rho_i(t,x) \frac{\partial u(t,x)}{\partial x_i} + \theta(t,x)\, u(t,x))\, dW(t) = 0 \\ \qquad u(0,x) = u_o(x) \end{array} \right.$$

a une solution unique :

$$u \in L^2(\Omega x \,]0,T[\, ; H^1(\mathbb{R}^n)) \cap L^2(\Omega;\, C(0,T;\, L^2(\mathbb{R}^n))$$

Des travaux récents (cf. ROSOVSKII - SHIRYAEV [1]) ont montré que la recherche de la densité de probabilité conditionnelle dans un problème de filtrage non linéaire peut se ramener à la résolution d'une équation du type (5.2), dont le caractère linéaire permet d'utiliser des algorithmes numériques performants : (cf. LEVIEUX [1]).

Dans le cas où le bruit sur l'observation et le bruit dans l'équation que l'on cherche à "filtrer" sont non corrélés, $\rho_i(t,x) = 0$, $i = 1 \ldots n$. ▧

Exemple 5.2. : Equation aux dérivées partielles stochastique non linéaire, avec condition au bord de type Dirichlet homogène.

Soient $H = L^2(\mathcal{O})$, $K = \mathbb{R}^{n+2}$, $W(t) = \begin{pmatrix} W_1(t) \\ \vdots \\ W_{n+2}(t) \end{pmatrix}$ un processus de Wiener à valeurs dans $\mathbb{R}^{n+2}$, d'opérateur de covariance la matrice identité.

$V_1 = H_0^1(\mathcal{O})$, A_1 l'opérateur de $H_0^1(\mathcal{O})$ dans $H^{-1}(\mathcal{O})$ défini par :

$$<A_1 u,v> = \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathcal{O}} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\, dx, \quad u,\ v \in H_0^1(\mathcal{O})$$

$$B_1 u = \begin{pmatrix} \sigma \dfrac{\partial u}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \sigma \dfrac{\partial u}{\partial x_n} \\ \theta\ u_o \end{pmatrix} \quad , \quad u \in H_0^1(\mathcal{O})$$

où :

(5.3) $\qquad \sigma^2 < 2, \quad \theta \in \mathbf{R}$ quelconque

$$V_2 = L^4(\theta)$$

$$\left[A_2 u\right](x) = u^3(x) \quad , \quad u \in L^4(\theta).$$

$$\left[B_2 u\right](x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \delta u^2(x) \end{pmatrix}, \quad u \in L^4(\theta)$$

où :

(5.4) $\qquad \delta^2 \leqslant \frac{3}{2}$

Remarquons que :

$$||B_1(u) + B_2(u)||_2^2 = ||B_1(u)||_2^2 + ||B_2(u)||_2^2$$

$$||B_1(u) + B_2(u) - B_1(v) - B_2(v)||_2^2 = ||B_1(u) - B_1(v)||_2^2 +$$

$$+ ||B_2(u) - B_2(v)||_2^2$$

Donc, pour vérifier que les opérateurs A_1, A_2, B_1 et B_2 vérifient les hypothèses du Théorème 4.1, il suffit que chacun des couples A_1, B_1 et A_2, B_2 vérifie les hypothèses du Théorème 3.1.

$$A_1 \in \mathcal{L}(H_0^1(\mathcal{O}),\ H^{-1}(\mathcal{O}))\ ,\ p_1 = 2$$

$$B_1 \in \mathcal{L}(H_0^1(\mathcal{O})\ ;\ (L^2(\mathcal{O}))^{n+1})$$

De plus :

$$2 \langle A_1 u, u \rangle - ||B_1(u)||_2^2 + \theta^2 |u|^2_{L^2(\mathcal{O})} = (2-\sigma^2) \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial X_i} \right|^2_{L^2(\mathcal{O})}$$

$$= (2-\sigma^2) \, ||u||^2_{H_0^1(\mathcal{O})}$$

(5.3) assure donc que A_1 et B_1 vérifient l'hypothèse de coercivité. L'hypothèse de monotonie en résulte alors puisque A_1 et B_1 sont linéaires.

. $p_2 = 4$, et on vérifie aisément que :

$$||A_2(u)||_{L^{\frac{4}{3}}(\mathcal{O})} = ||u||^{4-1}_{L^4(\mathcal{O})} \quad , \quad u \in L^4(\mathcal{O})$$

Donc A_2 applique $L^4(\mathcal{O})$ dans $(L^4(\mathcal{O}))' = L^{4/3}(\mathcal{O})$ et vérifie l'hypothèse (3.1). On montre aisément que A_2 est continue de $L^4(\mathcal{O})$ dans $L^{4/3}(\mathcal{O})$. Donc A_2 vérifie les hypothèses (3.2) et (3.3). D'autre part :

$$\left(\int_{\mathcal{O}} [u^2(x) - v^2(x)]^2 dx \right)^{1/2} \leqslant \left(\int_{\mathcal{O}} (u(x) + v(x))^2 (u(x)-v(x))^2 dx \right)^{1/2}$$

$$\leqslant (||u||_{L^4} + ||v||_{L^4}) \times ||u-v||_{L^4}$$

$$||B_2(u) - B_2(v)||_2 \leqslant |\delta| \, (||u||_{L^4} + ||v||_{L^4}) \times ||u-v||_{L^4}$$

Donc B_2 vérifie les hypothèses (3.4) et (3.5). Montrons que, grâce à (5.4), A_2 et B_2 vérifient l'hypothèse de monotonie (3.7) :

$$X = 2 \langle A_2(u) - A_2(v), u-v \rangle - ||B_2(u) - B_2(v)||_2^2$$

$$= 2 \int_{\mathcal{O}} (u^3(x) - v^3(x))\,(u(x)-v(x))\, dx - \delta^2 \int (u^2(x) - v^2(x))^2 \, dx$$

$$= \int_{\mathcal{O}} (u(x)-v(x))^2 \left[(2-\delta^2)(u^2(x)+v^2(x)) + 2(1-\delta^2) u(x) v(x) \right] dx$$

Cette quantité reste non négative pour tout couple u, v $\in L^4(\mathcal{O})$ si et seulement si :

$$\delta^2 < 2, \text{ et } |1-\delta^2| \leq 2-\delta^2,$$

d'où : $\delta^2 < 3/2$.

On vérifie alors aisément que l'hypothèse de coercivité (3.6) est vérifiée.

Donc, étant donnés :

$u_o \in L^o(\Omega; L^2(\mathcal{O}))$, $\mathcal{F}_o$ mesurable

$f \in L^{4/3}(\mathcal{C})$ p.s., adaptée à la famille croissante de tribus $\mathcal{F}_t$

$M \in \mathcal{M}^2_{loc}(0,T; L^2(\mathcal{O}))$

L'équation :

$$\begin{cases} du(t,x) - \Delta u(t,x)\, dt + u^3(t,x)\, dt + \sigma \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(t,x)}{\partial x_i} dW_i(t) + \\ \qquad + \theta u(t,x)\, dW_{n+1}(t) + \delta u^2(t,x)\, dW_{n+2}(t) = f(t,x)dt+dM(t,x) \\ \qquad u(0,x) = u_o(x) \end{cases}$$

a une solution unique :

$$u \in L^2(0,T;H^1_0(\mathcal{O})) \cap L^4(\mathcal{C}) \cap C(0,T;L^2(\mathcal{O})) \text{ p.s.}$$

<u>Exemple 5.3.</u> : <u>Equation aux dérivées partielles stochastiques non linéaire, avec condition au bord de type Neumann non homogène.</u>

Soient $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$, de frontière Γ de classe C^2.

$H = L^2(\mathcal{O})$, $V = H^1(\mathcal{O})$, $A \in \mathcal{L}(V;V')$ défini par :

$$< A(u), v > = \sum_{i=1}^{n} \int_{\theta} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) \, dx$$

Soient $K = \mathbb{R}$ et $W(t)$ un mouvement brownien réel.

Soit φ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$(5.5) \qquad \begin{cases} |\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant K \quad |x-y| \\ \varphi^2(x) \leqslant K(\theta + x^2) \end{cases}$$

où :

$$\theta = \begin{cases} 0 \text{ si mes } \mathcal{O} = +\infty \\ 1 \text{ si mes } \mathcal{O} < \infty \end{cases}$$

Alors l'opérateur B de $L^2(\mathcal{O})$ dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}; L^2(\mathcal{O})) \simeq L^2(\mathcal{O})$ défini par :

$$[B(u)] \; (x) = \varphi(u(x)) \quad \text{p.p.}$$

est lipschitzien de $L^2(\mathcal{O})$ dans lui-même.

Soient :

$$f_o \in L^2(\mathcal{C}) \quad \text{p.s.}$$

$$g \in L^2(\Sigma) \quad \text{p.s.} ,$$

f_o et g étant des processus non anticipatifs par rapport à une famille croissante $\mathcal{F}_t$ de tribus telle que $W(t)$ est une $\mathcal{F}_t$ - martingale.

Soit alors $f \in L^2(0,T;V')$ p.s. défini par :

$$<f(t), v> = \int_{\mathcal{O}} f_o(t,x) v(x) \, dx + \int_{\Gamma} g(t,x) \; v(x) \, d\Gamma$$

$$\forall v \in V, \quad \text{p.p.t.}$$

Alors si $u_o \in L^2(\mathcal{O})$ p.s. est $\mathcal{F}_o$ mesurable, l'équation :

$$(5.6)\quad \left\{\begin{aligned} & d\int_{\mathcal{O}} u(t,x)\ v(x)\ dx + \left[\sum_{i=1}^{n}\int_{\mathcal{O}} \frac{\partial u(t,x)}{\partial x_i}\ \frac{\partial v}{\partial x_i}\ dx\right] dt\ + \\ & +\left[\int_{\mathcal{O}} \varphi(u(t,x))v(x)\ dx\right] dW(t) = \left[\int_{\mathcal{O}} f_o(t,x)\ u(t,x)\ dx \right. \\ & \qquad\qquad \left. + \int_{\Gamma} g(t,x)u(t,x)\ d\Gamma\right] dt \\ & \qquad\qquad \forall\, v \in V \\ & u(0,x) = u_o(x) \end{aligned}\right.$$

a une solution unique :

$$u \in L^2(\Omega x\ ]0,T[\ ;H^1(\mathcal{O})) \cap C(0,T;L^2(\mathcal{O}))$$

L'équation (5.6) s'interprète (formellement !) :

$$(5.7)\quad \left\{\begin{aligned} & du(t,x) - \Delta u(t,x)dt + \varphi(u(t,x))\ dW(t) = f_o(t,x)\ dt \qquad \text{dans } \mathcal{C} \\ & \frac{\partial u(t,x)}{\partial n} = g(t,x),\ \text{sur } \Sigma \qquad u(0,x) = u_o(x) \end{aligned}\right.$$

<u>Exemple 5.4.</u> : <u>Equation aux dérivées partielles stochastiques non linéaire</u>.

Nous allons étudier une équation proposée par W. FLEMING [1] pour l'étude de l'évolution de la densité d'une population dans un domaine géographique $\mathcal{O}$ - appelé habitat - donné.

Si u(t,x) désigne la densité de population à l'instant t et au point x, l'équation proposée est :

$$
(5.8)\quad
\left\{
\begin{aligned}
& du(t,x) - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha_{i,j}(t,x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(t,x)\right) + \beta(t,x)\, |u(t,x)|\, u(t,x) \\
& \qquad + \gamma(t,x)\, u(t,x) + u(t,x)\, dW(t,x) = 0 \\
& \frac{\partial}{\partial n} u(t,x)\Big|_{\Sigma} = 0 \qquad u(0,x) = u_o(x)
\end{aligned}
\right.
$$

où α_{ij}, β et $\gamma \in L^{\infty}(\mathcal{C})$ et vérifient :

$$
(5.9)\qquad \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}(t,x)\, \xi_i \xi_j \geqslant \alpha \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \quad \text{p.p. dans } \mathcal{C}
$$

avec $\alpha > 0$, $\forall\, (\xi_1 \ldots . \xi_n) \in \mathbf{R}^n$

$$
(5.10)\qquad \beta(t,x) \geqslant \beta > 0 \quad \text{p.p. dans } \mathcal{C}
$$

et où $W(t,.)$ est un processus de Wiener à valeurs dans $K = L^2(\mathcal{O})$, d'opérateur de covariance $Q \in \mathcal{L}^1(L^2(\mathcal{O}))$; $u_o(.)$ étant une variable aléatoire à valeurs dans $L^2(\mathcal{O})$, indépendante de $W(t,.)$.

Soient $H = L^2(\mathcal{O})$, $V_1 = H^1(\mathcal{O})$, $V_2 = L^3(\mathcal{O})$, $A_1(t) \in \mathcal{L}(V_1, V'_1)$ est défini par:

$$
\langle A_1(t)\, u, v \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\mathcal{O}} \alpha_{ij}(t,x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\, dx
$$

$$
+ \int_{\mathcal{O}} \gamma(t,x)\, u(x)\, v(x)\, dx
$$

$A_2(t,.)$, famille d'opérateurs de $L^3(\mathcal{O})$ dans $L^{3/2}(\mathcal{O})$, est définie par :

$$
A_2(t,u)(x) = \beta(t,x)\, |u(x)|\, u(x) \qquad \text{p.p. dans } \mathcal{O}
$$

L'opérateur $Q \in \mathcal{L}^1(L^2(\mathcal{O}))$ a un noyau $q \in L^2(\mathcal{O}\times\mathcal{O})$ tel que :

$$
[Q\, u]\,(x) = \int_{\mathcal{O}} q(x,y)\, u(y)\, dy, \quad \text{p.p. } \mathcal{O}
$$

Nous allons faire l'hypothèse suivante qui sera cruciale dans la suite :

(5.11) $\quad q \in L^{\infty}(\mathcal{O} \times \mathcal{O})$.

Remarquons qu'il existe $C \in \mathcal{L}^2(L^2(\mathcal{O}))$ unique tel que :

$$Q = C o C \quad , \quad C = C^*$$

Soit $c \in L^2(\mathcal{O} \times \mathcal{O})$ le noyau de l'opérateur C. Alors :

(5.12) $$q(x,y) = \int_{\mathcal{O}} c(x,z)\ c(y,z)\ dz$$

Il découle de l'égalité (5.12) que $q(x,y)$ a une trace sur la "diagonale" de $\mathcal{O} \times \mathcal{O}$, telle que :

$$q(x,x) = \int_{\Theta} c^2(x,z)\ dz \qquad \text{p.p. dans } \mathcal{O}$$

Donc $x \to q(x,x)$ est un élément de $L^1(\mathcal{O})$. Il résulte de l'hypothèse (5.11) que c'est un élément de $L^{\infty}(\mathcal{O})$.

D'après l'origine de l'opérateur Q , $Q \geqslant 0$, soit :

$$\forall\ f \in L^2(\mathcal{O}), \qquad \int_{\mathcal{O}} \int_{\mathcal{O}} q(x,y)\ f(x)\ f(y)\ dx\ dy \geqslant 0$$

Choisissons :

$$f = a\ 1_{[x_o - h, x_o + h]} + b\ 1_{[y_o - h,\ y_o + h]}$$

Alors :

$$(5.13)\quad \begin{cases} a^2 \displaystyle\int_{x_o-h}^{x_o+h} \int_{x_o-h}^{x_o+h} q(x,y)\,dx\,dy + 2ab \int_{x_o-h}^{x_o+h} \int_{y_o-h}^{y_o+h} q(x,y)\,dx\,dy \;+ \\ \qquad\qquad + \; b^2 \displaystyle\int_{y_o-h}^{y_o+h} \int_{y_o-h}^{y_o+h} q(x,y)\,dx\,dy \geqslant 0 \end{cases}$$

Multiplions (5.13) par $\frac{1}{h^2}$, et faisons tendre $h \to 0$. On obtient :

$$a^2\, q(x_o,x_o) + 2ab\, q(x_o,y_o) + b^2 q(y_o,y_o) \geqslant 0$$

p.p. dans $\mathcal{O} \times \mathcal{O}$, $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$.

Donc nécessairement :

$$(5.14)\quad \begin{cases} q(x,x) \geqslant 0 & \text{p.p. dans } \mathcal{O} \\ q^2(x,y) \leqslant q(x,x).q(y,y) & \\ & \text{p.p. dans } \mathcal{O} \times \mathcal{O} \end{cases}$$

Donc :

$$\sup_{(x,y)\in\mathcal{O}\times\mathcal{O}} \text{ess} \; |\, q(x,y)\, | = \sup_{x\in\mathcal{O}} \text{ess} \; q(x,x)$$

D'où (5.11) est une condition nécessaire et suffisante pour que $x \to q(x,x)$ soit un élément de $L^\infty(\mathcal{O})$.

Etant donné $u \in L^2(\mathcal{O})$, désignons par $B(u)$ l'opérateur linéaire (éventuellement non borné) dans $L^2(\mathcal{O})$ défini par :

$$[B(u)\ h](x) = u(x)\ h(x) \text{ p.p.}$$

Grâce à l'hypothèse (5.11), $B(u) \circ C \in \mathcal{L}^2(L^2(\mathcal{O}))$. En effet le noyau de l'opérateur $B(u) \circ C$ est :

$$u(x)\ c(x,y)$$

et $(x,y) \to u(x)\ c(x,y)$ est un élément de $L^2(\mathcal{O}\times\mathcal{O})$ puisque :

$$\int_{\mathcal{O}}\int_{\mathcal{O}} u^2(x)\ c^2(x,y)\ dxdy = \int_{\mathcal{O}} u^2(x)\ q(x,x)\ dx$$

$$\leq \underset{x\in\mathcal{O}}{\text{sup ess}}\ q(x,x)\quad |u|^2_{L^2(\mathcal{O})}$$

Donc, d'après les résultats classiques sur les opérateurs de Hilbert-Schmidt (cf. par exemple GOHBERG-KREIN [1]),

$$B(u) \circ C \in \mathcal{L}^2(L^2(\mathcal{O})) \quad \text{et :}$$

$$||B(u) \circ C\,||_2^2 \leq \lambda \quad |u|^2_{L^2(\mathcal{O})}$$

où $\lambda = \underset{x\in\mathcal{O}}{\text{sup ess}}\ q(x,x)$

Or il existe un processus de Wiener $\tilde{W}(t)$ défini sur $L^2(\mathcal{O})$, d'opérateur de covariance I, tel que :

$$W(t) = C\ \tilde{W}(t)$$

Posons :

$$\tilde{B}(u) = B(u) \circ C$$

Alors :

$$B(u)\ dW(t) = \tilde{B}(u)\ d\tilde{W}(t)$$

Mais $u \to \tilde{B}(u)$ est une application linéaire continue de $L^2(\mathcal{O})$ dans $\mathcal{L}^2(L^2(\mathcal{O}))$.

On peut donc appliquer le théorème 4.1., et l'équation :

$$(5.15) \quad \begin{cases} du(t) + A_1(t)\, u(t)\, dt + A_2(t,u(t))\, dt + \tilde{B}(u(t))\, d\tilde{W}(t) = 0 \\ u(0) = u_o \end{cases}$$

a une solution unique :

$$u \in L^2(0,T;H^1(\mathcal{O})) \cap L^3(\mathcal{C}) \cap C(0,T;L^2(\mathcal{O})) \text{ p.s.}$$

L'équation (5.8) est "l'interprétation" de (5.15).

Remarque 5.1. :

L'équation (5.8) est une version à paramètres distribués d'une équation classique en biologie des populations, qui s'écrit :

$$dN(t) = aN(t)(1-bN(t))dt + N(t)\, dW(t).$$

Dans le cas $W(t) \equiv 0$, il s'agit de l'équation "logistique". Si de plus $b = 0$, on obtient l'équation de croissance "malthusienne".

Dans l'équation (5.8), on pourrait prendre $\beta(t,x) \equiv 0$, au lieu de (5.10), ce qui revient au cas "malthusien". On aurait alors une solution :

$$u \in L^2(0,T;H^1(\mathcal{O})) \cap C(0,T;L^2(\mathcal{O})) \text{ p.s.}$$

On pourrait également remplacer la condition au bord de "Neumann" par une condition du type "Dirichlet", ce qui serait cependant moins bien adapté à notre problème. L'hypothèse $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ signifie que le flux de population à travers la frontière de l'habitat est nul. On pourrait aussi bien traiter le problème avec une condition de Neumann non homogène (comme dans l'Exemple 5.3).

On montrera au §7 que si $u_o(x) \geqslant 0$ p.p. dans $\mathcal{O}$, p.s., alors il en est de même de $u(t,x)$, $\forall\, t \in [0,T]$. Cela permettra de justifier l'interprétation de $u(t,x)$ comme une densité.

Remarque 5.2. :

Dans le cas où $\mathcal{O}$ est un intervalle borné de $\mathbb{R}$, $H^1(\mathcal{O}) \subset L^\infty(\mathcal{O})$, avec injection continue.

Alors $u \to B(u)$ est linéaire continue de $H^1(\mathcal{O})$ dans $\mathcal{L}(L^2(\mathcal{O}))$, et :

$$||B(u) \circ C||_2^2 \leqslant |u|^2_{L^\infty(\mathcal{O})} \cdot \mathrm{Tr}\ Q$$

$$\leqslant |u|^2_{H^1(\mathcal{O})} \times \delta^2\ \mathrm{Tr}\ Q$$

où δ est la constante de continuité de l'injection de $H^1(\mathcal{O})$ dans $L^\infty(\mathcal{O})$.

On peut alors se passer de l'hypothèse (5.11), à condition d'imposer :

$$\delta^2 . \mathrm{Tr}\ K < 2\alpha$$

pour assurer la coercivité.

§6. EQUATIONS POUR LA MOYENNE ET LA COVARIANCE

Supposons que les hypothèses du Théorème 3.1. sont vérifiées. Supposons en outre que :

(6.1) $\qquad A(t) \in \mathcal{L}(V,V') \qquad$ p.p.t.

Notons :

$$\overline{f}(t) = E\ f(t)$$

$$\overline{u}_o = E\ u_o$$

Soit $u \in L^2(\Omega \times]0,T[\,;V) \cap L^2(\Omega;\, C(0,T;H))$ la solution de :

$$(6.2)\qquad \begin{cases} du(t) + A(t)\,u(t)\,dt + B(t,u(t))\,dW(t) = f(t)\,dt + dM(t) \\ u(0) = u_o \end{cases}$$

On a alors le :

<u>Théorème 6.1.</u> : *L'espérance* $\overline{u}(t) = Eu(t)$ *est la solution de l'équation :*

$$(6.3)\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\,\overline{u}(t) + A(t)\,\overline{u}(t) = \overline{f}(t) \\ \overline{u}(0) = \overline{u}_o \end{cases}$$

<u>Démonstration</u> : $\forall\, v \in V$,

$$(u(t),v) + \int_o^t \langle A(s)\,u(s),\, v\rangle\, ds + \int_o^t (v, B(s,u(s)))\, dW(s) =$$

$$= (u_o,\, v) + \int_o^t \langle f(s),\, v\rangle\, ds + (M(t),\, v)$$

Mais alors :

$$(\overline{u}(t),v) + \int_o^t \langle \overline{u}(s),\, A^*(s)\, v\rangle\, ds = (\overline{u}_o,v) + \int_o^t \langle \overline{f}(s),\, v\rangle\, ds$$

d'où l'on déduit (6.2). ▨

Examinons maintenant l'équation de la covariance.

