

Introduction aux Mathématiques Financières

É. Pardoux

20 octobre 2016

Table des matières

1	Les concepts de fondamentaux	7
1.1	Option	7
1.2	Arbitrage	8
1.3	Marchés viables et complets	9
2	Options européennes dans le modèle discret	11
2.1	Le modèle	11
2.2	Stratégie admissible	12
2.3	Martingales	13
2.4	Le marché est viable et complet	14
2.5	Prix du call et du put	17
2.6	La formule de Black–Scholes	17
3	Introduction au calcul stochastique	21
3.1	Le mouvement brownien	21
3.2	Le mouvement brownien comme martingale	23
3.3	Martingales en temps discret	23
3.3.1	Definition	23
3.3.2	Temps d’arrêt	24
3.3.3	Inégalités	26
3.4	Martingales en temps continu	27
3.5	Intégrale stochastique	27
3.5.1	Intégrale de Wiener	28
3.5.2	Intégrale d’Itô	29
3.5.3	Intégrale d’Itô vectorielle	32
3.5.4	Formule d’Itô	32
3.6	Équations différentielles stochastiques	35
3.7	Le théorème de Girsanov	37

3.8	Formule de Feynman–Kac	38
4	La formule de Black–Scholes	41
4.1	La formule de Black–Scholes (2)	41
4.2	L’EDP de Black–Scholes	45
4.3	La formule de Black–Scholes (3)	47
4.4	Généralisation du modèle de Black–Scholes	48
4.5	Propriété de Markov et EDP	49
4.6	Option portant sur plusieurs sous-jacent	52
4.7	Viabilité et Complétude	54
4.8	Remarques sur le calcul effectif	55
4.9	Volatilité implicite	56
5	EDS rétrogrades et modèle de Black–Scholes généralisé	57
6	Options américaines dans le modèle discret	59
6.1	Enveloppe de Snell	61
6.2	Décomposition de Doob	63
6.3	Enveloppe de Snell et chaînes de Markov	65
6.4	Retour aux options américaines	65
6.5	Options américaines et options européennes	66
6.6	Options américaines et modèle markovien	67
7	Options américaines	69
8	Taux d’intérêt et obligations	71
8.1	Courbe de taux en avenir certain	71
8.2	Taux et obligations	72
8.3	Option sur obligation	74
8.4	Un modèle de taux d’intérêt	76
9	Rappels	79
9.1	Vecteurs Aléatoires Gaussiens	79
9.2	Espérance Conditionnelle	84
9.2.1	Par rapport à une σ -algèbre	84
9.2.2	Propriétés de l’espérance conditionnelle	87
9.2.3	Par rapport à une variable aléatoire	90
10	Exercices	91

Introduction

Le but de ce traité est de présenter les modèles mathématiques permettant de résoudre le problème de la fixation des prix (pricing) des options “européennes” et “américaines”, ainsi que de préciser les stratégies de couverture associées. On présentera en particulier la célèbre formule de Black et Scholes, obtenue par leurs auteurs en 1972, et qui a été un des arguments pour l’attribution récente du prix Nobel d’économie à Black et Merton (Scholes étant décédé).

On va présenter en parallèle le modèle discret de Cox, Ross et Rubinstein, et le modèle continu de Black et Scholes.

L’intérêt du modèle discret est de permettre de démontrer les résultats de façon élémentaire; celui du modèle continu est d’aboutir aux formules qui sont celles utilisées couramment par les professionnels de la finance. On introduira les outils du calcul stochastique nécessaires, qui nous permettront de décrire les processus de diffusion, qui sont des processus de Markov en temps continu à valeurs dans \mathbb{R}^d .

Ce traité se termine par une introduction aux modèles de taux d’intérêt et aux obligations.

Nous nous sommes beaucoup inspirés de l’ouvrage de Lamberton, Lapeyre [4], et aussi de [1] et [6] pour la rédaction de ce traité.

Notation Dans tout ce document, nous utiliserons toujours t pour désigner le temps, que celui-ci soit discret ($t = 0, 1, 2, \dots, T$ ou $t \in \mathbb{N}$) ou continu ($0 \leq t \leq T$ ou $t \geq 0$).

Chapitre 1

Les concepts de fondamentaux

Dans tout ce chapitre, on considère un investisseur qui peut répartir ses avoirs entre deux types de placement : un placement à la Caisse d'Épargne, avec un rendement fixe et garanti (taux d'intérêt constant), et un placement risqué en achetant des parts du ou des actif(s) disponible(s) en bourse. Nous considérerons surtout le cas d'un seul actif risqué (sauf au chapitre 4.6). Le prix à l'instant t de cet actif sera noté S_t . On donnera deux modèles probabilistes, en temps discret et en temps continu, pour les fluctuations de $\{S_t\}$. Dans notre modèle, l'agent économique est seulement un investisseur, il ne consomme pas. En outre, il s'agit d'un "petit" investisseur, au sens où ses choix d'investissement n'ont pas d'effet sur l'évolution du prix de l'actif risqué. Par ailleurs, notre investisseur pourra acheter une option sur l'actif risqué.

1.1 Option

Une option est un contrat aux termes duquel son détenteur a le *droit* (et non l'obligation) d'acheter (s'il s'agit d'une option d'achat, *call* en anglais) ou de vendre (s'il s'agit d'une option de vente, *put* en anglais) une quantité fixée d'un actif donné (qui peut être une action, une obligation, une devise, une matière première, . . .) à un prix fixé à l'avance (appelé prix d'exercice), à une date (l'échéance) fixée à l'avance dans le cas d'une option européenne ; une option américaine peut au contraire être exercée à n'importe quelle date entre celle de la signature du contrat et la date d'échéance.

Dans le cas d'une option d'achat (*call* en Anglais) européenne d'échéance

T , sur une action dont le cours à l'instant t est S_t , de prix d'exercice K , le détenteur de l'option gagne à l'instant T $(S_T - K)_+$. Dans le cas d'une option de vente (put en Anglais), le gain du détenteur de l'option à l'instant T est $(K - S_T)_+$. Le gain du détenteur (donc de l'acheteur) de l'option est la perte du vendeur de l'option. La prime est censée compenser cette perte.

La théorie mathématique des options traite deux problèmes :

- a) fixation du prix de l'option (en anglais *pricing*), autrement dit du montant de la prime que l'acheteur de l'option devra régler à son vendeur au moment de la signature du contrat ;
- b) *couverture* : comment le vendeur de l'action va pouvoir gérer la prime qu'il encaisse au moment de la signature du contrat, pour compenser, dans le cas d'une option européenne une perte de $(S_T - K)_+$ (resp. $(K - S_T)_+$).

1.2 Arbitrage

Une des hypothèses que l'on est amené à faire dans l'étude mathématique des options est l'*absence d'opportunité d'arbitrage*, i.e. l'impossibilité de gagner de l'argent sans risque. Cette hypothèse entraîne une relation dite de *parité entre call et put* européens, portant sur le même sous-jacent avec même prix d'exercice K et même échéance T , à savoir l'identité :

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

où C_t est le prix du call, P_t celui du put, S_t le prix sous-jacent, et r le taux d'intérêt constant, qui est le même pour les emprunts et pour les placements d'argent (on a ici une hypothèse essentielle de tous les modèles qui vont suivre, qui n'est pas très réaliste).

Supposons la relation de parité non satisfaite, i.e. supposons qu'à l'instant t on ait par exemple :

$$C_t - P_t > S_t - Ke^{-r(T-t)}.$$

(un raisonnement analogue peut être fait dans le cas $<$). On va en déduire une opportunité d'arbitrage. A l'instant t , on achète une action (ou obligation, ou ...) et un put, et on vend un call. Cette opération dégage un profit net égal à :

$$X_t = C_t - P_t - S_t.$$

Si $X_t > 0$, on place X_t aux taux r jusqu'à la date T ; sinon on emprunte $-X_t$ au même taux jusqu'à la date T .

