Université de Provence **Centre de Mathématiques et d'Informatique**

Master Mathématiques et Applications, 1ère année **Module de Probabilités**

Examen Partiel du 5/11/2009

Documents autorisés : Notes personnelles, 6 pages maxi.

Problème 1 *Intégration* Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, $f : \Omega \to \mathbb{R}_+$ une application mesurable. Pour tout $a > 0$, on définit

$$\Lambda_f(a) = \mu(\{\omega;\ f(\omega) > a)\}).$$

1. Montrer que si f est μ–intégrable, alors quand $n \to \infty$,
$$\int_{\{f>n\}} f d\mu \to 0, \qquad \int_{\{f\leq 1/n\}} f d\mu \to 0.$$
(on pourra poser
$$g_n(\omega) = f(\omega)\mathbf{1}_{\{f>n\}}(\omega), \quad h_n(\omega) = f(\omega)\mathbf{1}_{\{f\leq 1/n\}}(\omega),$$
et montrer que l'on peut appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue).
2. Montrer que pour tout $a > 0$,
$$a\Lambda_f(a) \leq \int_{\{f>a\}} f d\mu,$$
et en déduire que si f est intégrable, $\Lambda_f(a) < \infty$ pour tout $a > 0$, et en outre $a\Lambda_f(a) \to 0$, quand $a \to +\infty$.
3. Montrer que si $0 < a < 1/n$,
$$a\left[\Lambda_f(a) - \Lambda_f(1/n)\right] \leq \int_{\{f\leq 1/n\}} f d\mu.$$
En déduire que si f est intégrable, $a\Lambda_f(a) \to 0$ quand $a \to 0$.
4. Montrer que
$$\int_\Omega f d\mu \leq \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} 2^{k+1}\Lambda_f(2^k).$$
En déduire que si $\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} 2^k\Lambda_f(2^k) < \infty$, alors f est μ–intégrable.
5. Montrer que
$$\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} 2^k\left[\Lambda_f(2^k) - \Lambda_f(2^{k+1})\right] \leq \int_\Omega f d\mu,$$
et que si f est intégrable, grâce aux questions 2 et 3,
$$\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} 2^k\left[\Lambda_f(2^k) - \Lambda_f(2^{k+1})\right] = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} 2^k\Lambda_f(2^k).$$
Pour montrer cette identité, on effectuera d'abord une "intégration par parties discrète" du type
$$\sum_{k=-N}^{k=N} u_k(v_k - v_{k+1}) = \sum_{k=-N}^{k=N} (u_k - u_{k-1})v_k + 2 \text{ termes},$$
Conclure que si f est μ–intégrable, alors $\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} 2^k\Lambda_f(2^k) < \infty$.

Problème 2 *Probabilités* Soit X et Y deux v. a. indépendantes, toutes deux exponentielles de paramètre λ, c'est à dire que pour tout $x > 0$, $\mathbb{P}(X > x) = \mathbb{P}(Y > x) = \exp(-\lambda x)$. On pose $U = \mathrm{Min}(X, Y)$, $V = \mathrm{Max}(X, Y) - \mathrm{Min}(X, Y)$.

1. Calculer $\mathbb{P}(\mathrm{Max}(X, Y) \leq x)$ en fonction de $\mathbb{P}(X \leq x)$ et de $\mathbb{P}(Y \leq x)$.
2. Montrer que $\mathbb{P}(X = Y) = 0$ (on exploitera le fait que cette probablité vaut $\mathbb{P}_{(X,Y)}(\Delta)$, si Δ désigne la diagonale de $\mathbb{R}_+^2$ et $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ la loi de probabilité du vecteur aléatoire (X, Y)).
3. Montrer que si $A = \{X < Y\}$, $B = \{Y < X\}$, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 1/2$.
4. Montrer que pour tout $x, y > 0$, $\mathbb{P}(x < U, y < V) = 2\mathbb{P}(x < X, X + y < Y)$, et calculer cette quantité.
5. En déduire les valeurs de $\mathbb{P}(U > x)$ et de $\mathbb{P}(V > y)$. Montrer que U et V suivent des lois exponentieles de paramètre resp. 2λ et λ, et que ces deux v. a. sont indépendantes.
6. Justifiez l'affirmation suivante : "la loi de la somme de deux v. a. indépendantes, exponentielles de paramètres resp. λ et 2λ, est la même que la loi du sup de deux v. a. indépendantes, toutes deux exponentielles de paramètre λ".

Remarque Le résultat de la dernière question de ce problème se généralise comme suit. Si $\{V_i,\ 1 \leq i \leq k\}$ sont des v. a. indépendantes, V_i de loi exponentielle de paramètre $i\lambda$, alors la loi de $V_1 + \cdots + V_k$ est celle du sup de k v. a. indépendantes et de même loi, la loi exponentielle de paramètre λ.