Nous nous plaçons dans le même cadre d'hypothèses que ci-dessus, et nous supposons en outre que :

(6.4) $\quad B(t) \in \mathcal{L}(V;\, \mathcal{L}^2(K,H))\quad$ p.p.t.

(6.5) $\quad M(t) \equiv 0,\quad f(t) = \overline{f}(t)$ p.s.

[i.e. f est déterministe] .

D'après les propriétés de la solution u de l'équation (6.2), l'application:

$$(\varphi, \psi) \to E\left[(u(t) - \bar{u}(t), \varphi)(u(t) - \bar{u}(t), \psi)\right]$$

est bilinéaire continue de $H \times H$ dans $\mathbb{R}$, $\forall t \in [0,T]$.

Donc $\forall t \in [0,T]$, $\exists\, P(t) \in \mathcal{L}(H)$ avec $P(t) = P^*(t)$ et $P(t) \geq 0$, tel que :

$$E\left[(u(t) - \bar{u}(t), \varphi)(u(t) - \bar{u}(t), \psi)\right] = (P(t)\varphi, \psi)$$

Soit Q l'opérateur de covariance du Wiener W(t). L'application :

$$u(t) \to [B(t)\ u(t)]\ \ Q[B(t)\ u(t)]^*$$

est bilinéaire. Donc la quantité :

$$E\ \{[B(t)\ u(t)]\ \ Q\ [B(t)\ u(t)]^*\}$$

ne dépend que de t, $\bar{u}(t)$ et P(t).

Posons :

$$F(t, \bar{u}(t), P(t)) = E\ \{[B(t)u(t)]\ Q\ [B(t)\ u(t)]^*\}$$

Soit $u \in L^2(\Omega x\ ]0,T[\ ;V) \cap L^2(\Omega; C(0,T;H))$ la solution :

$$(6.6)\qquad \begin{cases} du(t) + A(t)\ u(t)\ dt + B(t)\ u(t)\ dW(t) = f(t)\ dt \\ \\ u(0) = u_o \end{cases}$$

On a alors le :

<u>Théorème 6.2.</u> : *L'opérateur de covariance* P(t) *est solution de l'équation :*

$$(6.7)\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt} P(t) + A(t)\ P(t) + P(t)\ A^*(t) = F(t,\bar{u}(t), P(t)) \\ \\ P(0) = P_o \end{cases}$$

où P_o est défini par :

$$(P_o \varphi, \psi) = E \{(u_o - \bar{u}_o, \varphi)(u_o - \bar{u}_o, \psi)\}$$

$$\forall \varphi, \psi \in L^2(\mathcal{O})$$

Démonstration : On déduit des équations (6.6) et (6.3) :

$$\forall \varphi, \psi \in V$$

$$d(u(t) - \bar{u}(t), \varphi) + \langle A(t)\left[u(t) - \bar{u}(t)\right], \varphi\rangle\, dt + (\varphi, B(t)\, u(t)\, dW(t)) = 0$$

$$d(u(t) - \bar{u}(t), \psi) + \langle A(t)\left[u(t) - \bar{u}(t)\right], \psi\rangle\, dt + (\psi, B(t)\, u(t)\, dW(t)) = 0$$

$(u(t) - \bar{u}(t), \varphi)$ et $(u(t) - \bar{u}(t), \psi)$ sont des semi-martingales réelles. On peut donc appliquer le calcul différentiel stochastique de Ito au processus $(u(t) - \bar{u}(t), \varphi) \times (u(t) - \bar{u}(t), \psi)$, d'où :

$$E\{(u(t)-\bar{u}(t),\varphi)(u(t)-\bar{u}(t),\psi)\} + E\int_0^t \langle u(s)-\bar{u}(s), A^*(s)\varphi\rangle (u(s)-\bar{u}(s),\psi)\,ds \; +$$

$$+ E\int_0^t \langle u(s)-\bar{u}(s), A^*(s)\psi\rangle (u(s)-\bar{u}(s),\varphi)\,ds = E\{(u_o-\bar{u}_o,\varphi)(u_o-\bar{u}_o,\psi)\} +$$

$$+ E\left(\left(\int_0^t \left[B(s)u(s)\right] Q \left[B(s)u(s)\right]^* ds\right)\varphi, \psi\right)$$

$$(6.8)\quad \begin{cases} (P(t)\varphi, \psi) + \displaystyle\int_0^t \langle P(s) A^*(s)\varphi, \psi\rangle ds + \int_0^t \langle A(s)P(s)\varphi, \psi\rangle ds = \\ \qquad = (P(o)\varphi, \psi) + \displaystyle\int_0^t (F(s, \bar{u}(s), P(s))\varphi, \psi)\, ds \end{cases}$$

Il résulte de $u \in L^2(\Omega \times \left]0,T\right[\,; V)$ que :

$P(.) \in L^1(0,T; \mathcal{L}(V',V))$. Mais $A(.) \in L^\infty(0,T; \mathcal{L}(V,V'))$

Donc : $P(.)\ A^*(.) \in L^1(0,T;\mathcal{L}(V;V))$ et :

$$A(.)\ P(.) \in L^1(0,T;\mathcal{L}(V';V'))$$

Et tous les termes dans (6.8) ont un sens. (6.7) est une écriture abrégée pour (6.8).

Plaçons-nous dans le cas $H = L^2(\mathcal{O})$.

Il résulte des propriétés du processus u(.) que $P(t) \in \mathcal{L}^1(L^2(\mathcal{O}))$, $\forall t \in [0,T]$

En effet :

$$E|u(t) - \bar{u}(t)|^2_{L^2(\mathcal{O})} = ||P(t)||_1 < +\infty$$

Donc P(t) a un noyau p(t,x,y) tel que $p(t,.,.) \in L^2(\mathcal{O}\times\mathcal{O})$, $\forall t \in [0,T]$, qui vérifie :

$$\int_{\mathcal{O}}\int_{\mathcal{O}} p(t,x,y)\varphi(x)\ \psi(y)\ dxdy = E\left[(u(t) - \bar{u}(t),\varphi)(u(t) - \bar{u}(t),\psi)\right]$$

$$= E\int_{\mathcal{O}}\int_{\mathcal{O}} (u(t,x) - \bar{u}(t,x))(u(t,y) -$$

$$- \bar{u}(t,y))\varphi(x)\ \psi(y)\ dxdy$$

D'où finalement :

$$p(t,x,y) = E\left[(u(t,x) - \bar{u}(t,x))(u(t,y) - \bar{u}(t,y))\right]$$

$$\text{p.p. dans } \mathcal{O}\times\mathcal{O},\ \forall t.$$

Nous allons maintenant déduire du Théorème 6.2. une équation pour p(t,x,y) dans deux exemples particuliers.

Exemple 6.1. : Reprenons l'équation étudiée dans l'Exemple 5.4., avec $\beta(t,x) \equiv 0$.

Exprimons le noyau de $F(t,\bar{u}(t),\ P(t))$:

$$(F(t,\bar{u}(t),\ P(t))\varphi,\ \psi) = E\int_{\mathcal{O}}\int_{\mathcal{O}} u(t,x)\ q(x,y)\ u(t,y)\ \varphi(x)\ \psi(y)\ dxdy$$

$$= \int_{\mathcal{O}}\int_{\mathcal{O}} q(x,y)\ p(t,x,y)\ \varphi(x)\ \psi(y)\ dxdy$$

$$+ \int\int q(x,y)\ \bar{u}(t,x)\ \bar{u}(t,y)\ \varphi(x)\ \psi(y)\ dxdy$$

L'équation (6.8) s'écrit dans notre exemple :

$$\int_{\mathcal{O}}\int_{\mathcal{O}} p(t,x,y)\varphi(x)\psi(y)dxdy + \int_0^t \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\mathcal{O}}\int_{\mathcal{O}} \alpha_{ij}(x)\ \frac{\partial}{\partial x_i} p(s,x,y)\ \frac{\partial}{\partial x_j}\varphi(x)\psi(y)\ dxdyds\ +$$

$$+ \int_0^t \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\mathcal{O}}\int_{\mathcal{O}} \alpha_{ij}(y)\ \frac{\partial}{\partial y_i}\ p(s,x,y)\ \varphi(x)\ \frac{\partial}{\partial y_j}\ \psi(y)\ dxdyds\ +$$

$$+ \int_0^t \int_{\mathcal{O}}\int_{\mathcal{O}} \left[\gamma(t,x) + \gamma(t,y)\right]\ p(t,x,y)\ \varphi(x)\ \psi(y)\ dxdyds\ =$$

$$= \int_{\mathcal{O}}\int_{\mathcal{O}} p(0,x,y)\ \varphi(x)\ \psi(y)\ dxdy + \int_0^t \int_{\mathcal{O}}\int_{\mathcal{O}} q(x,y)\ \Big[p(s,x,y)$$

$$+ \bar{u}(s,x)\ \bar{u}(s,y)\Big]\ \varphi(x)\ \psi(y)\ dxdyds$$

$$\forall\ \varphi,\psi \in H^1(\mathcal{O})$$

Cette équation "s'interprète" de la façon suivante (sous des hypothèses convenables, on peut [cf. LIONS-MAGENES [1]] justifier cette interprétation) :

$$
(6.9)\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial t} p(t,x,y) - \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_j}(\alpha_{ij}(x) \dfrac{\partial}{\partial x_i} p(t,x,y)) \\[2ex]
\qquad - \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial y_j}(\alpha_{ij}(y) \dfrac{\partial}{\partial y_i} p(t,x,y)) \\[2ex]
\qquad + \left[\gamma(t,x) + \gamma(t,y) - q(x,y)\right] p(t,x,y) = \\[2ex]
= q(x,y)\, \overline{u}(t,x)\, \overline{u}(t,y). \qquad \text{p.p. dans }]0,T[\times \mathcal{O} \times \mathcal{O}
\end{cases}
$$

$$
(6.10)\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial n_x} p(t,x,y)\Big|_{x\in\Gamma} = 0 \qquad \dfrac{\partial}{\partial n_y} p(t,x,y)\Big|_{y\in\Gamma} = 0 \\[2ex]
p(0,x,y) = E\,\{(u_o(x) - \overline{u}_o(x))(u_o(y) - \overline{u}_o(y))\}
\end{cases}
$$

On peut appliquer le Théorème 2.1. du Chapitre 1, et l'équation (6.9)-(6.10) a une solution unique :

$$p \in L^2(0,T;H^1(\mathcal{O}\times\mathcal{O})) \cap C(0,T;L^2(\mathcal{O}\times\mathcal{O})) \qquad \blacksquare$$

Exemple 6.2. : Soient $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}$, $H = L^2(\mathcal{O})$, $V = H_0^1(\mathcal{O})$, $W(t)$ un mouvement brownien scalaire. On considère l'équation :

$$
(6.11)\quad \begin{cases}
du(t,x) - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x) + \sigma \dfrac{\partial}{\partial x} u(t,x)\, dW(t) = 0 \\[2ex]
u\big|_{\Sigma} = 0 \qquad u(0,x) = u_o(x)
\end{cases}
$$

Si $u_o \in L^2(\Omega x \mathcal{O})$, indépendant de $W(t)$, on peut appliquer le Théorème 3.1. à l'équation (6.11), pourvu que :

(6.12) $\qquad \sigma^2 < 2$

$\overline{u}(t,x) = E\ u(t,x)$ est solution de :

$$
(6.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\ \overline{u}(t,x) - \dfrac{\partial^2}{\partial^2}\ \overline{u}(t,x) = 0 \\ \qquad\qquad \overline{u}(0,x) = \overline{u}_o(x) \end{array} \right.
$$

Soit $p(t,x,y) = E\ \{(u(t,x) - \overline{u}(t,x)(u(t,y) - \overline{u}(t,y))$

On déduit du Théorème 6.2., par un calcul analogue à celui que nous avons fait dans l'Exemple 6.1., que p est solution de l'équation :

$$
(6.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\ p(t,x,y) - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\ p(t,x,y) - \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\ p(t,x,y) - \sigma^2\ \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y}\ p(t,x,y) = \\ \qquad\qquad = \dfrac{\partial}{\partial x}\ \overline{u}\ (t,x)\ \dfrac{\partial}{\partial y}\ \overline{u}(t,y) \\ p(t,x,y)\Big|_{x \in \Gamma} = 0 \quad p(t,x,y)\Big|_{y \in \Gamma} = 0 \quad p(0,x,y) = p_o(x,y) \end{array} \right.
$$

Soit $A_\sigma \in \mathcal{L}(H_0^1(\mathcal{O} x \mathcal{O})\ ;\ H^{-1}(\mathcal{O} x \mathcal{O}))$ défini par :

$$
\langle A_\sigma\ u,\ v\rangle = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\ ,\ \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\ ,\ \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \sigma^2\ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\ ,\ \frac{\partial v}{\partial y}\right)
$$

$$
u,\ v \in H_0^1\ (\mathcal{O} x \mathcal{O})
$$

On vérifie aisément que l'opérateur A_σ est coercif si et seulement si :

$$\sigma^2 < 2$$

On retrouve donc ici la même condition (6.12) que celle qui permet d'appliquer le Théorème 3.1.

De plus,

$$(t,x,y) \to \frac{\partial}{\partial x} \bar{u}(t,x) \frac{\partial}{\partial y} \bar{u}(t,y)$$

est un élément de $L^1(0,T\ ;\ L^2(\mathcal{O}\times\mathcal{O}))$.

Donc, sous l'hypothèse (6.12), on peut appliquer le Théorème 2.1. du Chapitre 1 à l'équation (6.14), laquelle a une solution unique :

$$p \in L^2(0,T;\ H_0^1(\mathcal{O}\times\mathcal{O})) \cap C(0,T;L^2(\mathcal{O}\times\mathcal{O}))$$

§7. PRINCIPE DU MAXIMUM

Nous allons démontrer un principe du maximum pour l'équation de l'Exemple 5.4., i.e. nous allons montrer que si $u_o(x) \geqslant 0$ p.p. dans , p.s., alors il en est de même de $u(t,x)$, $\forall t \in [0,T]$.

La démonstration classique du résultat analogue pour les équations aux dérivées partielles déterministes consiste à différencier l'application :

$$t \to \phi(u(t)) = \int |u^-(t,x)|^2\, dx$$

où $u^-(t,x) = \sup\ (0, -u(t,x))$

et à montrer que $\phi(u(t))$ est une fonction décroissante de t. On en déduit alors que si $\phi(u_o) = 0$, $\phi(u(t)) = 0$, $\forall\, t \in [0,T]$

Ici, on ne peut pas travailler avec cette fonctionnelle ϕ, car :

$$\varphi(r) = |r^-|^2$$

n'a pas de dérivée seconde en $r = 0$.

Nous allons "approximer" φ par des fonctions φ_ε de classe C^2.

Etant donné $\varepsilon>0$, on pose :

$$\varphi_\varepsilon(r) = \begin{cases} r^2 - \dfrac{\varepsilon^2}{6} & \text{si } r \leqslant -\varepsilon \\ -\dfrac{r^4}{2\varepsilon^2} - \dfrac{4r^3}{3\varepsilon} & \text{si } -\varepsilon \leqslant r \leqslant 0 \\ 0 & \text{si } r \geqslant 0 \end{cases}$$

Alors :

$$\varphi_\varepsilon'(r) = \begin{cases} 2r & \text{si } r \leqslant -\varepsilon \\ -\dfrac{2r^3}{\varepsilon^2} - \dfrac{4r^2}{\varepsilon} & \text{si } -\varepsilon \leqslant r \leqslant 0 \\ 0 & \text{si } r \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\varphi_\varepsilon''(r) = \begin{cases} 2 & r \leqslant -\varepsilon \\ -\dfrac{6r^2}{\varepsilon^2} - \dfrac{8r}{\varepsilon} & \text{si } -\varepsilon \leqslant r \leqslant 0 \\ 0 & \text{si } r \geqslant 0 \end{cases}$$

Donc $\varphi_\varepsilon(.) \in C^2(\mathbb{R})$, et vérifie :

$$(7.1) \quad \begin{cases} |\varphi_\varepsilon(r)| \leqslant r^2 \\ |\varphi_\varepsilon'(r)| \leqslant 2r \\ |\varphi_\varepsilon''(r)| \leqslant \dfrac{8}{3} \end{cases}$$

Posons :

$$\phi_\varepsilon(u) = \int_{\mathcal{O}} \varphi_\varepsilon(u(x))\, dx, \qquad u \in L^2(\mathcal{O})$$

Considérons l'équation :

$$(7.2)\quad \begin{cases} du(t,x) - \sum_{i,j=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\alpha_{ij}(x)\,\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial x_i}\right) + \beta(t,x)\,|u(t,x)|\,u(t,x) + \\[2ex] \qquad + \gamma(t,x)\; u(t,x) + u^+(t,x)\; dW(t,x) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial n}\, u(t,x)\Big|_{\Sigma} = 0 \qquad\qquad u(0,x) = u_o(x) \end{cases}$$

Montrons-le :

<u>Théorème 7.1.</u> : *L'équation* (7.2) *a une solution unique* :

$$u \in L^2(0,T;H^1_0(\mathcal{O})) \cap L^3(\mathcal{C}) \cap C(0,T;L^2(\mathcal{O}))\ \text{p.s.},$$

telle que si : $\quad u_o(x) \geqslant 0$ p.p. *dans* $\mathcal{O}$, p.s.,

alors : $\quad u(t,x) \geqslant 0$ p.p. *dans* $\mathcal{O}$ $\forall\, t \in [0,T]$, p.s.

<u>Démonstration</u> :

Les hypothèses étant les mêmes que celles faites dans l'Exemple 5.4., on vérifie aisément que l'équation (7.2) a une solution unique :

$$u \in L^2(0,T;H^1(\mathcal{O})) \cap L^3(\mathcal{C}) \cap C(0,T;L^2(\mathcal{O}))\ \text{p.s.}$$

En effet, l'application :

$$v \to v^+$$

est lipschitzienne de $L^2(\mathcal{O})$ dans $L^2(\mathcal{O})$, de constante 1, et les hypothèses de coercivité et de monotonie sont donc encore vérifiées.

De plus, grâce à (7.1) et au fait que $\varphi_\varepsilon \in C^2(\mathbb{R})$, toutes les hypothèses sont vérifiées pour permettre d'appliquer le Théorème 5.3. du Chapitre 2 [cf. Exemple 5.2. du Chapitre 2], donc :

$$(7.3)\quad \begin{cases} \phi_\varepsilon(u(t)) + \int_0^t \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\mathcal{O}} \alpha_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u(s,x) \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi'_\varepsilon(u(s,x))\, dxds \,+ \\ \quad + \int_0^t \int_{\mathcal{O}} \left[\beta(s,x)|u(s,x)| + \gamma(s,x)\right] u(s,x)\, \varphi'_\varepsilon(u(s,x))\, dxds \,+ \\ \quad + \int_0^t (\varphi'_\varepsilon(u(s)),\ u^+(t)\, dW(t))_{L^2(\mathcal{O})} = \phi_\varepsilon(u_o) \,+ \\ \quad\quad + \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \int_0^t \phi''_\varepsilon(u(s))\, d\langle\langle \int_0^{\cdot} u^+(r)dW(r)\rangle\rangle_s \end{cases}$$

Montrons d'abord les :

<u>Lemme 7.1.</u> : $\int_0^t (\varphi'_\varepsilon(u(s)),\ u^+(s)\, dW(s)) = 0\ \forall t \in [0,T]$, p.s.

<u>Démonstration</u> : Il suffit de montrer que :

$$\langle\langle \int_0^{\cdot} (\varphi'_\varepsilon(u(s)),\ u^+(s)\, dW(s)) \rangle\rangle_t = 0\ \forall t \in [0,T],\ \text{p.s.}$$

Or :

$$\langle\langle \int_0^{\cdot} (\varphi'_\varepsilon(u(s)),\ u^+(s)\, dW(s))\rangle\rangle_t = \int_0^t \int_{\mathcal{O}} \int_{\mathcal{O}} \varphi'_\varepsilon(u(s,x))u^+(s,x)q(x,y)\ \varphi'_\varepsilon(u(s,y))\ \times$$
$$\times\ u^+(s,y)\ dxdyds$$

Mais :

$$\varphi'_\varepsilon(u(s,x))\ u^+(s,x) = 0\quad \text{p.p.}\quad \forall\, s \in [0,T]$$

$$\varphi'_\varepsilon(u(s,y))\ u^+(s,y) = 0\quad \text{p.p.}\quad \forall\, s \in [0,T]$$

<u>Lemme 7.2.</u> : $$\mathrm{Tr} \int_o^t \phi''_\varepsilon(u(s))\ d \ll \int_o^{\cdot} u^+(r)\ dW(r) \gg_s = 0$$

$$\forall\ t \in [0,T]\ ,\ \text{p.s.}$$

<u>Démonstration</u> : Etant donné $h \in L^2(\mathcal{O})$, notons $B(h) \in \mathcal{L}(L^2(\mathcal{O}), L^1(\mathcal{O}))$ l'opérateur défini par :

$$[B(h)\ u](x) = h(x)\ u(x)\ \text{p.p.}$$

Alors :

$$\mathrm{Tr} \int_o^t \phi''_\varepsilon(u(s))\ d \ll \int_o^{\cdot} u^+(r)\ dW(r) \gg_s = \int_o^t \mathrm{Tr}\Big[B(\varphi''_\varepsilon(u(s)))B(u^+(s))QB(u^+(s))^*\Big]\ ds$$

$$= \int_o^t \mathrm{Tr}\Big[B\big(\varphi''_\varepsilon(u(s))\ u^+(s)\big)QB(u^+(s))^*\Big]\ ds$$

Mais :

$$\varphi''_\varepsilon(u(s,x))u^+(s,x) = 0 \qquad \text{p.p. dans } \mathcal{O}\ ,\forall s \in [0,T]\ \text{p.s.}$$

Donc $\forall s \in [0,T]$, l'opérateur $B(\varphi''_\varepsilon(u(s))\ u^+(s))$ est l'opérateur nul, p.s. ∎

<u>Fin de la démonstration du Théorème 7.1</u>

L'identité (7.3) s'écrit encore :

$$(7.4)\quad \left\{\begin{aligned} &\phi_\varepsilon(u(t)) + \int_o^t \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathcal{O}} \alpha_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i} u(s,x)\frac{\partial}{\partial x_j} u(s,x)\ \varphi''_\varepsilon(u(s,x))\,dxds \\ &\quad + \int_o^t \int_{\mathcal{O}} \big[\beta(s,x)\,|u(s,x)| + \gamma(s,x)\big]\ u(s,x)\ \varphi'_\varepsilon(u(s,x))\ dxds = \phi_\varepsilon(u_o) \end{aligned}\right.$$

Remarquons que :

$$\forall\, r \in \mathbb{R},\ \varphi_\varepsilon'(r) \leqslant 0,\ \varphi_\varepsilon''(r) \geqslant 0$$

Donc :

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}(x) \frac{\partial u(s,x)}{\partial x_i} \frac{\partial u(s,x)}{\partial x_j} \varphi_\varepsilon''(u(s,x)) \geqslant \varphi_\varepsilon''(u(s,x)) \sum_{i=1}^{n} \alpha \left|\frac{\partial u(s,x)}{\partial x_i}\right|^2$$

$$\geqslant 0 \qquad \text{p.p. dans } \mathcal{C}.$$

Et encore :

$$\left.\begin{aligned} u(s,x)\ \varphi_\varepsilon'(u(s,x)) &\geqslant 0 \\ \beta(s,x) &\geqslant 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{p.p. dans } \mathcal{C}.$$

D'où :

$$\beta(s,x)\ |u(s,x)|\ u(s,x)\ \varphi_\varepsilon'(u(s,x)) \geqslant 0 \quad \text{p.p. dans } \mathcal{C}.$$

On tire donc de (7.4) :

$$(7.5) \qquad \phi_\varepsilon(u(t)) \leqslant \phi_\varepsilon(u_o) - \int_o^t \int_{\mathcal{O}} \gamma(s,x)\ u(s,x)\varphi_\varepsilon'(u(s,x))\ dx\ ds$$

Pour presque tout $(s,x) \in \mathcal{C}$,

$$u(s,x)\ \varphi_\varepsilon'(u(s,x)) \nearrow 2\ \varphi(u(s,x))$$

Et $\forall\, t \in [0,T]$,

$$\phi_\varepsilon(u(t)) \quad \to \quad \phi(u(t)) \quad \text{p.s.}$$

puisque : $\varphi_\varepsilon(u(t,x)) \nearrow \varphi(u(t,x))$ p.p. dans $\mathcal{O}$, p.s.