A la date T , deux cas peuvent se présenter :

1. $S_T > K$: alors le call est exercé, on vend l'action (et on n'exerce pas le put) : on encaisse K , et on solde le prêt (ou l'emprunt), donc on se retrouve avec une richesse égale à :

$$K + e^{r(T-t)}(C_t - P_t - S_t) > 0.$$

2. $S_T \leq K$: on exerce le put, on vend l'action (le call n'est pas exercé), et on solde comme ci-dessus, donc on se retrouve avec la même richesse que ci-dessus.

Dans les deux cas, on réalise à l'instant T un gain > 0 , avec une mise de fonds nulle à l'instant t : c'est un exemple d'arbitrage.

1.3 Marchés viables et complets

Un marché est dit *viable* s'il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage.

Un marché est dit *complet* si tout actif conditionnel à l'instant T (i.e. toute fonction de $\{S_t, 0 \leq t \leq T\}$, en particulier de S_T , en particulier $(S_T - K)_+$ ou $(K - S_T)_+$) est simulable, i.e. s'il existe une stratégie admissible dont la valeur à l'instant T est égale à $(S_T - K)_+$ (resp. $(K - S_T)_+$).

La notion de stratégie admissible sera précisée ci-dessous, dans les deux modèles discret et continu. Il s'agit d'une façon de faire fructifier une certaine richesse initiale, les décisions de modification de la répartition du portefeuille entre la caisse d'épargne et le(s) support(s) risqué(s) se faisant sur la base des informations passées, la stratégie étant autofinçante, c'est à dire sans apport ni retrait d'argent. Le juste prix du call (resp. put) européen sera alors la valeur initiale d'une stratégie admissible de valeur finale $(S_T - K)_+$ (resp. $(K - S_T)_+$). Une telle stratégie réalise la couverture de l'option, on l'appelle stratégie de réplication.

Chapitre 2

Options européennes dans le modèle discret

2.1 Le modèle

On va considérer un modèle en temps discret avec un seul actif risqué, dont le cours à l'instant t sera noté S_t , $t = 0, 1, \dots, T$; et un actif sans risque dont le cours à l'instant t sera noté R_t .

On suppose qu'il existe $r > 0$ tel que

$$R_{t+1} = R_t(1 + r),$$

On supposera pour simplifier que $R_0 = 1$, donc

$$R_t = (1 + r)^t, \quad 0 \leq t \leq T.$$

On suppose que S_0 est une constante, et qu'il existe des v.a. i.i.d. ξ_t , $1 \leq t \leq T$, prenant leurs valeurs dans l'ensemble $\{a, b\}$, avec $0 < a < b$, telles que

$$S_{t+1} = S_t \xi_{t+1}, \quad t = 0, 1, \dots, T - 1.$$

Notre espace de probabilité est $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, avec $\Omega = \{a, b\}^T$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, et \mathbb{P} est tel que sous \mathbb{P} les ξ_t , $1 \leq t \leq T$ sont i.i.d et $\mathbb{P}(\xi_1 = a) > 0$, $\mathbb{P}(\xi_1 = b) > 0$.

Nous définissons le *prix actualisé* à l'instant t de l'actif risqué comme la quantité

$$\tilde{S}_t = \frac{S_t}{R_t}, \quad t = 0, 1, \dots, T.$$

2.2 Stratégie admissible

Une *stratégie de gestion* est une suite aléatoire $\{(X_t, Y_t), t = 0, 1, \dots, T\}$ à valeurs dans \mathbb{R}^2 , telle que si

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{-1} &= \mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\} \\ \mathcal{F}_t &= \sigma\{\xi_1, \dots, \xi_t\}, \quad t \geq 1,\end{aligned}$$

(X_t, Y_t) est \mathcal{F}_{t-1} -mesurable, pour tout $0 \leq t \leq T$. On dit que la suite $\{(X_t, Y_t)\}$ est *prévisible*.

La valeur du *portefeuille* à l'instant t est donné par :

$$V_t(X, Y) = X_t R_t + Y_t S_t,$$

et sa *valeur actualisée* est la quantité

$$\tilde{V}_t(X, Y) = \frac{V_t(X, Y)}{R_t} = X_t + Y_t \tilde{S}_t.$$

La stratégie est dite *autofinancée* si

$$X_t R_t + Y_t S_t = X_{t+1} R_t + Y_{t+1} S_t$$

ou de façon équivalente

$$V_{t+1}(X, Y) - V_t(X, Y) = X_{t+1}(R_{t+1} - R_t) + Y_{t+1}(S_{t+1} - S_t)$$

ou encore

$$X_t + Y_t \tilde{S}_t = X_{t+1} + Y_{t+1} \tilde{S}_t.$$

i.e.

$$\tilde{V}_{t+1}(X, Y) - \tilde{V}_t(X, Y) = Y_{t+1}(\tilde{S}_{t+1} - \tilde{S}_t).$$

Autrement dit, avec les notations $\Delta S_t = S_t - S_{t-1}$, $\Delta \tilde{S}_t = \tilde{S}_t - \tilde{S}_{t-1}$, on a la

Proposition 2.2.1. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) La stratégie $\{(X_t, Y_t); 0 \leq t \leq T\}$ est autofinancée.
- (ii) Pour tout $1 \leq t \leq T$,

$$V_t(X, Y) = V_0(X, Y) + \sum_{s=1}^t (X_s \Delta R_s + Y_s \Delta S_s).$$

(iii) Pour tout $1 \leq t \leq T$,

$$\tilde{V}_t(X, Y) = \tilde{V}_0(X, Y) + \sum_{s=1}^t Y_s \Delta \tilde{S}_s$$

On a en outre la

Proposition 2.2.2. *Pour tout processus prévisible $\{Y_t, 0 \leq t \leq T\}$ et toute valeur initiale V_0 (déterministe !) du portefeuille, il existe un unique processus prévisible $\{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ tel que la stratégie $\{(X_t, Y_t), 0 \leq t \leq T\}$ soit autofinancée, et corresponde à un portefeuille de valeur initiale V_0 .*

PREUVE: La condition d'autofinancement impose que, pour tout $0 \leq t \leq T$,

$$\begin{aligned} \tilde{V}_t(X, Y) &= X_t + Y_t \tilde{S}_t \\ &= V_0 + \sum_{s=1}^t Y_s \Delta \tilde{S}_s, \end{aligned}$$

ce qui définit X_t . La prévisibilité est facile à vérifier.

Définition 2.2.3. *Une stratégie (X, Y) est dite admissible si elle est autofinancée et vérifie $V_t(X, Y) \geq 0, \forall 0 \leq t \leq T$.*

Définition 2.2.4. *Une stratégie d'arbitrage (X, Y) est une stratégie admissible telle que $V_0(X, Y) = 0$ et $V_T(X, Y) \neq 0$, ou équivalentement $V_0(X, Y) = 0$ et $\tilde{V}_T(X, Y) \neq 0$.*

2.3 Martingales

Notre espace de probabilité, dans ce premier chapitre, étant fini, toutes les variables aléatoires sont bornées. Donc on omet l'hypothèse d'intégrabilité dans la définition des martingales.

Définition 2.3.1. *Une suite $\{M_t, 0 \leq t \leq T\}$ est adaptée si M_t est \mathcal{F}_t mesurable, $0 \leq t \leq T$; est une martingale si elle est adaptée et pour $1 \leq t \leq T$,*

$$\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_{t-1}] = M_{t-1}.$$

Proposition 2.3.2. Soit $\{M_t, 0 \leq t \leq T\}$ une martingale, et $\{Y_t, 0 \leq t \leq T\}$ une suite prévisible. Alors la suite $\{M(Y)_t, 0 \leq t \leq T\}$ définie par :

$$\begin{aligned} M(Y)_0 &= Y_0 M_0 \\ M(Y)_t &= Y_0 M_0 + \sum_{1 \leq s \leq t} Y_s \Delta M_s, \quad t \geq 1 \end{aligned}$$

est une martingale.

PREUVE: Il suffit de remarquer que

$$\mathbb{E}[Y_t \Delta M_t | \mathcal{F}_{t-1}] = Y_t \mathbb{E}[\Delta M_t | \mathcal{F}_{t-1}] = 0,$$

où l'on a utilisé successivement le caractère prévisible de Y , et la propriété de martingale de M .

Corollaire 2.3.3. Théorème d'arrêt Soit $\{M_t, 0 \leq t \leq T\}$ une martingale, et τ un temps d'arrêt borné par T , i. e. une v. a. à valeurs dans $\{0, 1, 2, \dots, T\}$ telle que pour tout $0 \leq t \leq T$, $\{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$. Alors

$$\mathbb{E}M_\tau = \mathbb{E}M_0.$$

PREUVE: Il suffit de remarquer que $M_\tau = M(Y)_T$, si Y est défini par

$$Y_t = \mathbf{1}_{\{\tau > t-1\}}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

et que pour toute martingale, $\mathbb{E}M_t$ est une constante indépendante de t .

2.4 Le marché est viable et complet

Théorème 2.4.1. Le marché défini ci-dessus est viable (i.e. il n'existe pas de stratégie d'arbitrage) ssi $a < 1 + r < b$.

PREUVE: Il n'est pas difficile de montrer que si $1 + r \notin]a, b[$, il existe une stratégie d'arbitrage (exercice).

Réciproquement, si $a < 1 + r < b$, la probabilité \mathbb{P}^* sur (Ω, \mathcal{F}) telle que sous \mathbb{P}^* les ξ_t sont i.i.d tels que

$$\mathbb{E}^*(\xi_t) = 1 + r.$$

(appelée *probabilité risque neutre*) est équivalente à \mathbb{P} (car $\mathbb{P}^*(\xi_1 = a) > 0$ et $\mathbb{P}^*(\xi_1 = b) > 0$). Mais, sous \mathbb{P}^* , $\{\tilde{S}_t\}$ est une martingale, donc d'après la proposition 2.3.2, $\tilde{V}(X, Y)$ est une martingale pour toute stratégie (X, Y) . Donc si $V_0(X, Y) = 0$, $\mathbb{E}^*\tilde{V}_T(X, Y) = 0$. La condition d'admissibilité impose $\tilde{V}_T(X, Y) \geq 0$ p.s., donc $\tilde{V}_T(X, Y) \equiv 0$. \square

Pour alléger les notations, on posera $c = 1 + r$. Il est facile de vérifier que l'on a :

$$\mathbb{P}^*(\xi_1 = a) = \frac{b - c}{b - a}, \quad \mathbb{P}^*(\xi_1 = b) = \frac{c - a}{b - a}$$

Théorème 2.4.2. *Si $a < 1 + r < b$, le marché défini ci-dessus est complet, i.e. pour toute v.a. \mathcal{F}_T mesurable $H \geq 0$, il existe une stratégie admissible (X, Y) telle que $V_T(X, Y) = H$. En outre pour tout $0 \leq t < T$,*

$$V_t(X, Y) = \frac{R_t}{R_T} \mathbb{E}^*(H | \mathcal{F}_t).$$

PREUVE: S'il existe une stratégie admissible telle que $V_T(X, Y) = H$, alors d'après la proposition 2.2.1 (iii), pour tout $0 \leq t < T$,

$$\frac{H}{R_T} = \tilde{V}_t(X, Y) + \sum_{s=t+1}^T Y_s \Delta \tilde{S}_s.$$

Donc, sous \mathbb{P}^* , $\{\tilde{V}_t(X, Y); 0 \leq t \leq T\}$ est une martingale, d'où :

$$\tilde{V}_t(X, Y) = \mathbb{E}^* \left(\frac{H}{R_T} | \mathcal{F}_t \right),$$

soit encore

$$V_t(X, Y) = \frac{R_t}{R_T} \mathbb{E}^*(H | \mathcal{F}_t).$$

Notons en particulier que $H \geq 0$ entraîne alors $V_t(X, Y) \geq 0$, donc s'il existe une stratégie autofinancée qui produit la suite $\{V_t(X, Y); 0 \leq t \leq T\}$ ci-dessus, elle est admissible. Au vu de la proposition 2.2.2, il reste à montrer qu'il existe une suite prévisible $\{Y_t; 0 \leq t \leq T\}$ telle que

$$\sum_{s=1}^T Y_s \Delta \tilde{S}_s = \frac{H}{R_T} - \mathbb{E}^* \left(\frac{H}{R_T} \right).$$

La suite $\{Y_t; 1 \leq t \leq T\}$ est caractérisée par :

$$Y_t \tilde{S}_{t-1} \left(\frac{\xi_t}{c} - 1 \right) = \mathbb{E}^*(\tilde{H} | \mathcal{F}_t) - \mathbb{E}^*(\tilde{H} | \mathcal{F}_{t-1}),$$

où $\tilde{H} := H/R_T$, soit

$$Y_t = \frac{c(\mathbb{E}^*(\tilde{H} | \mathcal{F}_t) - \mathbb{E}^*(\tilde{H} | \mathcal{F}_{t-1}))}{\tilde{S}_{t-1}(\xi_t - c)}.$$

Il reste donc à montrer que Y_t est \mathcal{F}_{t-1} -mesurable (i.e. ne dépend pas de $\xi_t!$).

Notons $\xi^{t-1} := (\xi_1, \dots, \xi_{t-1})$. Alors la v.a. $\frac{\mathbb{E}^*(\tilde{H} | \mathcal{F}_t)}{\tilde{S}_{t-1}}$ est une fonction du couple (ξ^{t-1}, ξ_t) .

Posons

$$g_t(\xi^{t-1}, \xi_t) := c \frac{\mathbb{E}^*(\tilde{H} | \mathcal{F}_t)}{\tilde{S}_{t-1}}.$$

On a

$$Y_t = \frac{g_t(\xi^{t-1}, \xi_t) - \mathbb{E}^*(g_t(\xi^{t-1}, \xi_t) | \mathcal{F}_{t-1})}{\xi_t - c}.$$

Notons que

$$\mathbb{E}^*(g_t(\xi^{t-1}, \xi_t) | \mathcal{F}_{t-1}) = g_t(\xi^{t-1}, a) \frac{b-c}{b-a} + g_t(\xi^{t-1}, b) \frac{c-a}{b-a},$$

donc

$$Y_t = \frac{(g_t(\xi^{t-1}, \xi_t) - g_t(\xi^{t-1}, a)) \frac{b-c}{b-a} + (g_t(\xi^{t-1}, \xi_t) - g_t(\xi^{t-1}, b)) \frac{c-a}{b-a}}{\xi_t - c}.$$

Il reste à remarquer que dans les deux cas $\xi_t = a$ et $\xi_t = b$, on a :

$$Y_t = \frac{g_t(\xi^{t-1}, b) - g_t(\xi^{t-1}, a)}{b-a}.$$

Remarque 2.4.3. La dernière formule donne la fraction de la richesse à investir dans l'actif risqué, à chaque instant t , pour réaliser une stratégie de couverture. Notons la forme particulière du membre de droite, qui s'apparente à une "dérivée approchée". Dans le cas du modèle continu du chapitre suivant, on aura une dérivée, d'où la terminologie "produit dérivé" utilisée pour désigner les options.