On peut donc faire tendre $\varepsilon \to 0$ dans l'inégalité (7.5), ce qui donne :

$$\phi(u(t)) \leqslant \phi(u_o) - \int_o^t \int_{\mathcal{O}} \gamma(s,x)\ \varphi(u(s,x))\ dx\ ds.$$

Mais $\gamma \in L^{\infty}(\mathcal{C})$, donc $\exists C$ tel que :

$$|\gamma(s,x)| \leq C \qquad \text{p.p. dans } \mathcal{C} \text{ , d'où :}$$

$$(7.6) \qquad \phi(u(t)) \leq \phi(u_o) + C \int_o^t \phi(u(s))\, ds.$$

On déduit de l'inégalité (7.6) et du Lemme de Gronwall que si $\phi(u_o) = 0$ p.s., alors $\phi(u(t)) = 0 \ \forall t \in [0,T]$, p.s. ▩

Montrons maintenant le :

<u>Théorème 7.2.</u> : *Si* $u_o(x) \geq 0$ p.p. *dans* $\mathcal{O}$, p.s. *; alors la solution* u *de l'équation* (5.8) *[de l'Exemple* 5.4.*] vérifie :*

$$u(t,x) \geq 0 \qquad \text{p.p. dans } \mathcal{O}, \forall t \in [0,T] \text{ ; p.s.}$$

<u>Démonstration</u> :

Si l'hypothèse du Théorème est vérifiée, alors, d'après le Théorème 7.1., la solution de l'équation (7.2) vérifie :

$$(7.7) \qquad u(t,x) \geq 0 \qquad \text{p.p. dans } \mathcal{O}, \quad \forall t \in [0,T], \text{ p.s.}$$

Elle est donc aussi solution de l'équation (5.8), et coïncide avec l'unique solution de (5.8), qui a donc la propriété (7.7). ▩

IIIème PARTIE

EQUATIONS STOCHASTIQUES DU SECOND ORDRE EN t, DE TYPE MONOTONE

ORIENTATION

Le but de cette troisième partie est l'étude des équations du type :

$$\begin{cases} du'(t) + A(t)\, u(t)\, dt + B(t, u'(t))\, dt + C(t, u(t), u'(t))\, dW(t) \\ \qquad\qquad = f(t)dt + dM(t) \\ u(o) = u_o \\ u'(o) = u_1 \end{cases}$$

où $A(t)$ est une famille d'opérateurs linéaires, et B et C sont éventuellement non linéaires, tout en vérifiant une hypothèse de monotonie.

L'exemple le plus simple d'une telle équation est donné par l'équation des ondes excitée par un bruit blanc, qui s'écrit, au sens des distributions :

$$\begin{cases} u''(t) - \Delta u(t) = \dfrac{dW(t)}{dt} \\ u(o) = u_o,\ u'(o) = u_1 \end{cases}$$

Des équations de ce type, dans le cas linéaire, ont déjà été étudiées, par exemple par CABANNA [1] et YAVIN [1] .

Nous utiliserons largement dans cette partie les résultats et les techniques décrits dans la deuxième partie de l'article de LIONS-STRAUSS [1], et dans STRAUSS [1] , qui étudient ces mêmes équations dans le cas déterministe. Par ailleurs, les notations, la démarche et les méthodes de démonstration seront très semblables à ce que nous avons fait dans la IIème partie.

CHAPITRE 1

PREMIERE EXTENSION DES RESULTATS DETERMINISTES

§1. HYPOTHESES ET NOTATIONS

On se donne deux espaces de Hilbert V et H, et un espace de Banach réflexif W, tous trois sur le corps des réels, qui vérifient :

$V \subset H$ et $W \subset H$, V et W étant denses dans H, et les injections continues.

On suppose en outre que $V \cap W$ est séparable, et dense à la fois dans V et dans W.

On identifie H à son dual, et on a donc :

$$(V \cap W) \subset V \subset H \subset V' \subset (V \cap W)'$$
$$(V \cap W) \subset W \subset H \subset W' \subset (V \cap W)'$$

On se donne une famille d'opérateurs linéaires auto-adjoints :

$$A(t) \in \mathscr{L}(V,V') \qquad (o \leqslant t \leqslant T)$$

qui est faiblement continûment différentiable comme fonction de t, c'est-à-dire telle que :

$$\forall u,v \in V, \qquad t \to \langle A(t)u,v \rangle$$

est une fonction continûment différentiable.

Posons $D(A(t)) = \{u \in V \;;\; A(t)\, u \in H\}$

On suppose qu'il existe un espace de Banach X tel que :

(i) $X \subset D(A(t)) \cap W, \qquad \forall t \in [0,T]$

(ii) L'injection de X dans $V \cap W$ est continue

(iii) X est dense dans H

Si $u \in L^1(0,T;V)$, on notera :

Au la fonction $t \to A(t)\, u(t)$

et $A'u$ la fonction $t \to \left[\frac{d}{dt} A(t)\right] . u(t)$

On vérifie, en utilisant le théorème de Banach-Steinhaus, que les hypothèses précédentes entrainent que $A(t)$ et $A'(t)$ sont des familles d'opérateurs uniformément bornées de V dans V'.

On suppose que $A(t)$ vérifie les hypothèses :

(1.1) $\exists\, \alpha>0$ tel que :

$$\langle A(t)u,u\rangle \geqslant \alpha \left[u\right]^2, \qquad \begin{array}{l}\forall\, t \in [0,T]\\ \forall\, u \in V\end{array}$$

où $[u]$ est une semi-norme sur V, telle que :

$$[u]^2 + |u|_H^2 \leqslant \|u\|^2$$

(1.2) $\langle A'(t)u,u\rangle \leqslant 0, \quad \forall\, t \in [0,T] \;;\; \forall\, u \in V$

On se donne en outre, une famille d'opérateurs $B(t,.) : W \to W'$, définis pour presque tout $t \in]0,T[$, et qui vérifient :

(1.3) $B(t,.)$ est hémicontinu, i-e :

$\lambda \to \langle B(t,u+\lambda v), w \rangle$ est continue pour presque tout $t \in)0,T($, et $\forall\, u,v,w \in W$

(1.4) $\exists\, \gamma>0$ tel que :

$$\langle B(t,u),u \rangle \geqslant \gamma\, ||u||_W^p \quad \text{pp } t \in)0,T(, \quad \forall\, u \in W$$

(1.5) $\exists\, \beta$ tel que :

$$||B(t,u)||_{W'} \leqslant \beta\, ||u||_W^{p-1} \quad \text{pp } t \in)0,T(, \quad \forall\, u \in W$$

où p est un nombre réel, $p > 1$

(1.6) $\langle B(t,u) - B(t,v), u-v \rangle \geqslant 0 \quad \text{pp } t \in)0,T(, \quad \forall\, u,v \in W$

(1.7) $\forall\, u \in W$, $t \to B(t,u)$ est Lebesgue mesurable de $]0,T[$ à valeurs dans W'.

On se donne d'autre part, un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{F},P)$, et une famille croissante $\mathcal{F}_t$, $t \geqslant 0$ de sous-tribus de $\mathcal{F}$, telle que $\mathcal{F}_o$ contienne tous les P négligeables de $\mathcal{F}$.

§2. LES RESULTATS DETERMINISTES

On a le théorème (cf. LIONS-STRAUSS [1]) :

Théorème 2.1 - *Sous les hypothèses* (1.1)...(1.7) *et étant donnés* :

$u_o \in V$
$u_1 \in H$
$f \in L^1(0,T;H) + L^{p'}(0,T;W')$
$\exists$ une fonction u unique, telle que :
$u \in L^\infty(0,T;V)$

$u' \doteq \dfrac{du}{dt} \in L^p(0,T;W) \cap L^\infty(0,T;H)$ qui soit solution de :

$$(2.1)\quad \begin{cases} u''(t) + A(t)\,u(t) + B(t,u(t)) = f(t) \\ u(o) = u_o \\ u'(o) = u_1 \end{cases}$$

Nous allons avoir besoin d'une variante de ce théorème.

Etant donné :

$g \in L^p(0,T;W)$,

définissons une nouvelle famille d'opérateurs : $B_g(t,.) : W \to W'$, par :

$B_g(t,u) = B(t,u+g(t))$ pour presque tout $t \in)0,T($, et $u \in W$

Nous voulons établir un théorème d'existence et d'unicité pour l'équation :

$$(2.2)\quad \begin{cases} u''(t) + A(t)\,u(t) + B_g(t,u'(t)) = f(t) \\ u(o) = u_o \\ u'(o) = u_1 \end{cases}$$

La famille d'opérateurs $B_g(t,.)$ vérifie les hypothèses (1.3), (1.6) et (1.7)
Les hypothèses (1.4) et (1.5) sont remplacées par :

$$(2.3)\quad < B_g(t,u),u > + \lambda\, ||g(t)||_W^p \geq \frac{\gamma}{2^p}\, ||u||_W^p \qquad \text{pp } t \in)0,T(,\ \forall u \in W$$

$$(2.4)\quad ||B_g(t,u)||_{W'} < \beta(||g(t)||_W + ||u||_W)^{p-1}$$

Ces deux hypothèses permettent d'affirmer :

a) Si $\int_0^T < B_g(t,u_n(t)),\ u_n(t) > dt$ est borné, alors u_n est borné dans $L^p(0,T;W)$.

b) Si u_n est borné dans $L^p(0,T;W)$, alors $B_g(.,u_n)$ est borné dans $L^{p'}(0,T;W')$.

La démonstration du théorème 2.1 peut donc être étendue à l'équation (2.2), et l'on a le théorème :

Théorème 2.2 : *Sous les hypothèses du Théorème* 2.1, *et si* $g \in L^p(0,T;W)$, $\exists$ *une fonction* u *unique telle que* : $u \in L^\infty(0,T;V)$, $u' \in L^p(0,T;W) \cap L^\infty(0,T;H)$, *solution de* (2.2).

On a d'autre part, le théorème (cf. STRAUSS [1])

Théorème 2.3 : *Les espaces* V, W *et* H, *et les opérateurs* A(t) *étant comme au* §1, *étant donné :*

$u \in L^\infty(0,T;V)$ *tel que :*
$u' \in L^p(0,T;W) \cap L^\infty(0,T;H)$
s'il existe $f \in L^{p'}(0,T;W') + L^1(0,T;H)$ *tel que :*
$u''(t) + A(t)\,u(t) = F(t)$ pp $t \in)0,T($
alors l'égalité suivante est vérifiée :

$$(2.5)\qquad |u'(t)|_H^2 + <A(t)u(t),u(t)> - |u'(o)|_H^2 - <A(o)\,u(o),\,u(o)> = \int_o^t <A'(\sigma)\,u(\sigma),\,u(\sigma)>\,d\sigma + 2\int_o^t < F(\sigma),\,u'(\sigma) > d\sigma$$

<u>Corollaire 1</u> : Sous les hypothèses du théorème 2.3,

$u \in C(0,T;V)$

$u' \in C(0,T;H)$

<u>Démonstration</u> :

Les hypothèses faites entrainent que :

$u \in L^{\infty}(0,T;V) \cap C(0,T;H)$

$u' \in L^{\infty}(0,T;H) \cap C(0,T;V')$

Ceci permet d'affirmer, grâce aux résultats de STRAUSS [1], que :

$u \in C(0,T;V$ faible$)$

$u' \in C(0,T;H$ faible$)$

Par ailleurs, on déduit de (2.5) que :

$t \to |u'(t)|_H^2 + \langle A(t)\, u(t), u(t)\rangle$ est une fonction continue sur $[0,T]$.

Soit $t_n \to t$ dans $[0,T]$. Alors

$$|u'(t_n)|^2 + \langle A(t_n)\, u(t_n), u(t_n)\rangle \to |u'(t)|^2 + \langle A(t)\, u(t), u(t)\rangle \tag{2.6}$$

Mais, par ailleurs :

$$\langle [A(t) - A(t_n)]\, u(t_n), u(t_n)\rangle \to 0 \tag{2.7}$$

En effet :

$$||A(t) - A(t_n)||_{\mathcal{L}(V,V')} \to 0$$

car, d'après le théorème des accroissements finis :

$\langle [A(t) - A(t_n)]u,v\rangle = (t-t_n) \quad \langle A'(\theta(n,u,v))u,v\rangle$

$||A(t) - A(t_n)|| \leqslant c(t-t_n)$

On tire de (2.6) et (2.7) :

$$|u'(t_n)|^2 + \langle A(t)\, u(t_n), u(t_n)\rangle \to |u'(t)|^2 + \langle A(t)\, u(t), u(t)\rangle \tag{2.8}$$

Grâce aux continuités faibles, on tire de (2.8) :

$$(2.9)\qquad |u'(t) - u'(t_n)|^2 + \langle A(t)\left[u(t) - u(t_n)\right], u(t) - u(t_n)\rangle \to 0$$

On tire de (1.1), joint au fait que $u \in C(0,T;H)$:

$$(2.10)\qquad \ell im \sup \langle A(t)\left[u(t) - u(t_n)\right], u(t) - u(t_n)\rangle \geq \alpha \ \ell im \sup ||u(t) - u(t_n)||_V^2$$

On déduit enfin de (2.9) et (2.10) :

$$\left|u'(t_n) - u'(t)\right|_H^2 \to 0$$

$$\left\| u(t_n) - u(t) \right\|_V^2 \to 0$$

ce qui permet de conclure. ▒

Corollaire 2 : La solution de l'équation (2.2) vérifie :

$u \in C(0,T;V)$
$u' \in C(0,T;H)$ ▒

§3. MESURABILITE DE LA SOLUTION PAR RAPPORT AUX DONNEES - UN PREMIER TYPE D'EQUATIONS STOCHASTIQUES DU SECOND ORDRE EN t.

Reprenons l'équation (2.2).

Posons : $f = f_1 + f_2$, avec : $f_1 \in L^1(0,T;H)$

$f_2 \in L^{p'}(0,T;W')$

Théorème 3.1 : *L'application définie par le Théorème 2.2, qui à :* (u_o, u_1, g, f_1, f_2) *associe :* (u,u') *est continue de :* $V \times H \times L^p(0,T;W) \times L^1(0,T;H) \times L^{p'}(0,T;W')$ *à valeurs dans :*

$C(0,T;V) \times \left[C(0,T;H) \text{ fort} \cap L^p(0,T;W) \text{ faible}\right]$

Démonstration : Il nous suffit de montrer la continuité pour des suites.

Soient donc :

$$u_o^n \to u_o \qquad \text{dans } V$$
$$u_1^n \to u_1 \qquad \text{dans } H$$
$$g^n \to g \qquad \text{dans } L^p(0,T;W)$$
$$f_1^n \to f_1 \qquad \text{dans } L^1(0,T;H)$$
$$f_2^n \to f_2 \qquad \text{dans } L^{p'}(0,T;W')$$

On désignera par u_n la solution de l'équation (2.2) avec les données $(u_o^n, u_1^n, g^n, f_1^n, f_2^n)$, et par u la solution de la même équation, avec les données (u_o, u_1, g, f_1, f_2).

Montrons tout d'abord le :

Lemme 3.1 u'_n *reste dans un borné de* $C(0,T;H) \cap L^p(0,T;W)$

Démonstration : De l'équation :

$$(3.1)\quad \begin{cases} u''_n(t) + A(t)u_n(t) + B_{g^n}(t,u_n(t)) = f_1^n(t) + f_2^n(t) \\ \qquad\qquad u_n(o) = u_o^n \;, \quad u'_n(o) = u_1^n \end{cases}$$

on tire, grâce au théorème 2.3 :

$$(3.2)\quad \begin{cases} |u'_n(t)|^2 + \langle A(t)\, u_n(t), u_n(t)\rangle - |u_1^n|^2 - \langle A(o)u_o^n , u_o^n\rangle + \\ \qquad + 2\displaystyle\int_o^t \langle B_{g^n}(u'_n), u'_n\rangle\, ds \leqslant 2\int_o^t (f_1^n, u'_n)\, ds + \\ \qquad + 2\displaystyle\int_o^t \langle f_2^n, u'_n\rangle\, ds \end{cases}$$

En utilisant les hypothèses faites sur les opérateurs A et B, et les majorations habituelles, on tire de (3.2) :

$$(3.3)\quad \left\{\begin{aligned} & |u'_n(t)|^2 + \alpha\, \|u_n(t)\|_V^2 + \frac{\gamma}{2^{p-1}} \int_o^t \|u'_n(s)\|_W^p\, ds \leqslant \\ & \leqslant |u_1^n|^2 + \langle A(o)\, u_o^n, u_o^n\rangle + \alpha\, |u_n(t)|^2 + 4\left(\int_o^T |f_1^n(t)|\, dt\right)^2 + \\ & + \rho \int_o^T \|f_2^n(t)\|^p\, dt + \frac{1}{4} \sup_{s\leqslant t} |u'_n(s)|^2 + \frac{\gamma}{2} \int_o^t \|u'_n(s)\|_W^p\, dt \end{aligned}\right.$$

où ρ est une constante positive.

On vérifie aisément :

$$(3.4)\quad |u_n(t)|^2 \leqslant 2\, |u_o^n|^2 + 2 \int_o^t |u'_n(s)|^2\, ds$$

Il existe une constante C telle que :

$$(3.5)\quad \left\{\begin{aligned} & |u_1^n|^2 + \langle A(o)\, u_o^n, u_o^n\rangle + 2\,\alpha |u_o^n|^2 + 2\,\lambda \int_o^T \|g^n(t)\|_W^p\, dt + \\ & + 4\left(\int_o^T |f_1^n(t)|\, dt\right)^2 + \rho \int_o^T \|f_2^n(t)\|_{W'}^{p'}\, dt \leqslant C \end{aligned}\right.$$

On tire de (3.3), (3.4) et (3.5) :

$$\sup_{s\leqslant t} \left[|u'_n(s)|^2 + \frac{\gamma}{2^p} \int_o^s \|u'_n(\sigma)\|_W^p\, d\sigma \right] \leqslant C + \frac{1}{4} \sup_{s\leqslant t} |u'_n(s)|^2 +$$

$$+ 2\,\alpha \int_o^t |u'_n(s)|^2\, ds$$

Donc encore :

$$(3.6)\quad \frac{1}{4} \sup_{s\leqslant t} |u'_n(s)|^2 + \frac{\gamma}{2^{p+1}} \int_o^t ||u'_n(s)||_W^p \, ds \leqslant C + 2\,\alpha \int_o^t |u'_n(s)|^2 \, ds$$

De (3.6), on tire d'abord :

$$|u'_n(t)|^2 \leqslant 4\,C + 8\,\alpha \int_o^t |u'_n(s)|^2 \, ds$$

$$(3.7)\quad \sup_{t\leqslant T} |u'_n(t)|^2 \leqslant C_1$$

On tire alors de (3.6) :

$$(3.8)\quad \int_o^T ||u'_n(t)||_W^p \, dt \leqslant C_2$$

<u>Suite de la démonstration du théorème 3.1</u> :

Considérons la différence $u(t) - u_n(t)$:

$$\begin{cases} u''(t) - u''_n(t) + A(t)\,(u(t) - u_n(t)) + B(t,\, g(t) + u'(t)) \\ \qquad - B\,(t,\, g^n(t) + u'_n(t)) = f(t) - f^n(t) \\ u(o) - u_n(o) = u_o - u_o^n \\ u'(o) - u'_n(o) = u_1 - u_1^n \end{cases}$$

Appliquons le théorème 2.3 à $u(t) - u_n(t)$:

$$(3.9)\quad \left\{\begin{aligned} & |u'(t) - u'_n(t)|^2 + \langle A(t)\,(u(t) - u_n(t)),\, u(t) - u_n(t)\rangle - \\ & \qquad - |u_1 - u_1^n|^2 - \langle A(o)\,(u_o - u_o^n),\, u_o - u_o^n\rangle + \\ & \qquad + 2\int_o^t \langle B(g+u') - B(g^n+u'_n),\, u' - u'_n\rangle\, ds \\ & = \int_o^t \langle A'(s)\,(u(s) - u_n(s)),\, u(s) - u_n(s)\rangle\, ds \\ & \qquad + 2\int_o^t (f_1(s) - f_1^n(s),\, u'(s) - u'_n(s))\, ds \\ & \qquad + 2\int_o^t \langle f_2(s) - f_2^n(s),\, u'(s) - u'_n(s)\rangle\, ds \end{aligned}\right.$$

Grâce aux hypothèses (1.1), (1.2) et (1.6), on tire de (3.9) :

$$(3.10)\quad \left\{\begin{aligned} & \sup_{t\leqslant T}\left\{ |u'(t) - u'_n(t)|^2 + \alpha\,[u(t) - u_n(t)]^2 \right\} \leqslant \\ & \leqslant |u_1 - u_1^n|^2 + \langle A(o)\,(u_o - u_o^n),\, u_o - u_o^n\rangle + 2\int_o^T |\langle B(g+u') - B(g^n+u'_n), g - g^n\rangle|\, dt \\ & \qquad + 2\int_o^T |(f_1 - f_1^n,\, u' - u'_n)|\, dt + 2\int_o^T |\langle f_2 - f_2^n,\, u' - u'_n\rangle|\, dt \end{aligned}\right.$$

Il résulte de l'hypothèse faite sur la suite $(u_o^n, u_1^n, g^n, f_1^n, f_2^n)$, du lemme 3.1 et de (2.4), que tous les termes du second membre de l'inégalité (3.10) tendent vers zéro quand n tend vers l'infini, donc :

(3.11) - $$\sup_{t \leq T} \left\{ |u'(t) - u'_n(t)|^2 + \alpha \left[u(t) - u_n(t) \right]^2 \right\} \to o \quad \text{quand } n \to \infty.$$

On déduit de (3.11) :

(3.12) $$u'_n \to u' \qquad \text{dans } C(0,T;H)$$

De (3.12) et de la convergence de u_o^n, il résulte que :

(3.13) $$u_n \to u \qquad \text{dans } C(0,T;H)$$

Il résulte de (3.11) et (3.13) :

(3.14) $$u_n \to u \qquad \text{dans } C(0,T;V)$$

De plus, on déduit de (3.12) et du lemme 3.1 :

(3.15) $$u'_n \to u' \qquad \text{dans } L^p(0,T;W) \text{ faible.}$$

(3.14), (3.12) et (3.15) démontrent le théorème.