2.5 Prix du call et du put

Nous allons maintenant préciser la formule pour $V_t(X, Y)$ dans les deux cas du call et du put. Notons

$$p = \frac{b - c}{b - a} = \mathbb{P}^*(\xi_1 = a),$$

donc

$$1 - p = \mathbb{P}^*(\xi_1 = b).$$

Dans le cas du call européen,

$$V_t(X, Y) = c^{-r(T-t)} \mathbb{E}^* \left[(S_t \prod_{s=t+1}^T \xi_s - K)_+ | \mathcal{F}_t \right].$$

Mais pour tout $0 \leq k \leq T - t$,

$$\mathbb{P}^* \left(\prod_{s=t+1}^T \xi_s = a^k b^{T-t-k} \right) = \frac{(T-t)!}{k!(T-t-k)!} p^k (1-p)^{T-t-k}.$$

Donc

$$V_t(X, Y) = c^{-r(T-t)} \sum_{k=0}^{T-t} \frac{(T-t)!}{k!(T-t-k)!} p^k (1-p)^{T-t-k} (S_t k - K)_+,$$

et dans le cas du put européen,

$$V_t(X, Y) = c^{-r(T-t)} \sum_{k=0}^{T-t} \frac{(T-t)!}{k!(T-t-k)!} p^{k(1-p)^{T-t-k}} (K - S_t k)_+.$$

2.6 La formule de Black–Scholes

Nous allons maintenant établir les formules du modèle continu du chapitre suivante (à savoir la formule de Black–Scholes) par passage à la limite sur le modèle discret, avant de la réobtenir directement à partir du modèle continu au chapitre suivant.

On suppose maintenant que, T étant un réel positif arbitraire, t prend les valeurs

$$0, \frac{1}{N}, \dots, \frac{[NT]}{N},$$

et que

$$S_t = S_0 \prod_{k=1}^{[Nt]} \xi_k^N$$

$$\tilde{S}_t = S_0 \exp \left(\sum_{k=1}^{[Nt]} \eta_k^N \right),$$

avec

$$\eta_k^N = \log \xi_k^N - \frac{r}{N}.$$

On suppose que les η_k^N prennent leurs valeurs dans l'ensemble $\{-\frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\}$. Cela signifie, par rapport aux notations ci-dessus, que (les indices supérieurs N ne sont pas des exposants!) :

$$c^N = \exp(r/N), \quad a^N = \exp(r/N - \sigma/\sqrt{N}), \quad b^N = \exp(r/N + \sigma/\sqrt{N}).$$

La formule pour le prix du call (resp. du put) devient donc, si $Z_t^N := \sum_{k=1}^{[Nt]} \eta_k^N$,

$$\mathbb{E}^* \left[(S_0 \exp(Z_T^N) - K e^{-rT})_+ \right]$$

(resp.

$$\mathbb{E}^* \left[(K e^{-rT} - S_0 \exp(Z_T^N))_+ \right]).$$

Il reste à trouver la loi limite de Z_T^N quand $N \rightarrow \infty$ sous \mathbb{P}^* . On a le

Théorème 2.6.1. *Si $Z_t^N := \sum_{k=1}^{[Nt]} \eta_k^N$ et pour chaque N les $\{\eta_k^N, k \geq 0\}$ sont i.i.d. à valeurs dans $\{-\frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\}$, avec $\mathbb{E}\eta_k^N = \mu_N$, et $N\mu_N \rightarrow \mu$ quand $N \rightarrow \infty$, alors sous \mathbb{P} , quand $N \rightarrow \infty$,*

$$Z_t^N \Rightarrow \mu t + \sigma B_t, \quad t \geq 0,$$

où $\{B_t, t \geq 0\}$ est un mouvement brownien, cf. la définition ?? ci-dessous.

PREUVE: On sait (cf. par exemple [2] page 180) que si une v.a.r. X admet un moment d'ordre 3, pour tout $r \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}(\exp(irX)) = 1 + ir\mathbb{E}(X) - \frac{r^2}{2}\mathbb{E}(X^2) - i\frac{r^3}{6}(\mathbb{E}(X^3) + \delta(X, r)),$$

avec $|\delta(X, r)| \leq 3\mathbb{E}(|X|^3)$. Donc

$$\mathbb{E}(\exp(ir\eta_k^N)) = 1 + ir\mu_N - \frac{r^2\sigma^2}{2N} + O(N^{-3/2}),$$

donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\exp(irZ_t^N)) &= \left(1 + ir\mu_N - \frac{r^2\sigma^2}{2N} + O(N^{-3/2})\right)^{[Nt]} \\ &\rightarrow \exp\left(ir\mu t - \frac{r^2\sigma^2 t}{2}\right). \end{aligned}$$

quand $N \rightarrow \infty$. On reconnaît la fonction caractéristique au point r de la loi normale $N(\mu t, \sigma^2 t)$, qui est la loi de $\mu t + \sigma B_t$, puisque la loi de B_t est la loi $N(0, t)$. On démontre de même que pour tout $0 < s < t$, $Z_t^N - Z_s^N \Rightarrow \mu(t-s) + \sigma(B_t - B_s)$. Puisque Z_t^N est à accroissements indépendants pour tout N , il en est de même de la limite. Donc les loi fini-dimensionnelle de Z_t^N convergent vers celles de $\mu t + \sigma B_t$. On peut en fait montre une convergence fonctionnelle un peu plus forte. Mais la convergence à l'instant T suffit pour la suite. \square

Pour pouvoir appliquer ce théorème, il nous reste à calculer l'espérance de η_k^N sous \mathbb{P}^* . Cette dernière probabilité est caractérisée par l'identité

$$\mathbb{E}^* \exp(\eta_k^N) = 1,$$

soit, avec $p_a := \mathbb{P}^*(\eta_k^N = -\frac{\sigma}{\sqrt{N}})$,

$$\exp\left(-\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right)p_a + \exp\left(\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right)p_b = 1,$$

d'où

$$p_a = \frac{e^{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} - 1}{e^{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} - e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{N}}}}, \quad p_b = \frac{1 - e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{N}}}}{e^{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} - e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{N}}}},$$

et

$$\mathbb{E}^* \eta_k^N = -\frac{\sigma^2}{2N} + o\left(\frac{1}{N}\right).$$

Il résulte alors du théorème 2.6.1 que sous \mathbb{P}^* ,

$$Z_t^N \Rightarrow -\frac{\sigma^2}{2}t + \sigma B_t.$$

On en déduit la formule limite pour le prix du call :

$$C_0 = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(S_0 e^{-\frac{\sigma^2 T}{2} + \sigma \sqrt{T} y} - K e^{-rT} \right)_+ e^{-y^2/2} dy,$$

et celle du put

$$P_0 = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(K e^{-rT} - S_0 e^{-\frac{\sigma^2 T}{2} + \sigma \sqrt{T} y} \right)_+ e^{-y^2/2} dy.$$

Ces formules se réécrivent comme suit en fonction de la fonction de répartition F de la loi normale centrée réduite.

$$\begin{aligned} C_0 &= S_0 F(d_1) - K e^{-rT} F(d_2), \\ P_0 &= K e^{-rT} F(-d_2) - S_0 F(-d_1), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{1}{\sigma \sqrt{T}} \log \left(\frac{S_0}{K} \right) + \frac{r \sqrt{T}}{\sigma} + \frac{\sigma \sqrt{T}}{2}, \\ d_2 &= \frac{1}{\sigma \sqrt{T}} \log \left(\frac{S_0}{K} \right) + \frac{r \sqrt{T}}{\sigma} - \frac{\sigma \sqrt{T}}{2}. \end{aligned}$$

Notons que l'on retrouve bien la parité call-put, à condition de remarquer que $F(d_i) + F(-d_i) = 1$, $i = 1, 2$.

Chapitre 3

Introduction au calcul stochastique

On veut considérer plus loin un modèle où le cours du sous-jacent S_t varie en temps continu, $t \in \mathbb{R}_+$, et le cours S_t prend ses valeurs lui aussi dans \mathbb{R}_+ .

Toutes les v.a. et les processus qui suivent seront définis sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

3.1 Le mouvement brownien

On pose la

Définition 3.1.1. *Un processus stochastique à valeurs dans \mathbb{R} $\{B_t, t \geq 0\}$ est appelé un mouvement brownien (standard) si ses trajectoires sont p.s. continues, $B_0 = 0$, et*

(i) *pour tout $n \geq 1$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$, $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ est une suite de v.a.r. indépendantes ;*

(ii) *pour tout $0 \leq s < t$, $B_t - B_s \sim N(0, t - s)$.*

On va donner une autre définition équivalente. Indiquons qu'un processus $\{X_t, t \geq 0\}$ est un processus gaussien ssi pour tout $n \geq 1$, $0 \leq t_1, \dots, t_n$, le vecteur aléatoire $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ est un vecteur aléatoire gaussien.

Définition 3.1.2. *Un mouvement brownien (standard) est un processus gaussien centré $\{B_t, t \geq 0\}$ à trajectoires continues tel que*

$$\mathbb{E}[B_t B_s] = \inf(t, s), \quad \text{pour tout } t, s \geq 0.$$

Si B_t est un mouvement brownien standard, alors

$$X_t = x + \mu t + \sigma B_t,$$

où μ est la dérive, σ le coefficient de diffusion, est un mouvement brownien non standard, et

$$Y_t = e^{X_t}$$

est appelé mouvement brownien géométrique.

Proposition 3.1.3. *Variation quadratique.* Soit $t > 0$, $0 = t_0^n < t_1^n < \dots < t_n^n = t$ une suite indexée par $n \geq 1$ de subdivisions de l'intervalle $[0, t]$, telle que $\sup_{k \leq n} (t_k^n - t_{k-1}^n) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. Alors

$$\sum_{i=1}^n (B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n})^2 \rightarrow t$$

en moyenne quadratique, quand $n \rightarrow \infty$.

PREUVE: On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \sum_{k=1}^n (B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n})^2 &= t, \quad \text{et} \\ \text{Var} \left[\sum_{k=1}^n (B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n})^2 \right] &= \sum_{k=1}^n \text{Var} \left[(B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n})^2 \right] \\ &= 2 \sum_{k=1}^n (t_k^n - t_{k-1}^n)^2 \\ &\leq 2t \sup_{k \leq n} (t_k^n - t_{k-1}^n) \\ &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

quand $n \rightarrow \infty$. □

Remarque 3.1.4. (i) Si $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$, $\sum_{k=1}^n (\varphi(t_k^n) - \varphi(t_{k-1}^n))^2 \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

$$(ii) \mathbb{E} \sum_{k=1}^n |B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n}| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (t_k^n - t_{k-1}^n)^{1/2} \rightarrow \infty \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

3.2 Le mouvement brownien comme martingale

On se donne maintenant un “espace de probabilité filtré”, c’est à dire un quadruplet $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$, où $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est une filtration, c’est à dire une suite croissante de sous-sigma algèbres de \mathcal{F} .

Définition 3.2.1. On appelle \mathcal{F}_t -mouvement brownien un processus à trajectoires continues $\{B_t, t \geq 0\}$ tel que $B_0 = 0$, et

- (i) pour tout $t \geq 0$, B_t est \mathcal{F}_t -mesurable ;
- (ii) pour tout $0 \leq s \leq t$, $B_t - B_s$ est indépendante de \mathcal{F}_s , de loi $N(0, t - s)$.

Exercice 3.2.2. (i) Si $\{B_t, t \geq 0\}$ est un \mathcal{F}_t -mouvement brownien, alors c’est un mouvement brownien au sens de la définition 3.1.1 ou 3.1.2.

(ii) Si $\{B_t, t \geq 0\}$ est un mouvement brownien au sens de la définition 3.1.1 ou 3.1.2, et $\mathcal{F}_t = \sigma\{B_s, 0 \leq s \leq t\}$, alors $\{B_t, t \geq 0\}$ est un \mathcal{F}_t -mouvement brownien.

Définition 3.2.3. Un processus $\{M_t, t \geq 0\}$ est une \mathcal{F}_t -martingales si

- (i) pour tout $t \geq 0$, M_t est \mathcal{F}_t -mesurable et intégrable (i.e. $\mathbb{E}|M_t| < \infty$) ;
- (ii) pour tout $0 \leq s < t$, $\mathbb{E}(M_t | \mathcal{F}_s) = M_s$.

On vérifie aisément que si $\{B_t, t \geq 0\}$ est un \mathcal{F}_t -mouvement brownien, alors B_t , $B_t^2 - t$, $\exp(\lambda B_t - \lambda^2 t / 2)$ (λ réel quelconque) sont des \mathcal{F}_t -martingales.

3.3 Martingales en temps discret

3.3.1 Définition

On se donne dans cette section un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d’une filtration $\{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$, i. e. une suite croissante de sous-tribus de \mathcal{F} . Autrement dit chaque \mathcal{F}_n est une tribu, et pour tout $n \geq 0$, $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1} \subset \mathcal{F}$.

Définition 3.3.1. Une suite $\{X_n, n \geq 0\}$ de v. a. r. est une martingale si

1. Pour tout $n \geq 0$, X_n est \mathcal{F}_n -mesurable et intégrable,
2. Pour tout $n \geq 0$, $\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n$ p. s.

Une sousmartingale est une suite qui vérifie la 1ère condition, et $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \geq X_n$. Une surmartingale est une suite qui vérifie la première condition et $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \leq X_n$.

Remarque 3.3.2. On devrait dire dans la définition (\mathcal{F}_n) -martingale. Notons que si $\{X_n\}$ est une (\mathcal{F}_n) -martingale, c'est à fortiori une (\mathcal{G}_n) -martingale, avec

$$\mathcal{G}_n = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n), \quad n \geq 0.$$

Il résulte de l'inégalité de Jensen pour l'espérance conditionnelle que

Proposition 3.3.3. Si $\{X_n, n \geq 0\}$ est une martingale, $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe telle que $\varphi(X_n)$ soit intégrable pour tout $n \geq 0$, alors $\{\varphi(X_n), n \geq 0\}$ est une sousmartingale. La même conclusion est encore vraie lorsque l'on suppose seulement que $\{X_n, n \geq 0\}$ est une sousmartingale, à condition d'ajouter l'hypothèse que la fonction φ est croissante.

3.3.2 Temps d'arrêt

Définition 3.3.4. On appelle temps d'arrêt une v. a. τ à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ qui vérifie $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$, pour tout $n \geq 0$.