Corollaire 1 :

L'application définie par l'équation (2.2) qui à :

$$(u_o,\ u_1,\ g,\ f_1,\ f_2)$$

associe :

$$(u,u')$$

est mesurable de :

$$V \times H \times L^p(0,T;W) \times L^1(0,T;H) \times L^{p'}(0,T;W')$$

à valeurs dans :

$$C(0,T;V) \times \left[C(0,T;H) \cap L^p(0,T;W) \right]$$

- Démonstration :

L'espace $L^p(0,T;W)$ étant séparable, le corollaire découle immédiatement du théorème 3.1 et du théorème de PETTIS (Théorème 1.1 de la Ière partie).

■

On en déduit aisément le :

Corollaire 2 Aux données :

$$u_o \in L^o(\Omega;V)$$

$$u_1 \in L^o(\Omega,H)$$

$$g \in L^o(\Omega;L^p(0,T;W))$$

$$f_1 \in L^o(\Omega;L^1(0,T;H))$$

$$f_2 \in L^o(\Omega;L^{p'}(0,T;W'))$$

l'équation (2.2) associe une solution unique :

$$u \in L^o(\Omega;C(0,T;V)) \quad \text{telle que :}$$

$$u' \in L^o(\Omega;L^p(0,T;W) \cap C(0,T;H))$$

■

Corollaire 3 :

Supposons, outre les hypothèses du corollaire 2, que :

$$u_o \in L^o(\Omega,\mathcal{T}_o,P;V)$$

$$u_1 \in L^o(\Omega,\mathcal{T}_o,P;H)$$

g, f_1 et f_2 sont non anticipatifs.

Alors $u'(t)$ est bien mesurable à valeurs dans H, et $u(t)$ est bien mesurable à valeurs dans V.

<u>Démonstration</u> :

Les restrictions à $[0,t]$ de g, f_1 et f_2 sont des éléments de :

$L^o(\Omega,\mathcal{F}_t,P;L^p(0,t;W))$,

$L^o(\Omega,\mathcal{F}_t,P;L^1(0,t;H))$,

et $L^o(\Omega,\mathcal{F}_t,P;L^{p'}(0,t;W'))$

respectivement.

En appliquant l'analogue du corollaire 1 où l'on remplace T par t, on en déduit alors que les restrictions à $[0,t]$ de u et u' vérifient :

$u \in L^o(\Omega,\mathcal{F}_t,P;C(0,t;V))$

$u' \in L^o(\Omega,\mathcal{F}_t,P;C(0,t;H))$

Donc, u(t) et u'(t) sont des processus adaptés et continus, à valeurs dans V et H respectivement. ▪

CHAPITRE 2

CALCUL DIFFERENTIEL STOCHASTIQUE ET EGALITE DE L'ENERGIE POUR LES EQUATIONS DU SECOND ORDRE EN t

§0. INTRODUCTION

Notre démonstration de l'existence utilisera, comme dans le cas parabolique, l'hypothèse de monotonie de façon cruciale, afin de surmonter la difficulté liée à la non-linéarité des opérateurs B et C.

Or l'utilisation de la monotonie va nécessiter une Egalité de l'Energie pour les équations du second ordre en t.

C'est celle-ci que nous allons maintenant établir.

On pourrait songer à procéder comme dans le cas déterministe (cf. LIONS-STRAUSS [1] et STRAUSS [1]), c'est-à-dire utiliser le résultat de la Ière partie et "régulariser" u' par convolution. Mais, dans le cas stochastique, il est nécessaire que la régularisée de u' soit "adaptée". Ceci introduit une complication qui rend les calculs inextricables.

C'est pourquoi nous avons abandonné cette méthode, et nous avons préféré refaire un raisonnement analogue à celui fait pour le cas parabolique, dans la Ière partie.

Remarquons que, comme dans le cas parabolique, nous allons au passage, démontrer un premier théorème d'existence d'une solution pour l'équation qui nous intéresse, avec C = 0.

§1. CAS D'UNE MARTINGALE A VALEURS DANS X

Soit u(t) un processus qui est tel que :

(1.1) $\quad u \in L^{o}(\Omega;L^{\infty}(0,T;V))$

(1.2) $\quad u' = \dfrac{du}{dt} \in L^{o}\ (\Omega;L^{\infty}(0,T;H)) \cap L^{o}(\Omega;L^{p}(0,T;W))$,

<u>non anticipatif</u> tel que

(1.3) $\quad u(o) = u_{o} \in L^{o}(\Omega,\mathcal{F}_{o},P;V)$

$$(1.4) \quad u'(t) + \int_0^t A(s)\, u(s)\, ds = u_1 + \int_0^t f(s)\, ds + M(t)$$

où

$$(1.5) \quad u_1 \in L^o(\Omega, \mathcal{F}_o, P; H)$$

$$(1.6) \quad f \in L^o(\Omega; L^1(0,T;H)) + L^o(\Omega; L^{p'}(0,T;W')),$$

non anticipatif.

$$(1.7) \quad M \in \mathcal{M}^2_{loc}\ (0,T;H)$$

et où la famille d'opérateurs $A(t)$ vérifie les hypothèses (1.1) et (1.2) du chapitre 1.

Remarque 1.1

(1.4) n'est pas une équation dont on chercherait la solution, mais une relation qui, avec (1.5), (1.6) et (1.7), caractérise les processus $u'(t)$ pour lesquels nous voulons établir une règle de calcul différentiel stochastique, qui nous sera nécessaire au chapitre suivant. ▒

Théorème 1.1

Supposons, outre les hypothèses (1.1) ... (1.7) *que :*

(1.8) $M \in C(0,T;X)$ p.s.

Alors :

(1.9) $u \in C(0,T;V)$ p.s.

(1.10) $u' \in C(0,T;H)$ p.s., c'est un processus bien-mesurable à valeurs dans H.

Et on a l'égalité :

$$(1.11)\begin{cases} |u'(t)|^2 - |u_1|^2 + \langle A(t)\, u(t),\, u(t)\rangle - \langle A(o)\, u_o, u_o\rangle \\ = \int_o^t \langle A'(s)\, u(s),\, u(s)\rangle\, ds + 2\int_o^t \langle f(s),\, u'(s)\rangle\, ds + 2\int_o^t (u'(s), dM(s)) + \end{cases}$$

$$+ T_r \langle\langle M \rangle\rangle_t\,, \qquad \forall t \in [0,T],\ \text{p.s.}$$

<u>Démonstration</u> :

Posons $\tilde{M}(t) = \int_o^t M(s)\, ds$, et : $v(t) = u(t) - \tilde{M}\, t)$

$v'(t) = u'(t) - M(t)$

Alors, on tire de (1.4) :

$$d\, v'(t) + A(t)\, v(t)\, dt = \left[f(t) - A(t)\, \tilde{M}(t)\right] dt$$

Or :

$v \in L^\infty(0,T;V)$ p.s.
$v' \in L^p(0,T;W) \cap L^\infty(0,T;H)$ p.s.
$f - A\tilde{M} \in L^1(0,T;H) + L^{p'}(0,T;W')$ p.s.

On peut donc appliquer le théorème 2.3 du chapitre 1, d'où :

$$\begin{cases} u \in C(0,T;V) \\ u' \in C(0,T;H),\ \text{bien mesurable.} \end{cases}$$

$$(1.12)\begin{cases} |v'(t)|^2 - |u_1|^2 + \langle A(t)\, v(t),\, v(t)\rangle - \langle A(o)\, u_o, u_o\rangle \\ = \int_o^t \langle A'(\sigma)\, v(\sigma),\, v(\sigma)\rangle\, d\sigma + 2\int_o^t \langle f(\sigma) - A(\sigma)\, \tilde{M}(\sigma),\, v'(\sigma)\rangle\, d\sigma \end{cases}$$

Développons l'égalité (1.12) :

$$
(1.13)\quad \left\{\begin{aligned}
&|u'(t)|^2 - |u_1|^2 + \langle A(t)\, u(t), u(t)\rangle - \langle A(o)\, u_o, u_o\rangle + \\
&\qquad + |M(t)|^2 + \langle A(t)\, \tilde{M}(t), \tilde{M}(t)\rangle - 2\,(u'(t), M(t)) - 2\,\langle A(t)\, u(t), M(t)\rangle \\
&= \int_o^t \langle A'(s)\, u(s), u(s)\rangle\, ds - 2\int_o^t \langle A'(s)\, u(s), \tilde{M}(s)\rangle\, ds + \\
&\qquad + \int_o^t \langle A'(s)\, \tilde{M}(s), \tilde{M}(s)\rangle\, ds + 2\int_o^t \langle f(s), u'(s)\rangle\, ds \\
&\qquad - 2\int_o^t \langle f(s), M(s)\rangle\, ds - 2\int_o^t (A(s)\, \tilde{M}(s), u'(s))\, ds \\
&\qquad + 2\int_o^t \langle A(s)\, \tilde{M}(s), M(s)\rangle\, ds.
\end{aligned}\right.
$$

Grâce à l'hypothèse (1.8), $A(.)\, M(.)$ et $A(.)\, \tilde{M}(.) \in C(0,T;H)$ p.s., donc tous les termes de (1.13) ont un sens.

Remarquons que :

$$
(1.14)\quad \langle A(t)\, \tilde{M}(t), \tilde{M}(t)\rangle = \int_o^t \langle A'(s)\, \tilde{M}(s), \tilde{M}(s)\rangle\, ds + 2\int_o^t \langle A(s)\, \tilde{M}(s), M(s)\rangle\, ds
$$

$$
(1.15)\quad \left\{\begin{aligned}
\langle A(t)\, \tilde{M}(t), u(t)\rangle &= \int_o^t \langle A'(s)\, \tilde{M}(s), u(s)\rangle\, ds + \int_o^t \langle A(s)\, M(s), u(s)\rangle\, ds \\
&\qquad + \int_o^t \langle A(s)\, \tilde{M}(s), u'(s)\rangle\, ds
\end{aligned}\right.
$$

D'autre part, $v'(t)$ est un processus bien-mesurable à valeurs dans H, qui vérifie :

$v' \in C(0,T;H)$ p.s.

$v'' \in L^{p'}(0,T;W') + L^2(0,T;V') + L^1(0,T;H)$ p.s.

et $M \in C(0,T;V\cap W)$ p.s.

On peut donc montrer, exactement comme au lemme 1.3 du chapitre 2, IIème partie :

$$(v'(t), M(t)) = \int_o^t \langle M(s), v''(s)\rangle\, ds + \int_o^t (v'(s), dM(s))$$

De plus,

$$|M(t)|^2 = 2\int_o^t (M(s), d\, M(s)) + Tr\langle\langle M\rangle\rangle_t$$

Donc :

$$(1.16)\quad \begin{cases} 2(u'(t), M(t)) - |M(t)|^2 + 2\int_o^t \langle A(s)\, u(s) - f(s), M(s)\rangle\, ds \\ \qquad = 2\int_o^t (u'(s), d\, M(s)) + Tr\langle\langle M\rangle\rangle_t \end{cases}$$

Et on obtient (1.11) en regroupant (1.13), (1.14), (1.15) et (1.16). ▩

§2. ETUDE D'UNE EQUATION D'EVOLUTION STOCHASTIQUE

Nous allons maintenant étudier une équation hyperbolique stochastique, pour pouvoir, au paragraphe suivant, passer à la limite sur les résultats du §1.

Etudions l'équation :

$$(2.1)\quad \begin{cases} d\, u'(t) + A(t)\, u(t)\, dt + B(t,u'(t))\, dt = f(t)\, dt + d\, M(t) \\ u(o) = u_o \\ u'(o) = u_1 \end{cases}$$

où les familles d'opérateurs $A(t)$ et $B(t,.)$ vérifient les hypothèses (1.1) ... (1.7) du chapitre 1,

(2.2) $u_o \in L^2(\Omega,\mathfrak{F}_o,P;V)$

(2.3) $u_1 \in L^2(\Omega,\mathfrak{F}_o,P;H)$

$$f = f_1 + f_2 \qquad \text{avec :}$$

(2.4) $\quad f_1 \in L^2(\Omega;L^1(0,T;H))$ non anticipatif,

(2.5) $\quad f_2 \in L^{p'}(\Omega\mathrm{x}]0,T[;V')$ non anticipatif,

(2.6) $\quad M \in \mathcal{M}^2\,(0,T;H)$

Etablissons d'abord le :

<u>Lemme 2.1</u>

Supposons, outre les hypothèses ci-dessus, que l'hypothèse (1.8) *est vérifiée.*

Alors l'équation (2.1) *a une solution unique :*

$u \in L^2(\Omega;C(0,T;V))$ *telle que :*

$u' \in L^p(\Omega\mathrm{x}]0,T[;W) \cap L^2(\Omega;C(0,T;H))$

où $u'(t)$ *est un processus bien mesurable à valeurs dans* H.

<u>Démonstration</u> :

On pose comme au théorème 1.1 :

$$v = u - \tilde{M}$$
$$v' = u' - M$$

Alors l'équation (2.1) s'écrit :

$$(2.7)\quad \begin{cases} v''(t) + A(t)\,v(t) + B_M(t,v'(t)) = f(t) - A(t)\,\tilde{M}(t) \\ v(o) = u_o \\ v'(o) = u_1 \end{cases}$$

Les corollaires 2 et 3 du théorème 3.1 du chapitre 1 nous permettent d'affirmer que (2.7) a une solution unique v telle que :

$v \in C(0,T;V)$ p.s.

$v' \in L^p(0,T;W) \cap C(0,T;H)$ p.s., processus bien mesurable à valeurs dans H.

L'équation (2.1) a donc une solution unique u telle que :

$u \in C(0,T;V)$ p.s.

$u' \in L^p(0,T;W) \cap C(0,T;H)$ p.s., et u' est bien mesurable à valeurs dans H.

De plus, [cf. lemme 2.2 du chapitre 2, IIème partie] B(u) est non anticipatif. On peut donc appliquer le théorème 1.1 à u, d'où :

$$(2.8)\quad \begin{cases} |u'(t)|^2 - |u_1|^2 + \langle A(t)\, u(t), u(t)\rangle - \langle A(o)\, u_o, u_o\rangle + \\ + \; 2\displaystyle\int_o^t \langle B(s,u'(s)), u'(s)\rangle\, ds = \int_o^t \langle A'(s)\, u(s), u(s)\rangle\, ds + \\ + \; 2\displaystyle\int_o^t \langle f(s), u'(s)\rangle\, ds + 2\int_o^t (u'(s), d\, M(s)) + \mathrm{Tr} \langle\langle M\rangle\rangle_t \end{cases}$$

Grâce aux hypothèses faites sur A et B,

$$(2.9)\quad \begin{cases} \displaystyle\sup_{s\leqslant t} \left[|u'(s)|^2 + \alpha||u(s)||_V^2\right] + \gamma\int_o^t ||u'(s)||_W^p\, ds \leqslant \\ \leqslant |u_1|^2 + \langle A(o)\, u_o, u_o\rangle + 2\,\alpha|u_o|^2 + 2\,\alpha\displaystyle\int_o^t |u'(s)|^2\, ds + \\ + \; \dfrac{1}{2}\displaystyle\sup_{s\leqslant t} |u'(s)|^2 + \dfrac{1}{2}\left(\int_o^t |f_1(s)|\, ds\right)^2 + \\ + \; \dfrac{\gamma}{2}\displaystyle\int_o^t ||u'(s)||_W^p\, ds + \delta\int_o^t ||f_2(s)||_{W'}^{p'}\, ds + \\ + \; 2\displaystyle\sup_{s\leqslant t}\left(\left|\int_o^s (u'(\sigma), d\, M(\sigma))\right|\right) + \mathrm{Tr}\langle\langle M\rangle\rangle_t \end{cases}$$

Mais :

$$2\,E\left\{\sup_{s\leq t}\left|\int_o^s (u'(\sigma),\ d\,M(\sigma))\right|\right\} \leq \frac{1}{4}\ E\ \sup_{s\leq t}|u'(s)|^2 + 36\ E\{Tr<<M>>_t\}$$

On tire donc de (2.9) :

$$(2.10)\left\{\begin{array}{l} E\left\{\sup\limits_{s\leq t}\left[|u'(s)|^2 + \alpha\,||u(s)||_V^2\right]\right\} + \frac{\gamma}{2}\ E\int_o^t ||u'(s)||_W^p\ ds \leq \\ \leq C + \frac{3}{4}\ E\left\{\sup\limits_{s\leq t}|u'(s)|^2\right\} + 2\,\alpha\ E\int_o^t |u'(s)|^2\ ds \end{array}\right.$$

où C est l'espérance mathématique de :

$$|u_1|^2 + <A(o)\,u_o,\ u_o> + 2\,\alpha\,|u_o|^2 + \frac{1}{2}\left(\int_o^t |f_1(s)|\ ds\right)^2 +$$

$$+\ \delta\int_o^t ||f_2(s)||_{W'}^{p'}\ ds + 37\ Tr<<M>>_t$$

On déduit aisément de (2.10) que :

$u\ \in\ L^2(\Omega;C(0,T;V))$

$u'\ \in\ L^p(\Omega x]0,T[;W)\ \cap\ L^2(\Omega;C(0,T;H))$

Théorème 2.1 :

Etant données deux familles d'opérateurs A(t) *et* B(t,.) *qui vérifient les hypothèses* (1.1) ... (1.7) *du Chapitre* 1, *sous les hypothèses* (2.2), (2.3), (2.4), (2.5) *et* (2.6), *l'équation* (2.1) *a une solution unique :*

$u \in L^o(\Omega;L^\infty(0,T;V))$ à dérivée :

$u' \in L^o(\Omega;L^p(]0,T[;W))\ \cap\ L^o(\Omega;L^\infty(0,T;H))$

Cette solution vérifie en outre :

$u \in L^2(\Omega; C(0,T;V))$

$u' \in L^p(\Omega\times]0,T[;W) \cap L^2(\Omega;C(0,T;H))$, $u'(t)$ est un processus bien mesurable à valeurs dans H,

$$(2.11)\quad \left\{\begin{aligned} & |u'(t)|^2 - |u_1|^2 + \langle A(t)\, u(t), u(t)\rangle - \langle A(o)\, u_o, u_o\rangle + \\ & + \quad 2\int_o^t \langle B(s, u((s)), u'(s)\rangle\, ds = \int_o^t \langle A'(s)\, u(s), u\,(s)\rangle\, ds \\ & + 2\int_o^t \langle f(s), u'(s)\rangle\, ds + 2\int_o^t (u'(s), d\,M(s)) + \mathrm{Tr} \langle\langle M\rangle\rangle_t \end{aligned}\right.$$

$$\forall\, t \in [0,T], \text{ p.s.}$$

<u>Démonstration</u> :

a) <u>Unicité</u> : Soient u et v deux éléments de $L^o(\Omega;L^\infty(0,T;V))$, à dérivées u' et v' dans $L^o(\Omega;L^p(]0,T[;W)) \cap L^o(\Omega;L^\infty(0,T;H))$, solutions de l'équation (2.1). Alors :

$$(2.12)\quad \left\{\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(u'(t) - v'(t)) + A(t)[u(t) - v(t)] + B(t,u'(t) - B(t,v'(t)) = 0 \\ & u(o) - v(o) = 0 \\ & u'(o) - v'(o) = 0 \end{aligned}\right.$$

Or :

$$B(u') - B(v') \in L^o(\Omega;L^{p'}(]0,T[;W'))$$

On peut donc appliquer le théorème 2.3 du chapitre 1 à chaque trajectoire du processus $u(t) - v(t)$, d'où :

$$|u'(t) - v'(t)|^2 + \langle A(t)\,[u(t) - v(t)], u(t) - v(t)\rangle$$

$$+ \quad 2\int_o^t \langle B(s,u(s)) - B(s,v(s)), u(s) - v(s)\rangle\, ds \leqslant 0$$

D'où, grâce à (1.1) et (1.6) du chapitre 1 :

$$|u'(t) - v'(t)|^2 = 0, \qquad \forall t \in [0,T].$$

Et comme :

$$u(o) = v(o)$$
$$u(t) = v(t), \qquad \forall\, t \in [0,T]\ , \text{ p.s.}$$

b) <u>Existence</u> : Soit M^n une suite de martingales telle que :

(2.13) $M^n \in \mathcal{M}^2(0,T;H) \cap L^o(\Omega;C(0,T;X))$

(2.14) $M^n \to M$ dans $\mathcal{M}^2(0,T;H)$

Une telle suite existe, puisque X est dense dans H.