Une v. a. constante $\tau \equiv n$ est un temps d'arrêt. Si $\{X_n, n \geq 0\}$ est une suite adaptée à la filtration $\{\mathcal{F}_n\}$, i. e. telle que X_n est \mathcal{F}_n -mesurable pour tout $n \geq 0$, et si $A \in \mathcal{B}$, alors

$$\tau = \begin{cases} \inf\{n, X_n \in A\}, & \text{si un tel } n \text{ existe,} \\ +\infty, & \text{sinon,} \end{cases}$$

est un temps d'arrêt, puisque alors

$$\{\tau = n\} = \{X_0 \notin A, X_1 \notin A, \dots, X_{n-1} \notin A, X_n \in A\}.$$

Notons qu'avec la convention que l'inf d'un ensemble vide vaut $+\infty$, ce temps d'arrêt se définit plus simplement par

$$\tau = \inf\{n, X_n \in A\}.$$

Si τ est un temps d'arrêt, on définit la tribu

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}, A \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n, \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Si τ_1 et τ_2 sont deux temps d'arrêt, alors $\inf(\tau_1, \tau_2)$ est encore un temps d'arrêt. En outre, si $\tau_1 \leq \tau_2$ p. s., alors $\mathcal{F}_{\tau_1} \subset \mathcal{F}_{\tau_2}$ (exercice).

On a le théorème d'arrêt :

Théorème 3.3.5. *Si $\{X_n, n \geq 0\}$ est une martingale (resp. une sousmartingale), et τ_1 et τ_2 sont deux temps d'arrêt tels que $\tau_1 \leq \tau_2 \leq N$ p. s., alors X_{τ_i} est \mathcal{F}_{τ_i} mesurable et intégrable, $i = 1, 2$ et en outre*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{\tau_2} | \mathcal{F}_{\tau_1}) &= X_{\tau_1} \\ (\text{resp. } \mathbb{E}(X_{\tau_2} | \mathcal{F}_{\tau_1}) &\geq X_{\tau_1}). \end{aligned}$$

PREUVE: Pour tout $A \in \mathcal{B}$, $n \geq 0$,

$$\{X_{\tau_i} \in A\} \cap \{\tau_i = n\} = \{X_n \in A\} \cap \{\tau_i = n\} \in \mathcal{F}_n,$$

et en outre

$$|X_{\tau_i}| \leq \sum_{k=1}^N |X_k|,$$

donc la première partie de l'énoncé est établie.

Soit $A \in \mathcal{F}_{\tau_1}$. Alors

$$A \cap \{\tau_1 < k \leq \tau_2\} = A \cap \{\tau_1 \leq k-1\} \cap \{\tau_2 \leq k-1\}^c \in \mathcal{F}_{k-1}.$$

En effet, d'une part

$$\begin{aligned} A \cap \{\tau_1 \leq k-1\} &= \bigcup_{j=1}^{k-1} A \cap \{\tau_1 = j\} \in \mathcal{F}_{k-1} \\ \text{et aussi } \{\tau_2 \leq k-1\}^c &\in \mathcal{F}_{k-1}. \end{aligned}$$

Posons $\Delta_k = X_k - X_{k-1}$. On a

$$\begin{aligned} \int_A (X_{\tau_2} - X_{\tau_1}) d\mathbb{P} &= \int_A \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{\tau_1 < k \leq \tau_2\}} \Delta_k d\mathbb{P} \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{A \cap \{\tau_1 < k \leq \tau_2\}} \Delta_k d\mathbb{P} \\ &= 0 \end{aligned}$$

ou bien ≥ 0 , suivant que $\{X_n, n \geq 0\}$ est une martingale ou une sousmartingale. \square

3.3.3 Inégalités

Soit $\{M_k, 0 \leq k \leq n\}$ une martingale. On pose pour $1 \leq k \leq n$ $S_k = \max_{0 \leq i \leq k} |M_i|$. On a une première inégalité de Doob, où on utilise la notation classique $\mathbb{E}(X; A) = \mathbb{E}(X\mathbf{1}_A)$.

Lemme 3.3.6. *Pour tout $\alpha > 0$,*

$$\alpha \mathbb{P}(S_n \geq \alpha) \leq \mathbb{E}(|M_n|; S_n \geq \alpha).$$

PREUVE: On pose $\tau = \inf\{0 \leq k \leq n; |M_k| \geq \alpha\}$. On a

$$\begin{aligned} \alpha \mathbb{P}(S_n \geq \alpha) &\leq \int_{\{S_n \geq \alpha\}} |M_\tau| d\mathbb{P} \\ &\leq \int_{\{S_n \geq \alpha\}} |M_n| d\mathbb{P} \\ &= \mathbb{E}(|M_n|; S_n \geq \alpha), \end{aligned}$$

où on a utilisé à la seconde inégalité le fait que $|M_k|$ est une sous-martingale, que $\{S_n \geq \alpha\} \in \mathcal{F}_\tau$, et le Théorème d'arrêt 3.3.5. \square

Proposition 3.3.7. *On a*

$$\mathbb{E}[S_n^2] \leq 4\mathbb{E}[M_n^2].$$

PREUVE: On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_n^2] &= \int_0^\infty \mathbb{P}(S_n^2 > \alpha) d\alpha \\ &= \int_0^\infty \mathbb{P}(S_n \geq \lambda) 2\lambda d\lambda \\ &\leq 2 \int_0^\infty \mathbb{E}(|M_n|; S_n \geq \lambda) d\lambda \\ &= 2\mathbb{E}\left(|M_n| \int_0^{S_n} d\lambda\right) \\ &= 2\mathbb{E}(|M_n| \times S_n) \\ &\leq 2\sqrt{\mathbb{E}(M_n^2)}\sqrt{\mathbb{E}S_n^2}, \end{aligned}$$

où on a utilisé une formule classique pour l'espérance d'une v.a.r. positive, le changement de variable $\alpha = \lambda^2$, le Lemme 3.3.6, le théorème de Fubini, une identité évidente et l'inégalité de Cauchy–Schwartz. Le résultat se déduit de la dernière inégalité, en divisant les deux membres par $\sqrt{\mathbb{E}S_n^2}$. \square

3.4 Martingales en temps continu

On va se limiter aux martingales à trajectoires continues, car c'est le seul cas dont nous aurons besoin.

On a la

Proposition 3.4.1. *Soit $\{M_t, t \geq 0\}$ une martingale à trajectoires continues. Alors*

$$\mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq s \leq t} M_s^2 \right) \leq 4\mathbb{E} (M_t^2).$$

PREUVE: Soit $n \geq 1$ et $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$. Posons $N_k = M_{t_k}$. Il est facile de se convaincre que N_k est une martingale en temps discret. Donc d'après la Proposition 3.3.7,

$$\mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq k \leq n} M_{t_k}^2 \right) \leq 4\mathbb{E} (M_t^2).$$

Si maintenant on se donne une suite de subdivisions $\{t_k^n, 0 \leq k \leq n\}$ dont le pas tend vers 0, il résulte de la continuité des trajectoires de M_t que $\sup_{0 \leq k \leq n} M_{t_k^n}^2 \uparrow \sup_{0 \leq s \leq t} M_s^2$, d'où le résultat par le Théorème de convergence monotone. \square

3.5 Intégrale stochastique

Dans toute la suite on suppose donné un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$, et un \mathcal{F}_t -mouvement brownien $\{B_t, t \geq 0\}$.

3.5.1 Intégrale de Wiener

Commençons par considérer le cas d'une fonction $\{f(t), 0 \leq t \leq T\}$ déterministe, telle que

$$\int_0^T f^2(s)ds < \infty.$$

Alors on va définir l'intégrale de Wiener

$$\int_0^t f(s)dB_s, \quad \text{pour } 0 \leq t \leq T.$$

Supposons tout d'abord que f est en escalier, c'est à dire

$$f(s) = \sum_{k=1}^n f_k \mathbf{1}_{]t_k, t_{k+1}]}$$

avec $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq T$. Alors une définition naturelle de l'intégrale de Wiener est

$$\int_0^t f(s)dB_s = \sum_{k=1}^n f_k (B_{t \wedge t_{k+1}} - B_{t \wedge t_k})$$

On déduit aisément des propriétés du mouvement brownien que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \int_0^t f(s)dB_s &= 0 \\ \text{si } 0 \leq s \leq t, \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s} \int_0^t f(r)dB_r &= \int_0^s f(r)dB_r \\ \mathbb{E} \left[\left(\int_0^t f(s)dB_s \right)^2 \right] &= \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^n f_k (B_{t \wedge t_{k+1}} - B_{t \wedge t_k}) \right]^2 \\ &= \sum_{k=1}^n f_k^2 (t \wedge t_{k+1} - t \wedge t_k) \\ &= \int_0^t f^2(s)ds. \end{aligned}$$

La formule d'isométrie

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t f(s)dB_s \right)^2 \right] = \int_0^t f^2(s)ds$$

permet d'étendre la définition de l'intégrale de Wiener, des fonctions en escalier à toutes les fonctions de carré intégrable. On vérifie aisément que le processus

$$\left\{ \int_0^t f(s)dB_s, 0 \leq t \leq T \right\}$$

est une martingale gaussienne, à accroissements indépendants, qui vérifie

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t f(s)dB_s \right)^2 \right] = \int_0^t f^2(s)ds, 0 \leq t \leq T.$$

Il résulte de la propriété de martingale et de la Proposition 3.4.1 ci-dessus que si $f_n \rightarrow f$ dans $L^2([0, T])$ quand $n \rightarrow \infty$, f_n est en escalier, alors $\int_0^t f_n(s)dB_s \rightarrow \int_0^t f(s)dB_s$ en moyenne quadratique, uniformément en $t \in [0, T]$. Mais pour tout $n \geq 1$, il est clair que $t \rightarrow \int_0^t f_n(s)dB_s$ est p.s. continue. Donc il en est de même de l'application $t \rightarrow \int_0^t f(s)dB_s$. Les trajectoires de l'intégrale de Wiener sont p.s. continues.

Notons que si $f \in \cap_{T>0} L^2([0, T])$, $t \rightarrow \int_0^t f(s)dB_s$ est une martingale gaussienne p.s. continue, définie pour tout $t \geq 0$.

3.5.2 Intégrale d'Itô

Nous allons maintenant construire l'intégrale d'Itô. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré, et $\{B_t, t \geq 0\}$ un \mathcal{F}_t -mouvement brownien. Notons $M^2(0, T)$ le sous-espace de Hilbert de

$$L^2(\Omega \times [0, T], \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}([0, T]), d\mathbb{P} \times dt)$$

des classes d'équivalence des processus $\{\varphi_t(\omega), \omega \in \Omega, 0 \leq t \leq T\}$ qui sont tels que pour tout $0 \leq t \leq T$, la restriction à $[0, t] \times \Omega$ de l'application $(s, \omega) \rightarrow \varphi_s(\omega)$ est $\mathcal{B}([0; t]) \otimes \mathcal{F}_t$ -mesurable. On dit qu'un tel processus $\{\varphi_t\}$ est *progressivement mesurable*. En particulier, il est *adapté*, au sens où φ_t est \mathcal{F}_t -mesurable pour tout $t \geq 0$.

La construction que nous avons faite de l'intégrale de Wiener s'étend à l'intégrale d'Itô comme suit. On considère tout d'abord des processus en escalier de la forme

$$\varphi_s(\omega) = \sum_{k=1}^n \varphi_k(\omega) \mathbf{1}_{]t_k, t_{k+1}]}(s),$$

où φ_k est supposée \mathcal{F}_{t_k} mesurable et de carré intégrable, $1 \leq k \leq n$. Pour un tel φ ,

$$\int_0^t \varphi_s dB_s \triangleq \sum_{k=1}^n \varphi_k (B_{t \wedge t_{k+1}} - B_{t \wedge t_k}).$$

On va utiliser de façon répétée la propriété (ii) de la Définition 3.2.1, qui dit que si $0 \leq s < t$, \mathcal{F}_s et $B_t - B_s$ sont indépendants. Alors

$$\mathbb{E} \int_0^t \varphi_s dB_s = 0$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\int_0^t \varphi_s dB_s \right)^2 \right] &= \sum_k \mathbb{E} \left[\varphi_k^2 (B_{t \wedge t_{k+1}} - B_{t \wedge t_k})^2 \right] \\ &\quad + 2 \sum_{\ell < k} \mathbb{E} \left[\varphi_\ell (B_{t \wedge t_{\ell+1}} - B_{t \wedge t_\ell}) \varphi_k (B_{t \wedge t_{k+1}} - B_{t \wedge t_k}) \right] \\ &= \sum_k \mathbb{E}(\varphi_k^2)(t \wedge t_{k+1} - t \wedge t_k) \\ &= \mathbb{E} \int_0^t \varphi_s^2 ds. \end{aligned}$$

A nouveau, la propriété d'isométrie que nous venons d'établir permet d'étendre l'intégrale d'Itô à tout $\varphi \in M^2[0, T]$.

Par le même raisonnement que pour l'intégrale de Wiener, on établit le

Théorème 3.5.1. *Pour tout $\varphi \in M^2[0, T]$, $0 \leq t \leq T$, l'intégrale d'Itô vérifie*

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \int_0^t \varphi_s dB_s &= 0, \\ \mathbb{E} \left[\left(\int_0^t \varphi_s dB_s \right)^2 \right] &= \mathbb{E} \int_0^t \varphi_s^2 ds. \end{aligned}$$

En outre le processus $\{\int_0^t \varphi_s dB_s, 0 \leq t \leq T\}$ est une martingale à trajectoires p.s. continues, puisque si $0 < s < t$,

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_s} \left[\int_0^t \varphi_r dB_r \right] = \int_0^s \varphi_r dB_r.$$

Notons que si $\varphi \in \cap_{T>0} M^2[0, T]$, alors l'intégrale stochastique $\int_0^t \varphi_s dB_s$ est définie pour tout $t > 0$. Nous allons maintenant étendre l'intégrale d'Itô à des $\{\varphi_t\}$ adaptés qui vérifient seulement

$$\int_0^T \varphi_t^2 dt < \infty \text{ p. s., pour tout } T > 0. \quad (3.1)$$

Posons

$$\tau_n = \inf \left\{ t \geq 0, \int_0^t \varphi_s^2 ds \geq n \right\},$$

avec la convention usuelle que l'infimum de l'ensemble vide vaut $+\infty$. Notons tout d'abord que sous l'hypothèse (3.1), $\tau_n \uparrow +\infty$ p.s. quand $n \rightarrow \infty$. On remarque tout d'abord

Lemme 3.5.2. *Si $\varphi \in \cap_{T>0} M^2[0, T]$, alors pour tout $t > 0$ et τ temps d'arrêt,*

$$\int_0^{t \wedge \tau} \varphi_s dB_s = \int_0^t \mathbf{1}_{s \leq \tau} \varphi_s dB_s.$$

PREUVE: Cette identité est clairement vérifiée si φ est en escalier comme ci-dessus. Le cas général s'obtient par passage à la limite. \square

Sur l'événement $\{t \leq \tau_n\}$, on peut définir $\int_0^t \varphi_s dB_s$ par

$$\int_0^t \varphi_s dB_s = \int_0^t \mathbf{1}_{s \leq \tau_n} \varphi_s dB_s.$$

Puisque $\tau_n \uparrow +\infty$ p.s., $\cup_{n \geq 1} \{t \leq \tau_n\} = \Omega$ à une ensemble de probabilité nulle près. Donc la formule ci-dessus définit bien l'intégrale stochastique de φ progressivement mesurable qui vérifie (3.1), comme un processus continu $X_t = \int_0^t \varphi_s dB_s$. Cependant, pour un tel $\{\varphi_t\}$ on ne sait pas a priori si la v.a. X_t est une martingale. X_t n'a pas de raison d'être intégrable, et les trois formules du théorème 3.5.1 n'ont plus de raison d'être vraies. On a cependant toujours l'inégalité (exercice)

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t \varphi_s dB_s \right)^2 \right] \leq \mathbb{E} \int_0^t \varphi_s^2 ds$$

Par ailleurs, X_t est une *martingale locale*, qui est *réduite* par la suite de temps d'arrêts τ_n , au sens où $\tau_n \uparrow +\infty$ p.s. et pour tout $n \geq 1$, $\{X_{t \wedge \tau_n}, t \geq 0\}$ est une martingale.