D'après le lemme 2.1, l'équation :

$$(2.15) \qquad \begin{cases} du'_n(t) + A(t)\, u_n(t)\, dt + B(t,u'_n(t))\, dt = f(t)\, dt + d\, M^n(t) \\ u_n(o) = u_o \\ u'_n(o) = u_1 \end{cases}$$

a une solution unique :

$u_n \in L^2(\Omega;C(0,T;V))$

$u'_n \in L^p(\Omega\mathrm{x}]0,T[;W) \cap L^2(\Omega;C(0,T;H))$

où $u'_n(t)$ est bien mesurable à valeurs dans H, à laquelle on peut appliquer le théorème 1.1 :

$$(2.16) \qquad \begin{cases} |u'_n(t)|^2 - |u_1|^2 + \langle A(t)\, u_n(t), u_n(t)\rangle - \langle A(o)\, u_o, u_o\rangle \\ + \ 2 \displaystyle\int_o^t \langle B(s,u'_n(s)), u'_n(s)\rangle\, ds = \int_o^t \langle A'(s)\, u_n(s), u_n(s)\rangle\, ds \\ + \ 2 \displaystyle\int_o^t \langle f(s), u'_n(s)\rangle\, ds + 2\int_o^t (u'_n(s), d\, M^n(s)) + \mathrm{Tr} \langle\langle M^n \rangle\rangle_t \end{cases}$$

De (2.16), on tire, comme dans la démonstration du lemme 2.1 :

$$(2.17)\quad \begin{cases} E\left\{\sup\limits_{s\leqslant t} |u'_n(s)|^2 + \alpha\, ||u_n(s)||_V^2\right\} + \frac{\gamma}{2}\, E\int_0^t ||u'_n(s)||_W^p\, ds \\ \leqslant C' + \frac{3}{4}\, E\left\{\sup\limits_{s\leqslant t} |u'_n(s)|^2\right\} + 2\alpha\; E\int_0^t |u'_n(s)|^2\, ds \\ \quad + 37\; E\; |M^n(t)|^2 \end{cases}$$

De (2.17), on déduit aisément que u_n reste dans un borné de $L^2(\Omega;L^\infty(0,T;V))$ et u'_n reste dans un borné de $L^p(\Omega\times]0,T[;W) \cap L^2(\Omega;L^\infty(0,T;H))$

Donc, aussi, grâce à l'hypothèse (1.5) du chapitre 1 :

$B(u'_n)$ reste dans un borné de $L^{p'}(\Omega\times]0,T[;W')$

On peut donc extraire une sous-suite u_μ de la suite u_n telle que :

(2.18) $u_\mu \rightharpoonup u$ dans $L^2(\Omega;L^\infty(0,T;V))$ $*$ faible

(2.19) $u'_\mu \rightharpoonup u'$ dans $L^p(\Omega\times]0,T[;W)$ faible et dans $L^2(\Omega;L^\infty(0,T;H))$ $*$ faible

(2.20) $B(u'_\mu) \rightharpoonup \chi$ dans $L^{p'}(\Omega\times]0,T[;W')$ faible

Montrons le :

<u>Lemme 2.2</u>

$u_\mu \to u$ *dans* $L^2(\Omega;C(0,T;V))$

$u'_\mu \to u'$ *dans* $L^2(\Omega;C(0,T;H))$

<u>Démonstration</u> :

Il suffit de montrer que u_μ forme une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega;C(0,T;V))$ et u'_μ une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega;C(0,T;H))$.

$$\begin{cases} d\left[u'_\mu(t) - u'_\nu(t)\right] + A(t)\left[u_\mu(t) - u_\nu(t)\right]dt + \left[B(t,u'_\mu(t) - B(t,u'_\nu(t))\right] dt \\ \qquad = d\left[M^\mu(t) - M^\nu(t)\right] \\ u_\mu(o) - u_\nu(o) = 0 \end{cases}$$

On peut appliquer le théorème 1.1. à $u_\mu(t) - u_\nu(t)$, d'où :

$$(2.21) \quad \begin{cases} |u'_\mu(t) - u'_\nu(t)|^2 + \langle A(t)\left[u_\mu(t) - u_\nu(t)\right], u_\mu(t) - u_\nu(t)\rangle \\ \qquad + 2\int_o^t \langle B(u'_\mu) - B(u'_\nu), u'_\mu - u'_\nu\rangle ds \leqslant 2\int_o^t (u'_\mu - u'_\mu, d(M^\mu - M^\nu)) \\ \qquad + \operatorname{Tr} \langle\langle M^\mu - M^\nu\rangle\rangle_t \end{cases}$$

Mais :

$$(2.22) \quad \begin{cases} 2\,E\left\{\sup_{t\leqslant T}\left|\int_o^t \langle u'_\mu - u'_\nu, d(M^\mu - M^\nu)\rangle\right|\right\} < \frac{1}{2}\,E\left\{(\sup_{t\leqslant T} |u_\mu(t) - u_\nu(t)|^2\right\} + \\ \qquad + 18\,E\,|M^\mu(T) - M^\nu(T)|^2 \end{cases}$$

On tire de (2.21) et (2.22) :

$$(2.23) \quad E\left\{\sup_{t\leqslant T} |u'_\mu(t) - u'_\nu(t)|^2\right\} \leqslant 38\,E\,|M^\mu(T) - M^\nu(T)|^2$$

$$(2.24) \quad E\left\{\sup_{t\leqslant T} \langle A(t)\left[u_\mu(t) - u_\nu(t)\right], u_\mu(t) - u_\nu(t)\rangle\right\} \leqslant 19\,E\,|M_\mu(T) - M_\nu(T)|^2$$

Mais :

$$E\left\{\sup_{t\leqslant T} |u_\mu(t) - u_\nu(t)|^2\right\} \leqslant E\int_o^T |u'_\mu(t) - u'_\nu(t)|^2\,dt$$

(2.25) $$E\left\{\sup_{t\leqslant T} |u_\mu(t) - u_\nu(t)|^2\right\} \to 0 \quad \text{quand } \mu,\nu \to \infty$$

Il résulte de (2.24) et (2.25), grâce à l'hypothèse (1.1) du chapitre 1 :

(2.26) $$E\left\{\sup_{t\leqslant T} ||u_\mu(t) - u_\nu(t)||_V\right\} \to 0 \quad \text{quand } \mu,\nu \to \infty$$

Le lemme résulte de (2.23) et (2.26).

Montrons-le :

<u>Lemme 2.3</u> : $\chi = B(u')$

<u>Démonstration</u> : Grâce à l'hypothèse de monotonie (1.6) du chapitre 1, il nous suffit, pour pouvoir appliquer la méthode du lemme 2.5. du chapitre 2, IIème partie, de montrer le :

<u>Lemme 2.4</u> : $\forall\, t \in [0,T]$,

$$\int_0^t \langle B(u'_\mu), u'_\mu\rangle \, ds \to \int_0^t \langle \chi, u'\rangle \, ds \quad \textit{dans } L^1(\Omega) \textit{ faible.}$$

<u>Démonstration</u> :

On tire de l'inégalité (2.21) :

$$E\left|\int_0^t \langle B(u'_\mu) - B(u'_\nu), u'_\mu - u'_\nu\rangle \, ds\right| \to 0 \quad \text{quand } \mu,\nu \to \infty$$

Soit, grâce à la monotonie de B :

(2.27) $$\int_0^t \langle B(u'_\mu) - B(u'_\nu), u'_\mu - u'_\nu\rangle \, ds \to 0 \quad \text{dans } L^1(\Omega).$$

En utilisant (2.27), (2.19) et (2.20), on démontre le lemme 2.4 par un raisonnement identique à celui du lemme 2.6 du chapitre 2 de la IIème partie.

Fin de la démonstration du théorème 2.1

On peut passer à la limite faible dans l'équation approchée (2.15), d'où :

(2.28) $$\begin{cases} d\, u'(t) + A(t)\, u(t) + B(t,u(t))\, dt = f(t)\, dt + d\, M(t) \\ u(o) = u_o \\ u'(o) = u_1 \end{cases}$$

u est donc solution de l'équation (2.1), et u a la régularité souhaitée, grâce à (2.19) et au lemme 2.2.

[u' est bien-mesurable comme limite dans $L^2(\Omega;C(0,T;H))$ de processus bien-mesurables].

Il nous reste à passer à la limite sur l'égalité (2.16), pour montrer l'égalité (2.11).

Grâce au lemme 2.2,

$$|u'_\mu(t)|^2 \to |u'(t)|^2 \qquad \text{dans } L^1(\Omega)$$

$$<A(t)\, u_\mu(t)\, u_\mu(t)> \to <A(t)\, u(t),\, u(t)> \qquad \text{dans } L^1(\Omega)$$

et :

$$\int_o^t <A'(s)\, u_\mu(s),\, u_\mu(s)>\, ds \to \int_o^t <A'(s)\, u(s),\, u(s)>\, ds \qquad \text{dans } L^1(\Omega)$$

Grâce au lemme 2.4,

$$\int_o^t <B(u'_\mu),\, u'_\mu>\, ds \to \int_o^t <B(u'),\, u'>\, ds \qquad \text{dans } L^1(\Omega) \text{ faible}$$

D'après (2.19),

$$\int_o^t \langle f(s),\, u'_\mu(s)\rangle\, ds \to \int_o^t \langle f(s),\, u'(s)\rangle\, ds \quad \text{dans } L^1(\Omega) \text{ faible}$$

Grâce à (2.13) et au lemme 2.2, on peut appliquer le théorème 3.3 de la Ière partie, d'où :

$$\int_o^t (u'_\mu(s),\, d\, M^\mu(s)) \to \int_o^t (u'(s),\, d\, M(s)) \qquad \text{dans } L^1(\Omega)$$

Enfin, d'après (2.13),

$$\mathrm{Tr} \ll M^n \gg_t \to \mathrm{Tr} \ll M \gg_t \qquad \text{dans } L^1(\Omega)$$

Nous allons maintenant établir un résultat d'existence sous des hypothèses un peu plus faibles.

(2.29) $\quad u_o \in L^o(\Omega, \mathcal{F}_o, P; V)$

(2.30) $\quad u_1 \in L^o(\Omega, \mathcal{F}_o, P; H)$

$f = f_1 + f_2$, avec :

(2.31) $\quad f_1 \in L^o(\Omega; L^1(0,T;H))$ non anticipatif

(2.32) $\quad f_2 \in L^o(\Omega; L^{p'}(0,T;W'))$ non anticipatif

(2.33) $\quad M \in \mathcal{M}^2_{loc}(0,T;H)$

Théorème 2.2 :

Les familles d'opérateurs $A(t)$ *et* $B(t,.)$ *vérifiant les mêmes hypothèses qu'au Théorème* 2.1, *si les données* u_o, u_1, f *et* M *vérifient* (2.29), (2.30), (2.31), (2.32) *et* (2.33), *alors l'équation* (2.1) *a une solution unique :*

$u \in L^o(\Omega;L^\infty(0,T;V))$, *à dérivée :*

$u' \in L^o(\Omega;L^p(0,T;W)) \cap L^o(\Omega;L^\infty(0,T;H))$

Cette solution vérifie

$u \in L^o(\Omega;C(0,T;V))$

$u' \in L^o(\Omega;C(0,T;H))$, *processus bien mesurable à valeurs dans* H,

et en outre :

$$(2.34)\quad \left\{ \begin{aligned} & |u'(t)|^2 - |u_1|^2 + \langle A(t)\, u(t), u(t)\rangle - \langle A(o)\, u_o, u_o\rangle + \\ & + 2\int_o^t \langle B(s,u'(s)), u'(s)\rangle\, ds = \int_o^t \langle A'(s)\, u(s), u(s)\rangle\, ds + \\ & + 2\int_o^t \langle f(s), u'(s)\rangle\, ds + 2\int_o^t (u'(s), d\,M(s)) + Tr \langle\langle M\rangle\rangle_t \end{aligned} \right.$$

$$\forall t \in [0,T], \text{ p.s.}$$

Démonstration :

L'unicité se démontre exactement comme au théorème 2.1. Montrons l'existence :

Soient :

$$\Omega_n = \{\omega; ||u_o|| \leqslant n,\ |u_1| \leqslant n\}$$

$$T_n = \inf \left\{ t \leqslant T; |M(t)| > n,\ \int_o^t |f_1(s)|\, ds > n, \text{ ou } \int_o^t ||f_2(s)||_W^{p'}\, ds > n \right\}$$

Posons :

$$u_o^n = 1_{\Omega_n} u_o$$

$$u_1^n = 1_{\Omega_n} u_1$$

$$f^n(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in [0,T_n] \\ 0 & \text{si } t > T_n \end{cases}$$

$$M^n(t) = M(t \wedge T_n)$$

On peut alors appliquer le théorème 2.1 à l'équation :

$$\text{(2.35)} \quad \begin{cases} d\, u'_n(t) + A(t)\, u_n(t)\, dt + B(t,u'_n(t))\, dt = f^n(t)\, dt + d\, M^n(t) \\ u_n(o) = u_o^n \\ u'_n(o) = u_1^n \end{cases}$$

qui a une solution unique :

$u_n \in L^2(\Omega;C(0,T;V))$

$u'_n \in L^p(\Omega x]0,T[;W) \cap L^2(\Omega;C(0,T;H))$.

Remarquons que :

$$\begin{cases} u_{n+1}(t,\omega) = u_n(t,\omega) \\ u'_{n+1}(t,\omega) = u'_n(t,\omega) \end{cases} \quad \forall (t,\omega) \text{ tels que :}$$

$$\omega \in \Omega_n \text{ et } \quad t \in [0,T_n(\omega)]$$

On peut donc définir $u(t,\omega)$ par :

$$\text{(2.36)} \qquad u(t,\omega) = u_n(t,\omega) \quad \text{si } \omega \in \Omega_n, \quad t \in [0,T_n(\omega)]$$

et alors :

$$\text{(2.37)} \qquad u'(t,\omega) = u'_n(t,\omega) \quad \text{si } \omega \in \Omega_n, \quad t \in [0,T_n(\omega)]$$

$u(t,\omega)$ et $u'(t,\omega)$ sont alors définis pour tous les (t,ω) tels que :

$$\omega \in \bigcup_n \Omega_n, \text{ et } t \in \bigcup_n \left[0, T_n(\omega)\right].$$

Mais :

$$P(\bigcup_n \Omega_n) = 1$$

$$\bigcup_n \left[0, T_n(\omega)\right] = \left[0, T\right] \quad \text{p.s.}$$

Fixons $\omega \in \bigcup_n \Omega_n$. Pour n assez grand, $\omega \in \Omega_n$ et :

$\left[0, T_n(\omega)\right] = \left[0, T\right]$, pourvu que $\omega \notin N$, N ensemble de mesure nulle de Ω,

et alors :

$$u(.,\omega) = u_n(.,\omega) \in C(0,T;V)$$

$$u'(.,\omega) = u'_n(.,\omega) \in L^p(0,T;W) \cap C(0,T;H)$$

Donc :

$$u_n \to u \qquad \text{dans } C(0,T;V) \quad \text{p.s.}$$

$$u'_n \to u' \qquad \text{dans } L^p(0,T;W) \cap C(0,T;H) \quad \text{p.s.}$$

Par un passage à la limite élémentaire sur (2.35), on vérifie que u est solution de l'équation (2.1).

La relation (2.34) s'obtient en passant à la limite sur :

$$\left\{\begin{aligned} &|u'_n(t)|^2 - |u_1^n|^2 + \langle A(t)\, u_n(t), u_n(t)\rangle - \langle A(o)\, u_o^n, u_o^n\rangle \\ &\qquad + 2\int_o^t \langle B(s,u'_n(s)), u'_n(s)\rangle\, ds = \int_o^t \langle A'(s)\, u_n(s), u_n(s)\rangle\, ds \\ &\qquad + 2\int_o^t \langle f^n(s), u'_n(s)\rangle\, ds + 2\int_o^t (u'_n(s), d\, M^n(s)) \\ &\qquad\qquad + \mathrm{Tr} \langle\langle M^n\rangle\rangle_t \qquad \forall t \in \left[0,T\right] \text{ p.s.} \end{aligned}\right.$$

Exemple 2.1 : Equation des ondes linéaires

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Posons :

$$H = W = L^2(\mathcal{O}), \quad p = 2, \quad V = H^1_o(\mathcal{O})$$

$$\langle A\, u,v\rangle = \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathcal{O}} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\ \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\,dx;\ u,v \in H^1_o(\mathcal{O})$$

$$(B(t)\ u,v) = b(t) \int_{\mathcal{O}} u(x)\ v(x)\ dx\ ;\ u\,,\ v \in L^2(\mathcal{O})$$

où $b(.) \in L^{\infty}(0,T)$

Etant donné :

$$M \in \mathcal{M}^2_{loc}(0,T;L^2(\mathcal{O}))$$

$$u_o \in L^o(\Omega,\mathcal{F}_o,P;H^1_o(\mathcal{O}))$$

$$u_1 \in L^o(\Omega,\mathcal{F}_o,P;L^2(\mathcal{O})),$$

le théorème 2.2 permet d'affirmer que l'équation :

$$(2.35)\quad \begin{cases} d\ u'(t) + A\ u(t)\ dt + B(t)\ u'(t)\ dt = d\ M(t) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad u(o) = u_o \\ \qquad\qquad\qquad\qquad u'(o) = u_1 \end{cases}$$

a une solution unique :

$u \in C(0,T;H^1_o(\mathcal{O}))$ p.s.

avec $u' \in C(0,T;L^2(\mathcal{O}))$ p.s.

L'équation (2.35) s'interprète :

$$\begin{cases} d\left[\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right] - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_i^2}\,dt + b(t)\ u(t,x)\ dt = d\ M(t,x) \\[2ex] u(t,x)\Big|_{\Sigma} = 0 \qquad u(o,x) = u_o(x) \\ \qquad\qquad\qquad\quad u'(o,x) = u_1(x) \end{cases}$$

§3. EGALITE DE L'ENERGIE STOCHASTIQUE POUR LES EQUATIONS DU SECOND ORDRE EN t.

Nous allons maintenant déduire des résultats du §2 la formule de Ito pour la fonctionnelle "énergie", qui est ici :

$$\phi(u'(t),u_o) \;=\; |u'(t)|^2_H + \langle A\, u(t),\, u(t)\rangle$$

Soit u(t) un processus qui vérifie les hypothèses (1.1), (1.2), (1.3), (1.4), (1.5), (1.6) et (1.7).

On suppose que le triplet (W,W',p) est tel qu'il existe une famille d'opérateurs B(t,.) de W dans W' vérifiant les hypothèses (1.3), (1.4), (1.6) et (1.7) du chapitre 1.

On a alors le :

Théorème 3.1 :

Sous les hypothèses ci-dessus, on a les propriétés suivantes :

(3.1) $$u \in L^o(\Omega;C(0,T;V))$$

(3.2) $$u' \in L^o(\Omega,C(0,T;H)),\ u'(t) \textit{ est bien mesurable àvaleurs dans } H.$$

(3.3) $$\left\{\begin{aligned} &|u'(t)|^2 - |u_1|^2 + \langle A(t)\,u(t),\,u(t)\rangle - \langle A(o)\,u_o,\,u_o\rangle \\ &\qquad = \int_o^t \langle A'(s)\,u(s),\,u(s)\rangle\,ds + 2\int_o^t \langle f(s),\,u'(s)\rangle\,ds \\ &\qquad\quad + 2\int_o^t (u'(s),\,d\,M(s)) + \mathrm{Tr}\,\langle\langle M\rangle\rangle_t,\quad \forall t\in[0,T],\ \text{p.s.}\end{aligned}\right.$$

Démonstration :

Posons :

$$\tilde{f}(t) \;=\; f(t) + B(t,u'(t))$$

Alors, grâce à (1.2) et (1.6) :

$$f \in L^{o}(\Omega;L^{1}(0,T;H)) + L^{o}(\Omega;L^{p'}(0,T;W'))$$

De plus, on déduit de (1.2) et du lemme 2.2 du chapitre 2, IIème partie que :

B(u) est non anticipatif,

Donc, $\tilde{f}$ est non-anticipatif et, d'après le théorème 2.2, u est l'unique solution de l'équation :

(3.4) $$\begin{cases} dv'(t) + A(t)\, v(t)\, dt + B(t,v'(t))\, dt = \tilde{f}(t) + d\,M(t) \\ v(o) = u_o \\ v'(o) = u_1 \end{cases}$$

(3.1), (3.2) et (3.3) résultent alors du théorème 2.2.

Théorème 3.2 :

Supposons, outre les hypothèses du Théorème 3.1, *que :*

(3.5) $u_o \in L^2(\Omega;V)$, $u_1 \in L^2(\Omega;H)$

(3.6) $f \in L^2(\Omega;L^1(0,T;H)) + L^{p'}(\Omega\mathrm{x}]0,T[;W')$

(3.7) $M \in \mathcal{M}^2(0,T;H)$

(3.8) $u' \in L^p(\Omega\mathrm{x}]0,T[;W)$

Alors :

(3.9) $u \in L^2(\Omega;C(0,T;V))$

(3.10) $u' \in L^2(\Omega;C(0,T;H))$

$$
(3.11)\quad \left\{
\begin{aligned}
& E\,|u'(t)|^2 - E\,|u_1|^2 + E <A(t)\,u(t), u(t)> - E <A(o)\,u_o, u_o> \\
= \; & E\int_o^t <A'(s)\,u(s), u(s)>\,ds + 2\,E\int_o^t <f(s), u'(s)>\,ds + E\,|M(t)|^2
\end{aligned}
\right.
$$

$$\forall\, t \in [0,T]$$

Démonstration :

Grâce à (3.8), $B(u') \in L^{p'}(\Omega \mathrm{x}]0,T[;W')$

Posons :

$$\tilde{f}(t) = f(t) + B(t,u'(t))$$

Alors, d'après le théorème 2.1, u est l'unique solution de l'équation :

$$
\left\{
\begin{aligned}
d\,v'(t) + A(t)\,v(t)\,dt + B(t,v'(t))\,dt &= \tilde{f}(t)\,dt + d\,M(t) \\
v(o) &= u_o \\
v'(o) &= u_1
\end{aligned}
\right.
$$

(3.9) et (3.10) résultent alors du théorème 2.1. On vérifie aisément que grâce à (3.5), (3.6), (3.7), (3.8) (3.9) et (3.10) on peut prendre l'espérance mathématique dans l'égalité (3.3), ce qui donne (3.11).

CHAPITRE 3

EQUATIONS STOCHASTIQUES DU SECOND ORDRE EN t

§0. INTRODUCTION

Nous allons maintenant étudier l'équation :

$$(0,1)\qquad \begin{cases} d\,u'(t) + A(t)\,u(t)\,dt + B(t,u'(t))\,dt + C(t,u(t),\,u'(t))\,d\,W(t) = \\ = \quad f(t)\,dt + d\,M(t) \\ u(o) = u_o,\ u'(o) = u_1 \end{cases}$$

Nous utiliserons la méthode de Galerkin, i.e. une approximation en dimension finie, pour résoudre (0.1). Nous aurons donc besoin d'un résultat en dimension finie, qui corresponde à nos besoins. Dans la IIème partie, nous avions établi, en deux étapes, par la méthode de Picard, un résultat que nous avions ensuite appliqué à la solution approchée en dimension finie. La démonstration de ce résultat utilisait à la fois la coercivité et la monotonie : c'est ce qui nous a évité toute hypothèse de type Lipschitz sur A.

Ici, pour notre résultat en dimension finie, nous nous contenterons de montrer, en utilisant uniquement la coercivité, que les hypothèses de Lipschitz habituelles peuvent être transformées en des hypothèses de "Lipschitz locales", sans qu'il n'y ait d'explosion.

Nous serons donc obligés de faire une hypothèse de type "Lipschitz locale" sur B (qui joue ici le rôle que jouait A dans la IIème partie), hypothèse qui pourrait être évitée, en améliorant le résultat en dimension finie, à l'aide de la monotonie.

Cependant, cette hypothèse semble être en général vérifiée dans les applications, c'est pourquoi nous l'avons faite, pour simplifier l'exposé.

§1. HYPOTHESES ET NOTATIONS

Outre les espaces V, W et H, et la famille d'opérateurs A(t), introduits au chapitre 1, on se donne :

Un espace de Hilbert K et un Brownien W(t) défini sur K, d'opérateurs de covariance égale à l'isomorphisme canonique $J \in \mathcal{L}(K',K)$.

On suppose que W(t) est adapté à la famille $\mathcal{F}_t$;

Un nombre $p > 1$, et deux famille d'opérateurs :

$B(t,.)$ de W dans W'

$C(t,.,.)$ de VxW dans $\mathcal{L}^2(K;H)$, définis pour presque tout $t \in]0,T[$,

et qui vérifient :

(1.1) $\forall N \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in W,\ \forall h \in H, \forall k \in K,\quad \exists L \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$|(B(t,v) - B(t,\tilde{v}), x)| \leqslant L\ ||v-\tilde{v}||_W$$

$$|(h, C(t,u,v)k - C(t,\tilde{u},\tilde{v})k)| \leqslant L||u-\tilde{u}||_V + L||v-\tilde{v}||_W,$$

$\forall\ u,\tilde{u} \in V\ v,\ \tilde{v} \in W$ tels que :

$$\text{Sup}\ (||u||_V, ||\tilde{u}||_V, ||v||_W, ||\tilde{v}||_W) \leqslant N$$

et pour presque tout $t \in]0,T[$.

(1.2) $\exists\, \beta$ t.q. : $||B(t,v)||_{W'} \leqslant \beta||v||_W^{p-1}$

$$\forall v \in W,\quad \text{p.p.}\quad t \in]0,T[$$

(1.3) $\exists\, \gamma > 0$ et λ tels que :

$$2 <B(t,v),v> + \lambda|v|_H^2 + \lambda\ ||u||_V^2 + \lambda \geqslant \gamma\ ||v||_W^p + ||C(t,u,v)||_2^2$$

$$\forall\ u \in V,\quad v \in W,\quad \text{p.p. } t \in]0,T[.$$

(1.4) $$2 <B(t,v) - B(t,\tilde{v}), v-\tilde{v}> + \lambda |v-\tilde{v}|_H^2 + \lambda <A(t)(u-\tilde{u}),u-\tilde{u}>$$

$$\geqslant ||C(t,u,v) - C(t,\tilde{u},\tilde{v})||_2^2$$

$$\forall u,\tilde{u} \in V, \quad \forall v,\tilde{v} \in W, \quad \text{p.p. } t \in]0,T[$$

(1.5) $\forall u \in V$ et $v \in W$, $t \to B(t,u)$ et $t \to C(t,u,v)$ sont des applications Lebesgue mesurables de $]0,T[$ à valeurs dans W' et $\mathcal{L}^2(K;H)$ respectivement.

Remarque 1.1 :

Dans le cas particulier où $C(t,u,v) = C_1(t,u) + C_2(t,v)$, (1.3) et (1.4) sont en particulier vérifiées si l'on a :

(1.3 bis) $$\begin{cases} \mu||u||_V^2 + \mu/_2 \geqslant ||C_1(t,u)||_2^2 \\ <B(t,v),v> + \mu|v|_H^2 + \mu/_2 \geqslant \gamma||v||_W^p + ||C_2(t,v)||_2^2 \end{cases}$$

(1.4 bis) $$\begin{cases} \mu \ <A(t)\ [u-\tilde{u}],\ u-\tilde{u}> \geqslant ||C_1(t,u) - C_1(t,\tilde{u})||_2^2 \\ <B(t,v) - B(t,\tilde{v}),\ v-\tilde{v}> + \mu|v-v|_H^2 \geqslant ||C_2(t,v) - C_2(t,\tilde{v})||_2^2 \end{cases}$$

avec $\mu = \lambda/_2$.

Remarque 1.2 :

Il résulte des hypothèses (1.2), (1.3) et (1.5) :

(i) B applique les bornés de $L^p(\Omega x]0,T[;W)$ dans les bornés de $L^{p'}(\Omega x]0,T[;W')$
Si u est un élément non anticipatif de $L^o(\Omega;L^p(0,T;W))$, alors
B(u) est un élément non anticipatif de $L^o(\Omega;L^{p'}(0,T;W'))$.

(ii) C applique les bornés de :

$$L^2(\Omega x]0,T[;V) \ x \ \{L^p(\Omega x]0,T[;W) \cap L^2(\Omega x]0,T[;H)\}$$

dans les bornés de $L^2(\Omega x]0,T[;\mathcal{L}^2(K;H))$.

Si u et v sont des éléments non anticipatifs de $L^o(\Omega;L^2(0,T;V))$ et $L^o(\Omega;L^p(0,T;W) \cap L^2(0,T;H))$ respectivement, alors $C(u,v)$ est un élément non anticipatif de $L^o(\Omega;L^2(0,T;\mathcal{L}^2(K;H)))$.

On se donne en outre ;

(1.6) $u_o \in L^o(\Omega;V)$ et $u_1 \in L^o(\Omega;H)$, $\mathcal{F}_o$ mesurables

(1.7) $M \in \mathcal{M}^2_{loc}(0,T;H)$

(1.8) $f \in L^o(\Omega;L^2(0,T;H)) + L^o(\Omega;L^{p'}(0,T;W'))$ adapté

Et on cherche à résoudre :

$$(1.9) \quad \begin{cases} d\,u'(t) + A(t)\,u(t)\,dt + B(t,u'(t))\,dt + C(t,u(t),u'(t))\,dW(t) \\ \qquad = f(t)\,dt + dM(t) \\ u(o) = u_o \\ u'(o) = u_1 \end{cases}$$

<u>Remarque</u> :

Dans le cas où C=o, on peut prendre, comme on l'a vu au chapitre 2 :

$$f \in L^o(\Omega;L^1(0,T;H)) + L^o(\Omega;L^{p'}(0,T;W'))$$

§2 - UN RESULTAT D'EXISTENCE EN DIMENSION FINIE

On se donne :

$a(.) \in C^1(0,T;\mathcal{L}(\mathbb{R}^d))$ tel que :

(2.1) $\exists \lambda$ t.q. $(a(t)x,x) + \lambda|x|^2 \geq 0 \qquad \forall t \in [0,T],\ x \in \mathbb{R}^d$

(2.2) $(a'(t)x,x) \leq 0 \qquad \forall t \in [0,T], x \in \mathbb{R}^d$

et deux familles d'opérateurs :

$(t,x) \to b(t,x)$ mesurable de $]0,T[\times \mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$

$(t,x,y) \to c(t,x,y)$ mesurable de $]0,T[\times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$
qui vérifient :

(2.3) $\forall N,\ \exists L_N$ tel que :

$$|b(t,y) - b(t,\tilde{y})| + ||c(t,x,y) - c(t,\tilde{x},\tilde{y})|| \leq L_N\,|x-\tilde{x}| + L_N\,|y-\tilde{y}|$$

$$\forall t \in]0,T[,\ \forall x,\tilde{x},y,\tilde{y} \in \mathbb{R}^d \text{ tq. } \sup(|x|,|\tilde{x}|,|y|,|\tilde{y}|) \leq N$$

(2.4) $\exists p > 1$, $\gamma > 0$ et λ tels que :

$$\lambda|x|^2 + 2(b(t,y),y) + \lambda|y|^2 + \lambda \geq \gamma|y|^p + ||c(t,x,y)||_2^2$$

$$\forall t \in]0,T[,\ x,y \in \mathbb{R}^d$$

où $||.||_2$ désigne la norme Hilbert-Schmidt dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$.

(2.5) $\exists \beta$ t.q : $|b(t,y)| \leq \beta|y|^{p-1}$

$$\forall t \in]0,T[,\ y \in \mathbb{R}^d$$

Soient alors :

(2.6) $f \in L^2(\Omega \times]0,T[;\mathbb{R}^d)$, non anticipatif

(2.7) $M \in \mathcal{M}^2(0,T;\mathbb{R}^d)$

(2.8) u_o et $u_1 \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{F}_o$ mesurables et $W(t)$ un processus de Wiener à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ d'opérateur de covariance la matrice identité, qui soit une $\mathcal{F}_t$ martingale.

On a le :

Théorème 2.1 : *Sous les hypothèses* (2.1)...(2.8), $\exists$ *un processus* $x \in L^2(\Omega;C^1(0,T;\mathbb{R}^d))$ *tel que* :
$x' \in L^p(\Omega \times]0,T[;\mathbb{R}^d)$, *solution de* :

$$
(2.9)\qquad \begin{cases} dx'(t) + a(t)x(t)dt + b(t,x'(t))dt + c(t,x(t),x'(t))\,dW(t) = \\ \qquad = f(t)\,dt + d\,M(t) \\ \qquad x(o) = x_o \\ \qquad x'(o) = x_1 \end{cases}
$$

Démonstration :

Si $x \in \mathbb{R}^d$, on posera :

$$[x]_n = \frac{n}{\mathrm{Sup}(n,|x|)}\, x$$

et $\quad b_n(t,y) = b(t,[y]_n)$

$$c_n(t,x,y) = c(t,[x]_n,[y]_n)$$

Cherchons d'abord à résoudre :

$$
(2.10)\qquad \begin{cases} dx'_n(t) + a(t)x_n(t)dt + b_n(t,x'_n(t))dt + c_n(t,x_n(t),x'_n(t))dW(t) = \\ \qquad = f(t)\,dt + d\,M(t) \\ \qquad x_n(o) = x_o \\ \qquad x'_n(o) = x_1 \end{cases}
$$

(2.10) peut encore s'écrire :

$$(2.11)\quad \begin{cases} d\begin{pmatrix} x_n(t) \\ x'_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\,x'_n(t) \\ a(t)\ x_n(t)+b_n(t,x'_n(t)) \end{pmatrix} dt\ + \\ \qquad + \begin{pmatrix} o \\ C_n(t,x_n(t),x'_n(t)) \end{pmatrix} dW(t) = \begin{pmatrix} o \\ f(t) \end{pmatrix} dt + d\begin{pmatrix} o \\ M(t) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_n(o) \\ x'_n(o) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_o \\ x_1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Ecrivons (2.11) sous la forme :

$$(2.12)\quad \begin{cases} d\ y_n(t) + \Lambda(t,y_n(t))\ dt + \Gamma(t,y_n(t))dW(t) \\ \qquad = \tilde{f}(t)dt + d\ \tilde{M}(t) \\ y_n(o) = y_o \end{cases}$$

où Λ et Γ sont lipschitziennes de $\mathbb{R}^{2d}$ dans $\mathbb{R}^{2d}$, p.p. $t \in \,]0,T[$.

On peut appliquer à (2.12) les résultats classiques de la théorie des équations différentielles stochastiques (Cf. GIKHMAN-SKOROKHOD [1]).

On montre aisément que la solution de (2.12) vérifie :

$y_n \in L^2(\Omega;C(0,T;\mathbb{R}^{2d}))$

Donc (2.10) a une solution
$x_n \in L^2(\Omega;C^1(0,T;\mathbb{R}^d))$

Appliquons le calcul différentiel stochastique à $|x'_n(t)|^2$:

$$(2.13)\quad \begin{cases} |x'_n(t)|^2 + (a(t)x_n(t),x_n(t)) + 2\int_o^t (b_n(\sigma,x'_n(\sigma)),x'_n(\sigma))\, d\sigma \\ \quad + 2\int_o^t (x'_n(\sigma),\ c_n(\sigma,x_n(\sigma),x'_n(\sigma)))\, dW(\sigma) = \\ = |x_1|^2 + (a(o)\ x_o,x_o) + \int_o^t (a'(\sigma)x_n(\sigma),\ x_n(\sigma))\, d\sigma \\ \quad + 2\int_o^t (f_n(\sigma),\ x'_n(\sigma))\, d\sigma + 2\int_o^t (x'_n(\sigma),d\ M(\sigma)) \\ \quad + \int_o^t ||c_n(\sigma,x_n(\sigma),\ x'_n(\sigma))||_2^2\, ds\ - \\ \quad - 2\ \mathrm{Tr} \ll \int_o^{\cdot} c_n(\sigma,x_n(\sigma),\ x'_n(\sigma))\, dW(\sigma),\ M\gg_t + \mathrm{Tr} \ll M\gg_t \end{cases}$$

On montre aisément que les opérateurs b_n et c_n vérifient :

$$(2.14)\quad |b_n(t,y)| \leqslant \beta|[y]_n|^{p-1}$$

$$(2.15)\quad \lambda'|x|^2 + 2\ (b_n(t,y),y) + \lambda'|y|^2 + \lambda' \geqslant \gamma|[y]_n|^{p-1}\cdot |y| + ||c_n(t,x,y)||_2^2$$

De (2.14) et (2.15), on tire :

$$(2.16)\quad ||c_n(t,x,y)||_2^2 \leqslant \lambda'|x|^2 + 2\ \beta|[y]_n|^{p-1}\ .\ |y| + \lambda'\ |y|^2 + \lambda'$$

Or :

$$(2.17)\quad 2\left|\mathrm{Tr} \ll \int_o^{\cdot} c_n(\sigma,x_n(\sigma),\ x'_n(\sigma))\, dW(\sigma),\ M\gg_t\right| \leqslant \delta \int_o^t ||c_n(\sigma,x_n(\sigma),x'_n(\sigma))||_2^2\, d\sigma + \frac{1}{\delta}\,\mathrm{Tr} \ll M\gg_t$$

En regroupant (2.13), (2.14), (2.15), (2.16) et (2.17), on obtient :

$$(2.18)\quad \left\{\begin{aligned} |x'_n(t)|^2 \leqslant & |x_1|^2 + (a(o)\, x_o, x_o) + C_o|x_o|^2 + C_1 t \\ & + C_2 \int_o^t |x'_n(\sigma)|^2\, d\sigma + C_3 \operatorname{Tr} \langle\langle M\rangle\rangle_t + \int_o^t |f(\sigma)|^2\, d\sigma \\ & + 2\int_o^t (x'_n(\sigma), dM(\sigma)) - \\ & - 2\int_o^t (x'_n(\sigma), c_n(\sigma, x_n(\sigma), x'_n(\sigma)))\, dW(\sigma) \end{aligned}\right.$$

(2.18) s'écrit :

$$|x'_n(t)|^2 \leqslant \varphi_n(t)$$

où $\varphi_n(t)$ est une sous-martingale. Donc, en appliquant l'inégalité de Doob, on obtient :

$$P\left(\sup_{t\leqslant T} |x'_n(t)| > n\right) \leqslant \frac{E\,(\varphi_n(T))}{n^2}$$

Prenons l'espérance mathématique dans (2.18) :

$$(2.19)\quad \begin{aligned} E\,(|x'_n(t)|^2) \leqslant & E\,(|x_1|^2) + E\,(a(o)\, x_o, x_o) + C_o\, E\,(|x_o|^2) + C_1 t \\ & + C_2 \int_o^t E\,(|x_n(\sigma)|^2)\, d\sigma + C_3\, E\,(|M(t)|^2) + E\int_o^t |f(\sigma)|^2 d\sigma \end{aligned}$$

Soit :

$$(2.20)\quad E\,(|x'_n(t)|^2) \leqslant \rho + \delta\int_o^t E\,(|x'_n(\sigma)|^2)\, d\sigma$$

En appliquant le Lemme de Gronwall à (2.20), on obtient :

(2.21) $$\sup_{t\leqslant T} E\,(|x'_n(t)|^2) \leqslant \text{cste}$$

D'où : $E\left[\varphi_n(T)\right] \leqslant \theta$

(2.22) $$P\,(\sup_{t\leqslant T} |x'_n(t)| > n) \leqslant \frac{\theta}{n^2}$$

On pose :

$$T_n = \inf\,\{t\leqslant T; |x'_n(t)| > n\}$$

Grâce à (2.22),

$$\text{p.s.}, \exists\, N(\omega) \quad \text{t.q.} \quad n \geqslant N(\omega) \Longrightarrow T_n(\omega) = T$$

Donc : $\bigcup_n \left[0,T_n\right] = \left[0,T\right]$ p.s.

Remarquons que si $t \in \left[0,T_n\right]$, $\quad x_{n+1}(t) = x_n(t)$

Donc la relation :

$x(t) = x_n(t), \quad t \in \left[0,T_n\right]$, définit un processus sur $\left[0,T\right]$, à trajectoires continues, qui est solution de l'équation (2.9).

Il reste à montrer :

$$x' \in L^2(\Omega;C(0,T;\mathbb{R}^d)) \cap L^p(\Omega x)0,T(;\mathbb{R}^d)$$

De (2.21), on déduit, en utilisant le Lemme de Fatou (puisque $\forall t$, $x_n(t) \to x(t)$ p.s.) :

(2.23) $$\sup_{t\leqslant T} E\,(|x'(t)|^2) \leqslant \text{cste}$$

Appliquons le calcul différentiel stochastique à $|x'(t)|^2$:

(2.24)
$$|x'(t)|^2 + (a(t)x(t),\ x(t)) + 2\int_0^t (b(\sigma,x'(\sigma)),\ x'(\sigma))\, d\sigma +$$

$$+ 2\int_0^t (x'(\sigma),\ C(\sigma,x(\sigma),x'(\sigma)))\, dW(\sigma) \leqslant |x_1|^2 + (a(o)\ x_o,x_o) +$$

$$+ 2\int_0^t (f(\sigma),\ x'(\sigma))\, d\sigma + 2\int_0^t (x'(\sigma),\ d\, M(\sigma)) +$$

$$+ \mathrm{Tr} \ll M - \int_0^{\cdot} C(\sigma,x(\sigma),\ x'(\sigma))\, dW(\sigma) \gg_t$$

Par les majorations habituelles, et en utilisant les hypothèses, on obtient :

(2.25)
$$|x'(t)|^2 + \frac{\gamma}{2}\int_0^t |x'(\sigma)|^p\, d\sigma \leqslant \xi + 2\int_0^t (x'(\sigma),\ dM(\sigma))$$

$$- 2\int_0^t (x'(\sigma),\ C(\sigma,x(\sigma),\ x'(\sigma)))\, dW(\sigma)$$

où :

$$\xi = |x_1|^2 + (a(o)\ x_o,\ x_o) + d_1|x_o|^2 + d_2 + d_3\int_0^T |x'(\sigma)|^2 d\sigma$$

$$+ d_4\ \mathrm{Tr} \ll M \gg_T = \int_0^T |f(\sigma)|^2\, d\sigma$$

Grâce à (2.23), $\xi \in L^1(\Omega)$, et les intégrales stochastiques qui interviennent dans (2.25) sont des martingales, donc on peut prendre l'espérance mathématique dans (2.25), ce qui nous donne :

(2.26)
$$E\int_0^T |x'(\sigma)|^p\, d\sigma < +\infty$$

De plus :

(2.27) $$E\left\{\sup_{t\leq T} |x'(t)|^2\right\} \leq E\,\xi + 2\,E\left\{\sup_{t\leq T}\left|\int_o^t (x'(\sigma),\, dM(\sigma))\right|\right\}$$

$$+ 2\,E\left\{\sup_{t\leq T}\left|\int_o^t (x',C(x,x'))\, dW(\sigma)\right|\right\}$$

Mais, d'après le théorème 1.3 de la première partie :

(2.28) $$2\,E\left\{\sup_{t\leq T}\left|\int_o^t (x'(\sigma),\, dM(\sigma))\right|\right\} \leq \frac{1}{3}\,E\left\{\sup_{t<T}|x'(t)|^2\right\} + 27\,E\,|M(T)|^2$$

(2.29) $$2\,E\left\{\sup_{t\leq T}\left|\int_o^t (x',C(x,x'))dW(\sigma)\right|\right\} \leq \frac{1}{3}\,E\left\{\sup_{t\leq T}|x'(t)|^2\right\} +$$

$$+ 27\,E\int_o^T ||C(\sigma,x(\sigma),x'(\sigma))||_2^2\, d\sigma$$

En utilisant (2.26), (2.28), (2.29) et les hypothèses (2.4) et (2.5), on tire de (2.27) :

(2.30) $$E\left(\sup_{t\leq T}|x'(t)|^2\right) < +\infty$$

Donc :

$$x \in L^2(\Omega;C^1(0,T;\mathbb{R}^d)).$$

§3 - THEOREMES D'EXISTENCE ET D'UNICITE

Nous allons nous placer tout d'abord dans le cadre suivant :

(3.1) $$u_o \in L^2(\Omega,\mathfrak{F}_o,P;V)$$

(3.2) $$u_1 \in L^2(\Omega,\mathfrak{F}_o,P;H)$$

(3.3) $f = f_1 + f_2$ avec :

(3.4) $f_1 \in L^2(\Omega\times]0,T[;H)$ non anticipatif

(3.5) $f_2 \in L^{p'}(\Omega\times]0,T[;W')$ non anticipatif

(3.6) $M \in \mathcal{M}^2(0,T;H)$

Etablissons le :

Théorème 3.1 : *Supposons que, outre les hypothèses du* § 1, (3.1)....(3.6) *soient vérifiées.*

Alors l'équation :

(3.7)
$$\left\{\begin{aligned} &du'(t) + A(t)\,u(t)\,dt + B(t,u'(t))dt + C(t,u(t),u'(t))\,dW(t) \\ &\qquad = f(t)\,dt + d\,M(t) \\ &u(o) = u_o \\ &u'(o) = u_1 \end{aligned}\right.$$

a une solution unique :

(3.8) $u \in L^2(\Omega;C(0,T;V))$, *tel que :*

(3.9) $u' \in L^p(\Omega\times\ 0,T\ ;W) \cap L^2(\Omega;C(0,T;H))$, $u'(t)$ *processus bien mesurable à valeurs dans* H.

Démonstration :

a) Unicité : Soient u et v deux solutions de l'équation (3.7), qui vérifient toutes deux (3.8) et (3.9).

Appliquons le théorème 3.2. du chapitre 2 à u-v :

$$E\,(|u'(t)-v'(t)|^2) + E < A(t)\left[u(t)-v(t)\right], u(t)-v(t) >$$

$$+ 2\,E\int_o^t < B(\sigma,u'(\sigma)) - B(\sigma,v'(\sigma)), u'(\sigma)-v'(\sigma)> \, d\sigma$$

$$- E\int_o^t ||C(\sigma,u(\sigma),u'(\sigma)) - C(\sigma,v(\sigma),v'(\sigma))||_2^2 \, d\sigma = 0$$

Grâce à l'hypothèse de monotonie (1.4),

$$E\left[|u'(t)-v'(t)|^2 + <A(t)\left[u(t)-v(t)\right], u(t)-v(t)>\right]$$

$$\leq \lambda\int_o^t E\left[|u'(\sigma)-v'(\sigma)|^2 + <A(\sigma)\left[u(\sigma)-v(\sigma)\right], u(\sigma)-v(\sigma)>\right] d\sigma$$

Et on déduit du Lemme de Gronwall :

$$E\left[|u'(t)-v'(t)|^2 + <A(t)\left[u(t)-v(t)\right], u(t)-v(t)>\right] = 0 \qquad \forall\, t \in [0,T]$$

Donc : $\left.\begin{aligned} u'(t) &= v'(t) \\ u(t) &= v(t)\end{aligned}\right\}$ p.s., $\forall\, t \in [0,T]$

b) <u>Existence</u> : Soit $\{\ell_1,\dots,\ell_m,\dots\}$ une base orthonormée de H, formée d'éléments de $V \cap W$.

Soit $\{k_1,\dots,k_m,\dots\}$ une base orthonormée de K, et Π_m l'opérateur de projection orthogonale de K sur $S_p\ \{k_1,\dots,k_m\}$.

Etudions l'équation :

$$(3.10)\qquad \left\{\begin{aligned} & d(u'_m(t),\ell_j) + <A(t)\,u_m(t),\ell_j> dt + <B(t,u'_m(t)),\ell_j> dt + \\ & \qquad + (\ell_j, C(t,u_m(t),u'_m(t)))\, d\left[\Pi_m W(t)\right] = \\ & \qquad = <f_m(t), \ell_j> dt + d(M(t), \ell_j) \\ & \qquad j = 1\dots m \\ & u_m(o) = u_o^m \\ & u'_m(o) = u_1^m \end{aligned}\right.$$

où : u_o^m désigne la projection orthogonale dans V de u_o sur $Sp[\ell_1 \dots \ell_m]$,
et u_1^m désigne la projection orthogonale dans H de u_1 sur $Sp[\ell_1 \dots \ell_m]$;

f_m est définie par :

$$(3.11) \quad \begin{cases} f_{2,m}(t,\omega) = \dfrac{m}{\mathrm{Sup}(m, \|f_2(t,\omega)\|_*)} f_2(t,\omega) \\ \\ f_m = f_1 + f_{2,m} \qquad (1) \end{cases}$$

Remarquons que :

$$(3.12) \quad \begin{cases} u_o^m \to u_o \quad \text{dans } L^2(\Omega;V) \\ u_1^m \to u_1 \quad \text{dans } L^2(\Omega;H) \\ f_{2,m} \to f_2 \quad \text{dans } L^{p'}(\Omega x)0,T(;W') \end{cases}$$

On cherche pour (3.10) une solution à valeurs dans $Sp[\ell_1 \dots \ell_m]$, ce qui revient à chercher un processus $X_m(t)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, tel que :

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} X_m^j(t)\, \ell_j \quad \text{vérifie (3.10).}$$

On vérifie aisément que l'on peut appliquer le théorème 2.1, qui nous assure l'existence d'une solution, telle que :

$$(3.13) \quad \begin{cases} u_m \in L^2(\Omega;C(0,T;V)) \\ u'_m \in L^2(\Omega;C(0,T,H)) \cap L^p(\Omega x)0,T(;W) \end{cases}$$

Etablissons maintenant le :

<u>Lemme 3.1</u> : u_m *reste dans un borné de* $L^2(\Omega;L^\infty(0,T;V))$
u'_m *reste dans un borné de* $L^2(\Omega;L^\infty(0,T;H)) \cap L^p(\Omega x)0,T(;W)$

(1) Il faut que $\sum_{j=1}^{m} < f_m(t)\, \ell_j > \ell_j \in L^2(\Omega x)0,T(;H)$.

Donc dans le cas où $p' \geqslant 2$, on peut prendre $f_m = f$.

Démonstration : Appliquons à $|u'_m(t)|^2$ le calcul différentiel stochastique :

$$(3.14)\quad \left\{\begin{aligned} & |u'_m(t)|^2 + \langle A(t)\, u_m(t), u_m(t)\rangle + 2\int_o^t \langle B(\sigma,u'_m(\sigma)), u'_m(\sigma)\rangle d\sigma \\ & + 2\int_o^t (u'_m(\sigma), C(\sigma,u_m(\sigma), u'_m(\sigma))\Pi_m)\; d\,W(\sigma) \\ & = |u_1^m|^2 + \langle A(o)\, u_o^m , u_o^m\rangle + \int_o^t \langle A'(\sigma)\, u_m(\sigma), u_m(\sigma)\rangle\, d\sigma \\ & + 2\int_o^t \langle f_m(\sigma),u'_m(\sigma)\rangle\, d\sigma + 2\int_o^t (u'_m(\sigma), d\,M(\sigma)) \\ & + \mathrm{Tr} \langle\langle M^m - \int_o^{\cdot} C^m(\sigma,u_m(\sigma), u'_m(\sigma))\Pi_m\, dW(\sigma)\rangle\rangle_t \end{aligned}\right.$$

où $M^m(t)$ désigne la projection orthogonale dans H sur $Sp[\ell_1,\ldots,\ell_m]$, de $M(t)$.

$$\text{et } C^m(.) = \sum_{j=1}^{m} \ell_j \otimes (\ell_j,C(.))$$

On tire de (3.14) :

$$(3.15)\quad \left\{\begin{aligned} & |u'_m(t)|^2 + \langle A(t)\, u_m(t), u_m(t)\rangle + 2\int_o^t (B(\sigma,u'_m(\sigma)), u'_m(\sigma))\, d\sigma - \\ & -\int_o^t ||C(\sigma,u_m(\sigma), u'_m(\sigma)||_2^2\, d\sigma \leqslant |u_1|^2 + \langle A(o)\, u_o,u_o\rangle \\ & + 2\int_o^t \langle f_m(\sigma), u'_m(\sigma)\rangle\, d\sigma + 2\int_o^t \langle u'_m(\sigma), d\,M(\sigma)\rangle \\ & - 2\int_o^t \langle (u'_m(\sigma), C(\sigma,u_m(\sigma), u'_m(\sigma))\Pi_m)\, dW(t) + \\ & + \delta\int_o^t ||C(\sigma,u_m(\sigma),u'_m(\sigma))||_2^2\, d\sigma + \left(1+\frac{1}{\delta}\right) \mathrm{Tr}\, \langle\langle M\rangle\rangle_t \end{aligned}\right.$$

Grâce à (3.13), on peut prendre l'espérance mathématique dans (3.15) :

$$(3.16)\quad \left\{\begin{array}{l} E\,(|u'_m(t)|^2) + E <A(t)\, u_m(t),\ u_m(t)> + 2\,E\displaystyle\int_o^t <B(\sigma,u'_m(\sigma)),\ u'_m(\sigma)>\, d\sigma - \\ - E\displaystyle\int_o^t ||C(\sigma,u_m(\sigma),u'_m(\sigma))||_2^2 d\sigma \leqslant E\,(|u_1|^2) + E <A(o)\, u_o,\ u_o> \\ + 2\,E\displaystyle\int_o^t <f_m(\sigma),u'_m(\sigma)>\, d\sigma + \delta E\displaystyle\int_o^t ||C(\sigma,u_m(\sigma),u'_m(\sigma)||_2^2 d\sigma + \left(1+\frac{1}{\delta}\right) E(|M(t)|^2) \end{array}\right.$$

Utilisant les hypothèses et les majorations habituelles, on tire de (3.16) :

$$(3.17)\quad \left\{\begin{array}{l} E\,(|u'_m(t)|^2) + \alpha\, E\,(||u_m(t)||_V^2) + \gamma\, E\displaystyle\int_o^t ||u'_m(\sigma)||_W^p\, d\sigma \leqslant \\ \leqslant E\,(|u_1|^2) + E <A(o)\, u_o,\ u_o> + 2\,\alpha\, E\,(|u_o|^2) + \lambda(1+\delta)t + \\ + (2\alpha+\lambda(1+\delta)+1)\, E\displaystyle\int_o^t |u'_m(\sigma)|^2 d\sigma + \lambda\, E\displaystyle\int_o^t ||u_m(\sigma)||_V^2\, d\sigma + \\ +2\left(\frac{\theta^p}{p} + \beta\delta\right) E\displaystyle\int_o^t ||u'_m(\sigma)||_W^p\, d\sigma + E\displaystyle\int_o^t |f_1(\sigma)|^2\, d\sigma + \\ + \dfrac{2}{p'\theta^{p'}}\ E\displaystyle\int_o^t ||f_2(\sigma)||_*^{p'}\, d\sigma + \left(1+\frac{1}{\delta}\right) E\,(|M(t)|^2) \end{array}\right.$$

On choisit θ et δ tels que :

$$\frac{2\ \theta^p}{p} = 2\ \beta\delta = \frac{\gamma}{3}$$

Alors (3.17) s'écrit :

$$(3.18)\quad \left\{\begin{array}{l} E(|u'_m(t)|^2) + \alpha\, E\,(||u_m(t)||_V^2) + \dfrac{\gamma}{3}\ E\displaystyle\int_o^t ||u'_m(\sigma)||_W^p\, d\sigma \\ \leqslant C_o + C_1\displaystyle\int_o^t E\,|u'_m(\sigma)|^2\, d\sigma + C_2\displaystyle\int_o^t E||u_m(\sigma)||_V^2\, d\sigma \end{array}\right.$$

Posons : $C_3 = \dfrac{\mathrm{Sup}(C_1,C_2)}{\inf\ (1,\alpha)}$.

$$E\left[|u'_m(t)|^2 + ||u(t)||_V^2\right] \leqslant C'_o + C_3\int_o^t E\left[|u'_m(\sigma)|^2 + ||u(\sigma)||_V^2\right] d\sigma$$

D'oũ, en utilisant le Lemme de Gronwall :

(3.19) $$\sup_{t\leqslant T} E\,(|u'_m(t)|^2) \leqslant a$$

(3.20) $$\sup_{t\leqslant T} E\,(||u_m(t)||_V^2) \leqslant b$$

(3.21) $$E\int_o^T ||u'_m(t)||_W^p\, dt \leqslant c$$

Donc, aussi :

(3.22) $$E\int_o^T ||C(t,u_m(t),u'_m(t))||_2^2\, dt \leqslant d$$

Utilisons ces premières estimations pour en établir de plus fines.
On tire de (3.15) :

(3.23) $$\left\{\begin{aligned} &|u'_m(t)|^2 + \alpha||u_m(t)||_V^2 \leqslant |u_1|^2 + \lambda t + \langle A(o)\ u_o, u_o\rangle + 2\ \alpha\ |u_o|^2 \\ &\quad + (1+2\alpha+\lambda)\int_o^t |u'_m(\sigma)|^2\, d\sigma + \frac{2}{p}\int_o^t ||u'_m(\sigma)||_W^p\, d\sigma + \lambda\int_o^t ||u_m(\sigma)||_V^2\, d\sigma \\ &\quad + \int_o^t |f_1(\sigma)|^2\, d\sigma + \frac{2}{p'}\int_o^t ||f_2(\sigma)||_{W'}^{p'}\, d\sigma + \delta\int_o^t ||C(\sigma,u_m(\sigma),u'_m(\sigma))||_2^2\, d\sigma \\ &\quad + (1+\frac{1}{\delta})\ \mathrm{Tr}\ \langle\langle M\rangle\rangle_t + 2\int_o^t (u'_m(\sigma), d\,M(\sigma)) - 2\int_o^t (u'_m(\sigma), \\ &\qquad C(\sigma,u_m(\sigma),u'_m(\sigma))\Pi_m)\, dW(t) \end{aligned}\right.$$

D'où :

$$(3.24)\quad \left\{\begin{aligned} E\left[\sup_{t\leqslant T}\left\{|u'_m(t)|^2+\alpha||u_m(t)||_v^2\right\}\right] &\leqslant e+2\,E\left[\sup_{t\leqslant T}\left|\int_o^t (u'_m(\sigma),dM(\sigma))\right|\right] \\ &+2\,E\left[\sup_{t\leqslant T}\left|\int_o^t (u'_m(\sigma),C(\sigma,u_m(\sigma),u'_m(\sigma))\Pi_m)dW(\sigma)\right|\right]\end{aligned}\right.$$

Or :

$$(3.25)\quad \begin{aligned} 2\,E\left[\sup_{t\leqslant T}\left|\int_o^t (u'_m(\sigma),dM(\sigma))\right|\right] &\leqslant 6\,E\left[\left(\int_o^T |u'_m(\sigma)|^2\,d\left[Tr\langle\langle M\rangle\rangle_t\right]\right)^{1/2}\right] \\ &\leqslant \frac{1}{3}\,E\left[\sup_{t\leqslant T}|u'_m(t)|^2\right]+27\,E\left[|M(T)|^2\right]\end{aligned}$$

$$(3.26)\quad 2\,E\left[\sup_{t\leqslant T}\left|\int_o^t (u'_m(\sigma),C(\sigma,u_m(\sigma),u'_m(\sigma))\Pi_m)dW(\sigma)\right|\right]$$

$$\leqslant 6\,E\left[\left(\int_o^T |u'_m(\sigma)|^2||C(\sigma,u_m(\sigma),u'_m(\sigma)||_2^2 d\sigma\right)^{1/2}\right]\leqslant \frac{1}{3}\,E\left[\sup_{t<T}|u'_m(t)|^2\right]+27\,d$$

Rassemblant (3.24), (3.25) et (3.26), on obtient :

$$(3.27)\quad \frac{1}{3}\,E\left[\sup_{t\leqslant T}|u'_m(t)|^2\right]\leqslant e+27\,d+27\,E\,(|M(T)|^2)$$

D'où aussi :

$$(3.28)\quad E\left(\sup_{t\leqslant T}||u_m(t)||_v^2\right)\leqslant \text{cste}$$

(3.21), (3.27) et (3.28) démontrent le Lemme 3.1.

Grâce aux hypothèses faites sur B et C, on a aussi :

$B(u'_m)$ reste dans un borné de $L^{p'}(\Omega x)0,T(;W')$

$C(u_m,u'_m)\Pi_m$ reste dans un borné de $L^2(\Omega x)0,T(;L^2(K,H))$.

Il existe donc une sous-suite u_μ telle que l'on ait :

$u_\mu \rightharpoonup u$ dans $L^2(\Omega;L^\infty(0,T;V))$ $*$ faible

$u'_\mu \rightharpoonup u'$ dans $L^2(\Omega;L^\infty(0,T;H))$ $*$ faible

dans $L^p(\Omega x)0,T(;W)$ faible

$u_\mu(T) \rightharpoonup u(T)$ dans $L^2(\Omega;V)$ faible

$u'_\mu(T) \rightharpoonup u'(T)$ dans $L^2(\Omega;H)$ faible

$Au_\mu \rightharpoonup Au$ dans $L^2(\Omega;L^\infty(0,T;V'))$ $*$ faible

$B(u'_\mu) \rightharpoonup \chi$ dans $L^{p'}(\Omega x)0,T(;W')$ faible

$C(u_\mu,u'_\mu)\Pi_\mu \rightharpoonup \zeta$ dans $L^2(\Omega x)0,T(;L^2(K,H))$ faible

On démontre aisément que les cinq premières limites ci-dessus ont les relations indiquées. Cela résulte en fait de la linéarité de la dérivation, de l'opération trace, et de l'opérateur A. Par contre, en ce qui concerne les termes non-linéaires, il nous reste à montrer :

<u>Lemme 3.2.</u> :

$\chi = B(u')$

$\zeta = C(u,u')$

<u>Démonstration</u> :

Dans l'égalité (3.14), on choisit $m = \mu$, et on prend l'espérance mathématique :

$$(3.29)\quad \left\{\begin{array}{l} E\,(|u'_\mu(t)|^2) + E<A(t)\,u_\mu(t),\,u_\mu(t)> + 2\,E\int_o^t (B(\sigma,u'_\mu(\sigma)),\,u'_\mu(\sigma))\,d\sigma. \\ -\,E\int_o^t ||C(\sigma,u_\mu(\sigma),u'_\mu(\sigma)||_2^2\,d\sigma \leqslant E\,(|u_1^\mu|^2) + E<A(o)u_o^\mu,u_o^\mu> + \\ +\,E\int_o^t <A'(\sigma)\,u_\mu(\sigma),u_\mu(\sigma)>\,d\sigma + 2\,E\int_o^t <f_\mu(\sigma),u'_\mu(\sigma)>\,d\sigma + \\ +\,E\,\{M^\mu(t),M^\mu(t) - 2\int_o^t C(\sigma,u_\mu(\sigma),u'_\mu(\sigma))\Pi_\mu\,dW(\sigma)\} \end{array}\right.$$

Si $\varphi(t)$ est une fonction réelle différentiable,

$$\int_o^T e^{-\lambda t}\, d\varphi(t) = e^{-\lambda T}\, \varphi(T)-\varphi(o)+\lambda\int_o^T e^{-\lambda t}\, \varphi(t)\, dt$$

On tire donc de (3.29) :

$$(3.30)\quad \left\{\begin{aligned}
& e^{-\lambda T}\, E(|u'_\mu(T)|^2) + e^{-\lambda T}\, E <A(T)\, u_\mu(T),\, u_\mu(T)> \; + \\
+ \; & \lambda E\int_o^T e^{-\lambda t} <A(t)\, u_\mu(t),\, u_\mu(t)>\, dt + \lambda\, E\int_o^T e^{-\lambda t}|u'_\mu(t)|^2\, dt \; + \\
+ \; & E\int_o^T e^{-\lambda t} <B(t,u'_\mu(t)),u'_\mu(t)>\, dt - E\int_o^T e^{-\lambda t}\|C(t,u_\mu(t)u'_\mu(t))\|_2^2\, dt \; < \\
\leqslant \; & E(|u_1|^2) + E <A(o)\, u_o^\mu,\, u_o^\mu> + E\int_o^T e^{-\lambda t} <A'(t)\, u_\mu(t),u_\mu(t)>\, dt \; + \\
+ \; & 2\, E\int_o^T e^{-\lambda t} <f_\mu(t),\, u'_\mu(t)>\, dt \; + \\
+ \; & e^{-\lambda t}\; E\left\{ M^\mu(T),M^\mu(T) - 2\int_o^T C(t,u_\mu(t),u'_\mu(t))\; \Pi_\mu dW(t)\right\} + \\
+ \; & \lambda E\int_o^T e^{-\lambda t}\left\{ M^\mu(t),M^\mu(t) - 2\int_o^t C(\sigma,u_\mu(\sigma),u'_\mu(\sigma))\Pi_\mu\; dW(\sigma)\right\} dt
\end{aligned}\right.$$

On sait que toute forme quadratique semi-définie négative est concave. Donc, sur un Banach toute forme quadratique semi-définie négative et continue pour la topologie forte, est semi-continue supérieurement pour la topologie faible.

En utilisant de plus la convergence forte de f_μ et de M^μ, et les convergences faibles, on déduit de (3.30) :

$$(3.31)\quad \left\{\begin{aligned} &\ell im\ \mathrm{Sup}\ E\Big[\int_o^T \lambda\, e^{-\lambda t} <A(t)u_\mu(t),u_\mu(t)>\, dt + 2\int_o^T e^{-\lambda t}(B(t,u'_\mu(t)),u'_\mu(t))\, dt \\ &+ \lambda\int_o^T e^{-\lambda t}\, |u'_\mu(t)|^2\, dt - \int_o^T e^{-\lambda t}||C(t,u_\mu(t),u'_\mu(t))||_2^2\, dt\Big] \\ &\leq E(|u_1|^2) + E <A(o)\, u_o,\, u_o> - e^{-\lambda T}\, E(|u'(T)|^2) - e^{-\lambda T} E<A(T)u(T),u(T)> \\ &+ E\int_o^T e^{-\lambda t} <A'(t)\, u(t),\, u(t)>\, dt + 2\int_o^T <f(t),\, u'(t)>\, dt + \\ &+ e^{-\lambda T}\, E\Big\{M(T),\, M(T) - 2\int_o^T \zeta(t)\, dW(t)\Big\} + \\ &+ \lambda E\int_o^T e^{-\lambda t}\, \{M(t),M(t) - 2\int_o^t \zeta(\sigma)\, dW(\sigma)\}\, dt \end{aligned}\right.$$

Par ailleurs, en passant à la limite faible dans l'équation (3.10), on obtient :

$$(3.32)\quad \left\{\begin{aligned} du'(t) + A(t)\, u(t)\, dt + \chi(t)\, dt + \zeta(t)\, dW(t) &= f(t)\, dt + dM(t) \\ u(o) &= u_o \\ u'(o) &= u_1 \end{aligned}\right.$$

On peut appliquer à u(t) le théorème 3.1. du chapitre 2 :

$$(3.33)\quad \left\{\begin{aligned} &E(|u'(t)|^2) + E <A(t)u(t),u(t)> + 2\, E\int_o^t <\chi(\sigma),u'(\sigma)>\, d\sigma - \\ &- E\int_o^t ||\zeta(\sigma)||_2^2\, d\sigma = E(|u_1|^2) + E <A(o)\, u_o,\, u_o> + E\int_o^t <A'(\sigma)u(\sigma),u(\sigma)> d\sigma \\ &+ 2\, E\int_o^t <f(\sigma),\, u'(\sigma)>\, d\sigma + E\{M(t),M(t) - 2\int_o^t \zeta(\sigma)\, dW(\sigma)\} \end{aligned}\right.$$

En introduisant $\bar{e}^{\lambda t}$, on établit à partir de (3.33) une relation analogue à (3.30).

Joint à (3.31), cela nous permet de conclure :

$$(3.34)\quad \left\{\begin{array}{l} \ell im\ \mathrm{Sup}\ E\left[\lambda\int_o^T \bar{e}^{\lambda t} <A(t)u_\mu(t),u_\mu(t)> dt + \lambda\int_o^T \bar{e}^{\lambda t}|u'_\mu(t)|^2\, dt + \right. \\ \left. +\int_o^T \bar{e}^{\lambda t}<B(t,u'_\mu(t)),u'_\mu(t)> dt - \int_o^T \bar{e}^{\lambda t}||C(t,u_\mu(t),u'_\mu(t))||_2^2 dt\right] \\ \leqslant E\left[\lambda\int_o^T \bar{e}^{\lambda t}<A(t)u(t),u(t)> dt + \lambda\int_o^T \bar{e}^{\lambda t}\ |u'(t)|^2\, dt + \right. \\ \left. + \int_o^T \bar{e}^{\lambda t}\ <\chi(t),u'(t)> dt - \int_o^T \bar{e}^{\lambda t}\ ||\zeta(t)||_2^2 dt\right] \end{array}\right.$$

Or, étant donné :

$v \in L^2(\Omega;L^\infty(0,T;V))$ tel que :

$v' = \dfrac{dv}{dt} \in L^2(\Omega;L^\infty(0,T;H)) \cap L^p(\Omega x)0,T(;W)$

On pose :

$$X_\mu = \lambda E\int_o^T \bar{e}^{\lambda t}\ <A(t)\left[u_\mu(t)-v(t)\right],u_\mu(t)-v(t)> dt + \lambda E\int_o^T \bar{e}^{\lambda t}|u'_\mu(t)-v'(t)|^2\, dt$$

$$+\ 2\ E\int_o^T \bar{e}^{\lambda t}\ <B(t,u'_\mu(t)-B(t,v'(t)),\ u'_\mu(t)-v'(t)> dt$$

$$-\ E\int_o^T \bar{e}^{\lambda t}||C(t,u_\mu(t),u'_\mu(t)) - C(t,v(t),v'(t)||_2^2 dt$$

Grâce à l'hypothèse de monotonie (1.4),

$$X_\mu \geqslant 0$$

Or, grâce à (3.34) et aux convergences faibles,

(3.35)
$$\left\{\begin{aligned} 0 \leqslant \limsup X_\mu \leqslant \; & \lambda E \int_0^T e^{-\lambda t} \langle A(t)\left[u(t)-v(t)\right], u(t)-v(t)\rangle\, dt \\ & + \lambda E \int_0^T e^{-\lambda t} |u'(t)-v'(t)|^2\, dt + 2\, E \int_0^T e^{-\lambda t} \langle \chi(t)-B(t,v'(t)), u'(t)-v'(t)\rangle\, dt \\ & - E \int_0^T e^{-\lambda t} \|\zeta(t) - C(t,v(t),v'(t))\|_2^2\, dt \end{aligned}\right.$$

Dans (3.35), on choisit tout d'abord :

$$v(t) = u(t)$$

d'où :

$$\zeta(t) = C(t,u(t),u'(t))$$

On tire d'autre part de (3.35) :

(3.36)
$$\begin{aligned} & \lambda E \int_0^T e^{-\lambda t} \langle A(t)\left[u(t)-v(t)\right], u(t)-v(t)\rangle\, dt + \lambda E \int_0^T |u'(t)-v'(t)|^2\, dt \\ & + 2\, E \int_0^T e^{-\lambda t} \langle \chi(t) - B(t,v'(t)), u'(t)-v'(t)\rangle\, dt \geqslant 0 \end{aligned}$$

On pose : $v(t) = u(t) - \rho\, x(t)$

avec : $x(t) \in L^\infty(\Omega; C^1(0,T;V\cap W))$

$\rho > 0$

On divise par ρ et on fait tendre $\rho \to 0$, d'où :

$$E\int_0^T e^{-\lambda t} < \chi(t) - B(t,u'(t)), x(t)> dt \geqslant 0$$

$\forall\ x \in L^\infty(\Omega;C^1(0,T;V\cap W))$, donc :

$$\chi(t) = B(t,u'(t))$$

Fin de la démonstration du théorème 3.1.

L'équation (3.32) s'écrit donc :

$$(3.37)\quad \begin{cases} du'(t) + A(t)\ u(t)\ dt + B(t,u'(t))\ dt + C(t,u(t),u'(t))\ dW(t) \\ \qquad\qquad = f(t)\ dt + dM(t) \\ u(o) = u_o \\ u'(o) = u_1 \end{cases}$$

Les conditions d'application du théorème 3.2 du chapitre 2 sont alors remplies d'où :

$$u \in L^2(\Omega;C(0,T;V))$$

et $u' \in L^2(\Omega;C(0,T;H)) \cap L^p(\Omega x)0,T(;W)$,

u' est bien mesurable à valeurs dans H.

On a de plus le résultat suivant :

<u>Théorème 3.2</u> : *Sous les hypothèses du § 1, l'équation :*

$$(3.38)' \quad \begin{cases} du'(t) + A(t)\,u(t)\,dt + B(t,u'(t))\,dt + C(t,u(t),u'(t))\,dW(t) \\ \qquad = f(t)\,dt + dM(t) \\ u(o) = u_o \\ u'(o) = u_1 \end{cases}$$

a une solution unique

$u \in L^o(\Omega;C(0,T;V))$ *tel que*

$u' \in L^o(\Omega;L^p(0,T;W)) \cap L^o(\Omega;C(0,T;H))$

où $u'(t)$ *est bien mesurable à valeurs dans* H.

<u>Démonstration</u> :

On pose : $\Omega_n = \{||u_o|| \leqslant n\} \cap \{|u_1| \leqslant n\}$

$$u_o^n = 1_{\Omega_n}\, u_o$$

$$u_1^n = 1_{\Omega_n}\, u_1$$

On décompose :

$$f = f_1 + f_2$$

avec :

$$f_1 \in L^o(\Omega;L^2(0,T;H))$$

$$f_2 \in L^o(\Omega;L^{p'}(0,T;W'))$$

et l'on pose :

$$T_n^1(\omega) = \inf\left\{t \leqslant T ; \left(\int_o^t |f_1(\sigma)|^2 d\sigma\right)^{1/2} > n\right\}$$

$$T_n^2(\omega) = \inf\left\{t \leqslant T ; \left(\int_o^t ||f_2(\sigma)||_*^{p'}\, d\sigma\right)^{1/p'} > n\right\}$$

Choisissons T_n^3 qui réduit la martingale locale $M(t)$, i.e. tel que $M(t \wedge T_n^3) \in \mathcal{M}^2(0,T;H)$

Et soit :

$$T_n = T_n^1 \wedge T_n^2 \wedge T_n^3$$

$$X_n = 1_{[0,T_n]}$$

$$f_n(t) = X_n(t)\, f(t)$$

$$M_n(t) = M(t \wedge T_n)$$

Remarquons que :

p.s., $T_n = T$ à partir d'un certain n.

Le théorème 3.1 nous assure l'existence d'une solution unique pour l'équation :

$$(3.39) \quad \begin{cases} du'_n(t) + A(t)\, u_n(t)\, dt + B(t,u'_n(t))\, dt + C(t,u_n(t),u'_n(t))dW(t) = \\ \qquad = f_n(t)\, dt + dM_n(t) \\ u_n(o) = u_o^n \\ u'_n(o) = u_1^n \end{cases}$$

On vérifie aisément que

si $m > n$, $[0,T_n] \subset [0,T_m]$

et $\Omega_n \subset \Omega_m$

De plus, $u_m(t,\omega) = u_n(t,\omega)$,

si $\omega \in \Omega_n$ et $t \in [0,T_n(\omega)]$

Or : $\bigcup_{n=1}^{\infty} [0,T_n] = [0,T]$ p.s.

$\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \Omega$, à un ensemble de mesure nulle près.

Donc, la relation :

(3.40) $u(t,\omega) = u_n(t,\omega)$ si $\omega \in \Omega_n$ et si $t \in [0,T_n]$

définit de façon unique un processus :

$u \in C(0,T;V)$ p.s. tel que :

$u' \in C(0,T;H) \cap L^p(0,T;W)$ p.s.

qui vérifie l'équation (3.38) p.s.

L'existence est démontrée.

Montrons l'unicité :

Supposons qu'il existe une autre solution $v(t)$. Grâce à l'unicité de la solution de l'équation (3.39), on aurait alors :

(3.41) $u(t) = v(t)$ si $\omega \in \Omega_n$ et $t \in [0,T_n]$,

et ceci $\forall n$, d'où :

$u(t) = v(t)$ $\forall t \in [0,T]$, p.s.

Remarque 3.1. :

On aurait des résultats similaires en considérant plusieurs triplets d'opérateurs (A_i, B_i, C_i) $i=1...q$, comme au § 4 du chapitre 3 de la IIème partie.

§ 4. - EXEMPLES

Les notations que nous allons utiliser sont les mêmes que celles du § 5 du chapitre 3, IIème partie.

Exemple 4.1. : Equation des ondes stochastique linéaire

Posons :

$H = W = L^2(\mathcal{O})$, $p=2$

$V = H^1_o(\mathcal{O})$

Si $u, v \in H_o(\ )$, soit :

$$\langle Au,v\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\mathcal{O}} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j}(x)\, dx$$

où $a_{ij}(.) \in L^\infty(\mathcal{O})$ et $a_{ij} = a_{ji}$

On suppose que $\exists\, \alpha > 0$, tel que :

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, \xi_i \xi_j \geqslant \alpha \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \text{ p.p. dans } \mathcal{O}.$$

Soit $B = 0$

On choisit $K = \mathbb{R}^2$,

$C(t,u,v) = (C_1(t,u), C_2(t,v))$

avec :

$C_1(t,u) = c_1(t)\, u$

$C_2(t,v) = c_2(t)\, v$

où $c_1(.), c_2(.) \in L^\infty(0,T)$

Soient $u_o \in L^o(\Omega, \mathcal{F}_o, P; H^1_o(\mathcal{O}))$ et $u_1 \in L^o(\Omega, \mathcal{F}_o, P; L^2(\mathcal{O}))$.

Etant donné $W_1(t)$ et $W_2(t)$ dans $\mathcal{F}_t$ - mouvements browniens indépendants, l'équation :

$$(4.1) \quad \begin{cases} du'(t) + A\, u(t)\, dt + C_1(t,u(t))\, dW_1(t) + C_2(t,u'(t))\, dW_2(t) = 0 \\ u(o) = u_o, \qquad u'(o) = u_1 \end{cases}$$

a une solution unique qui vérifie :

$u \in C(0,T;H^1_o(\mathcal{O}))$ p.s.

$u' \in C(0,T;L^2(\mathcal{O}))$ p.s.

L'équation (4.1) s'interprète par :

(4.2) $$\begin{cases} d\left[\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right] - \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}(t,x)\right) dt \\ \qquad + c_1(t)\, u(t,x)\, dW_1(t) + c_2(t)\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}\, dW_2(t) = 0 \\ \qquad \text{p.p. dans } \mathcal{C}. \end{cases}$$

(4.3) $$u(t,x)\Big|_{\Sigma} = 0$$

(4.4) $$u(o,x) = u_o(x), \quad \frac{\partial u(o,x)}{\partial t} = u_1(x) \quad \text{p.p. dans } \mathcal{O}.$$

<u>Remarque 4.1.</u> : L'équation (4.1) a été étudiée, dans le cas $n=1$, par YAVIN [1] .

<u>Exemple 4.2</u> : <u>Equation hyperbolique stochastique non linéaire</u>

On suppose ici que l'ouvert $\mathcal{O}$ est borné.

Soient $H = L^2(\mathcal{O})$ et $V = H^1_o(\mathcal{O})$

L'opérateur A est défini comme dans l'exemple 4.1.

Soient $p \geq 2$, $W = L^p(\mathcal{O})$ et B l'opérateur de $L^p(\mathcal{O})$ dans $L^{p'}(\mathcal{O})$ défini par

$$\langle B(u),v\rangle = \int_{\mathcal{O}} |u(x)|^{p-2}\, u(x)\, v(x)\, dx \quad \forall u,v \in L^p(\mathcal{O}).$$

Soit $K = \mathbb{R}^{n+1}$,

$$C(t,u,v) = (C_1(u),\ldots,C_n(u),\ C_{n+1}(v))$$

$$C_i(u) = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad i=1\ldots n, \quad u \in V.$$

$$C_{n+1}(v) = |v|^{p/2-1}\, v, \quad v \in L^p(\mathcal{O})$$

Soient d'autre part :

$u_o \in L^o(\Omega, \mathcal{F}_o, P; H^1_o(\mathcal{O}))$, $u_1 \in L^o(\Omega, \mathcal{F}_o, P; L^2(\mathcal{O}))$

$f \in L^{p'}(\mathcal{C})$ p.s., non anticipatif

$M \in \mathcal{M}^2_{loc}(0,T;L^2(\mathcal{O}))$

$W_i(t)$, $i=1\dots n+1$, $n+1$ $\mathcal{F}_t$ mouvements browniens indépendants deux à deux.

Alors l'équation :

$$(4.5)\quad \begin{cases} du'(t) + A\,u(t)\,dt + B(u'(t))\,dt + \sum\limits_{i=1}^{n} C_i(t,u(t))\,dW_i(t) \\ \qquad + C_{n+1}(t,u'(t))\,dW_{n+1}(t) = f(t)\,dt + dM(t) \\ \qquad u(o) = u_o \\ \qquad u'(o) = u_1 \end{cases}$$

a une solution unique :

$u \in C(0,T;H^1_o(\mathcal{O}))$ p.s., t.q.

$u' \in L^p(\Omega\times\mathcal{C}) \cap L^2(\Omega;C(0,T;L^2(\mathcal{O}))$ p.s.

L'équation (4.5.) s'interprète :

$$(4.6)\quad \begin{cases} d\left[\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right] - \sum\limits_{i,j=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\,\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial x_i}\right) dt + \\ + \left|\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right|^{p-2} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}\,dt + \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial x_i}\,dW_i(t) + \\ + \left|\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right|^{p/2-1} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}\,dW_{n+1}(t) = f(t,x)\,dt + dM(t,x) \quad \text{dans } \mathcal{C} \text{ p.p.} \end{cases}$$

$$(4.7)\quad u(t,x)\Big|_{\Sigma} = 0$$

$$(4.8)\quad u(o,x) = u_o(x),\ u'(o,x) = u_1(x) \quad \text{p.p. dans } \mathcal{O}$$

Exemple 4.3. : Equation hyperbolique stochastique non linéaire, avec condition au bord de type Neumann non homogène

On suppose que l'ouvert $\mathcal{O}$ est borné.

Soient $H = L^2(\mathcal{O})$, $V=H^1(\mathcal{O})$,

$$<A\,u,v> = \sum_{i=1}^{n} \int \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \; \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\,dx, \quad u,v \in H^1(\mathcal{O}),$$

Etant donné $p \geqslant 2$, soit :

$$W = \{v \in W^{1,p}(\mathcal{O}) \;;\; v_{|\Gamma} \in L^p(\Gamma)\}$$

Si $u,v \in W$, on pose :

$$<B(u),v> = \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathcal{O}} \left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\,dx + \int_{\mathcal{O}} |u(x)|^{p-2} u(x) v(x)\,dx$$

$$+ \int_{\Gamma} |u(x)|^{p-2}\, u(x)\; v(x)\; d\Gamma$$

Soit $K = \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} C(t,u,v) &= (C_1(t,u)\; C_2(t,v)) \\ C_1(t,u) &= c_1(t)\; u \\ \text{avec} &: c_1(.) \in L^\infty(0,T) \\ C_2(t,v) &= c_2(t)\; |u|^{p/2-1}\, u, \quad u \in L^p(\mathcal{O}) \\ \text{avec} &: c_2(.) \in L^\infty(0,T), \quad \text{sup ess}|C_2(t)| < 2 \end{aligned}$$

Soit f un processus adapté à valeurs dans W' défini par :

$$<f(t),v> = \int_{\mathcal{O}} f_o(t,x)\; v(x)\; dx + \int_{\Gamma} g(t,x)\; v(x)\; d\Gamma$$

où : $f_o \in L^{p'}(\mathcal{C})$ p.s.
$g \in L^{p'}(\Sigma)$ p.s.

Soient :

$$u_o \in L^o(\Omega, \mathcal{F}_o, P; H^1(\mathcal{O})),\ u_1 \in L^o(\Omega, \mathcal{F}_o, P; L^2(\mathcal{O})),$$

$W_1(t)$ et $W_2(t)$ deux $\mathcal{F}_t$ mouvements browniens indépendants.

Alors l'équation :

$$(4.9)\quad \begin{cases} du'(t) + Au(t)\,dt + B(u'(t))\,dt + C_1(t,u(t))\,dW_1(t) \\ \qquad + C_2(t,u'(t))\,dW_2(t) = f(t)\,dt \\ u(o) = u_o \\ u'(o) = u_1 \end{cases}$$

a une solution unique :

$u \in C(0,T;H^1(\mathcal{O}))$ p.s., t.q. :

$u' \in L^p(0,T;W^{1,p}(\mathcal{O})) \cap C(0,T;L^2(\mathcal{O}))$ p.s.

$u'\big|_\Sigma \in L^p(\Sigma)$ p.s.

L'équation (4.9) s'interprète formellement :

$$(4.10)\quad \begin{cases} d\left[\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right] - \Delta u(t,x)\,dt - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t\,\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t\,\partial x_i}\right)dt \\ \qquad + \left|\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right|^{p-2} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}\,dt + c_1(t)\,u(t,x)\,dW_1(t) \\ \qquad + c_2(t)\left|\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right|^{p/2-1} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}\,dW_2(t) = f(t,x)\,dt \end{cases}$$

$$(4.11)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial n} + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t\,\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_i\,\partial t} \cos(n,x_i) + \left|\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right|^{p-2} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} \\ \qquad = g(t,x) \text{ p.p. sur } \Sigma \end{cases}$$

$$(4.12)\quad u(o,x) = u_o(x),\ \frac{\partial u(o,x)}{\partial t} = u_1(x), \text{ p.p. dans } \mathcal{O}.$$

BIBLIOGRAPHIE

A. BALAKRISHNAN [1] - Stochastic bilinear partial differential equations. U.S. - Italy Conference on Variable Structure Systems, Oregon, 1974.

A. BENSOUSSAN [1] - Filtrage optimal des systèmes linéaires - Dunod.

A. BENSOUSSAN - R. TEMAM [1] - Equations aux dérivées partielles stochastiques non linéaires. Israël I. of Math. Vol 11, 1972.
[2] - Equations stochastiques du type Navier-Stokes. I. of Funct. Anal. Vol 13 n° 2, 1973.

H. BREZIS-CRANDALL-PAZY [1] - Perturbations of non linear maximal monotone sets in Banach space. Comm. pure and appl. math.

E. CABANA [1] - The vibrating string force by white noise. Z. Wahr 15, 1970.

C. CASTAING [1] - Quelques applications du théorème de Banach Dieudonné à l'Intégration. Université de Montpellier, 1970.

R. CURTAIN [1] - Stochastic differential equations in a Hilbert space. Ph. D. Thesis Brown Univ. 1969 .

D. DAWSON [1] - Stochastic evolution equations. Math. Biosci. 15, 1972.

W. FLEMING [1] - Distributed parameter stochastic systems in population biology. Int. Symp. IRIA, 1974. Lecture Notes in Econ. and Math Syst. 107. Springer.

B. GAVEAU [1] - Intégrale stochastique radonifiante. C.R. Acad. Sci. Paris t. 276 (19.2.73).

I. GIHMAN - A. SKOROHOD [1] - Stochastic differential equations. Springer.

I. GOHBERG - M. KREIN [1] - Introduction à la théorie des opérateurs linéaires non auto-adjoints dans un espace hilbertien. Dunod [Trad. française d'un ouvrage en russe .]

BIBLIOGRAPHIE (suite)

K. ITO [1] - On stochastic differential equations. Mem. Math. Am. Soc. 4, 1951.

G. KÖTHE [1] - Topological Vector Spaces I, Springer.

M. KRASNOSELSKII [1] - Topological methods in the theory of non linear integral equations. Pergamon Press.

H. KUNITA [1] - Stochastic Intégrals based on martingales taking values in Hilbert spaces. - Nagoya Math. J. Vol 38, 1970.

H. KUO [1] - Stochastic integrals in abstract Wiener spaces. Pac. J. of Math. Vol 41 n° 2, 1972.

D. LEPINGLE - J.Y. OUVRARD [1] - Martingales browniennes hilbertiennes. I.R.M.A. Grenoble 1973.

F. LEVIEUX [1] - Rapport Laboria, à paraître.

J.L. LIONS [1] - Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. - Dunod. Gauthier Villars.

[2] - Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles. Presses de l'Université de Montréal.

J.L. LIONS - E. MAGENES [1] - Problèmes aux limites non homogènes et applications. - Dunod.

J.L. LIONS - W. STRAUSS [1] - Some non linear evolution equations. Bull. Soc. Math. F. 93, 1965.

R. MARCUS [1] - Ponabolic Ito equations. - Trans. Am. Math. Soc. Vol 198, 1974.

BIBLIOGRAPHIE (suite)

M. METIVIER [1] - Martingales à valeurs vectorielles. Application à la dérivation des mesures vectorielles. - Ann. Inst. Fourier 1967.

[2] - Intégrales stochastiques par rapport à des processus à valeurs dans un espace de Banach réflexif. Theory of Prob. and Appl. - Tome 19, 1974.

[3] - Intégration with respect to processes of linear functionals. Application to linear stochastic evolution equations. - à paraître.

M. METIVIER - G. PISTONE [1] - Sur une équation d'évolution stochastique. Bul. Soc. Math. Fr., à paraître.

P.A. MEYER [1] - Probabilités et Potentiel. - Herman.

J. NEVEU [1] - Relations entre la théorie des martingales et la théorie ergodique - Ann. Inst. Fourier 15, 1965.

[2] - Intégrales stochastiques et applications. Cours de 3ème cycle. Un. Paris VI, 1971-72.

E. PARDOUX [1] - Intégrales stochastiques hilbertiennes. A paraître.

B.J. PETTIS [1] - On integration in vector spaces. Trans. Ann. Math. Soc. 44, 1938.

B.L. ROZOVSKII - A.M. SHIRYAEV [1] - Reduced form of non-linear filtering equations. Proc. of IFAC Symp., Budapest, 1974.

F. SCALORA [1] - Abstract martingale convergence theorems. Pac. J. Math. 11, 1961.

L. SCHWARTZ [1] - Produits tensoriels topologiques. Séminaire Paris 1954.

W. STRAUSS [1] - On continuity of functions with values in various Banach spaces Pac. J. Math. Vol 19 n° 3, 1966.

BIBLIOGRAPHIE (suite)

M. VIOT [1] - A stochastic partial differential equation arising in population genetics theory. - Brown Univ. report, 1975.

[2] - Thèse, à paraître.

Y. YAVIN [1] - On the instability of an oscillatory distributed parameter system. - Int. J. Syst. Sci. Vol 4, 1973.

M. YOR [1] - Les intégrales stochastiques hilbertiennes. Thèse de 3° cycle, Univ. Paris VI.

K. YOSIDA [1] - Functional analysis, Springer.