3.5.3 Intégrale d'Itô vectorielle

On va maintenant examiner le cas où le mouvement brownien B_t prend ses valeurs dans \mathbb{R}^k , et l'intégrand φ_t prend ses valeurs dans les matrices $d \times k$, et donc l'intégrale stochastique prend ses valeurs dans \mathbb{R}^d .

Un mouvement brownien standard $\{B_t, t \geq 0\}$ à valeurs dans \mathbb{R}^k est défini comme dans le cas $k = 1$, en notant que $\mathbb{E}[B_s(B_t)'] = \inf(s, t)I$, et que la loi de $B_t - B_s$, pour $s < t$, est la loi de gauss vectorielle $N(0, (t - s)I)$. De façon équivalente, on pourrait supposer que les coordonnées $\{B_t^i, t \geq 0\}_{1 \leq i \leq k}$ sont des browniens réels standards mutuellement indépendants.

Si φ_t est progressivement mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}^{d \times k}$ et vérifie pour tout $T > 0$

$$\mathbb{E} \int_0^T \text{Tr} \varphi_t \varphi_t' dt < \infty, \text{ [resp. } \int_0^T \text{Tr} \varphi_t \varphi_t' dt < \infty \text{ p.s.]},$$

alors $X_t = \int_0^t \varphi_s dB_s$ est une martingale continue à valeurs dans \mathbb{R}^d qui vérifie pour tout $t > 0$

$$\mathbb{E}[X_t X_t'] = \mathbb{E} \int_0^t \varphi_s \varphi_s' ds \text{ et } \mathbb{E}[\|X_t\|^2] = \text{Tr} \int_0^t \varphi_s \varphi_s' ds,$$

[resp. une martingale locale continue à valeurs dans \mathbb{R}^d].

La construction est analogue à celle que nous avons faite dans le cas $k = d = 1$.

3.5.4 Formule d'Itô

Nous pouvons maintenant établir une première forme de la *formule d'Itô* :

Théorème 3.5.3. *Si $\Phi \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, alors pour tout $t > 0$,*

$$\begin{aligned} \Phi(t, B_t) &= \Phi(0, B_0) + \int_0^t \Phi_s'(s, B_s) ds \\ &\quad + \int_0^t \Phi_x'(s, B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t \Phi_{xx}''(s, B_s) ds. \end{aligned}$$

PREUVE: Pour simplifier, on va considérer seulement le cas d'une fonction $\Phi \in C_b^2(\mathbb{R})$ et on va montrer qu'alors

$$\Phi(B_t) = \Phi(0) + \int_0^t \Phi'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t \Phi''(B_s) ds.$$

Posons $t_k^n = \frac{k}{n}t$, $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$. Alors

$$\begin{aligned}\Phi(B_t) - \Phi(0) &= \sum_{k=1}^n (\Phi(B_{t_k^n}) - \Phi(B_{t_{k-1}^n})) \\ &= \sum_{k=1}^n \Phi'(B_{t_{k-1}^n})(B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \Phi''(\Theta_k^n)(B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n})^2\end{aligned}$$

par la formule de Taylor à l'ordre 2, avec Θ_k^n appartenant à l'intervalle $[B_{t_{k-1}^n}, B_{t_k^n}]$. Il résulte de la formule d'isométrie de l'intégrale d'Itô que

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left(\left| \int_0^t \Phi'(B_s) dB_s - \sum_{k=1}^n \Phi'(B_{t_{k-1}^n})(B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n}) \right|^2 \right) \\ = \mathbb{E} \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} |\Phi'(B_s) - \Phi'(B_{t_{k-1}^n})|^2 ds \\ \rightarrow 0 \text{ par convergence dominée.}\end{aligned}$$

On remarque ensuite que

$$\begin{aligned}\left| \sum_{k=1}^n \left(\Phi''(B_{t_{k-1}^n}) - \Phi''(\Theta_k^n) \right) (B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n})^2 \right| \\ \leq \sup_k \left| \Phi''(B_{t_{k-1}^n}) - \Phi''(\Theta_k^n) \right| \sum_{k=1}^n (B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n})^2 \\ \rightarrow 0\end{aligned}$$

en probabilité, quand $n \rightarrow \infty$. Enfin une variante de l'argument de la preuve de la Proposition 3.1.3 permet de montrer que

$$\sum_{k=1}^n \Phi''(B_{t_{k-1}^n})(B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n})^2 \rightarrow \int_0^t \Phi''(B_s) ds,$$

quand $n \rightarrow \infty$. Plus précisément, on montre d'une part que

$$\mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=1}^n \Phi''(B_{t_{k-1}^n}) \left[(B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n})^2 - (t_k^n - t_{k-1}^n) \right] \right)^2 \right] \rightarrow 0,$$

et d'autre part que

$$\sum_{k=1}^n \Phi''(B_{t_{k-1}^n})(t_k^n - t_{k-1}^n) \rightarrow \int_0^t \Phi''(B_s) ds.$$

□

La formule d'Itô se généralise comme suit.

On appelle *processus d'Itô* un processus $\{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ de la forme

$$X_t = x + \int_0^t \psi_s ds + \int_0^t \varphi_s dB_s, \quad (3.2)$$

où $x \in \mathbb{R}$, ψ et φ sont des processus progressivement mesurables tels que

$$\int_0^T (|\psi_t| + |\varphi_t|^2) dt < \infty \text{ p.s.}$$

On a alors le résultat suivant, dont la preuve est analogue à celle du Théorème 3.5.3 :

Théorème 3.5.4. *Si $\{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ est un processus d'Itô de la forme (3.2), et $\Phi \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, alors pour tout $0 < t \leq T$,*

$$\begin{aligned} \Phi(t, X_t) &= \Phi(0, x) + \int_0^t \Phi'_s(s, X_s) ds \\ &+ \int_0^t \Phi'_x(s, X_s) \psi_s ds + \int_0^t \Phi'_x(s, X_s) \varphi_s dB_s \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \Phi''_{xx}(s, X_s) \varphi_s^2 ds. \end{aligned}$$

On aura besoin de la formule d'Itô multidimensionnelle : on considère un mouvement brownien $\{B_t, t \geq 0\}$ à valeurs dans \mathbb{R}^k ψ_t progressivement mesurable à valeurs dans \mathbb{R}^d , φ_t progressivement mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}^{d \times k}$. Alors si $x \in \mathbb{R}^d$, le processus

$$X_t = x + \int_0^t \psi_s ds + \int_0^t \varphi_s dB_s, \quad 0 \leq t \leq T$$

est un processus d'Itô à valeurs dans \mathbb{R}^d .

Si maintenant $\Phi \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^d)$, on a la formule d'Itô :

$$\begin{aligned} \Phi(t, X_t) &= \Phi(0, x) + \int_0^t \Phi'_s(s, X_s) ds + \int_0^t \langle \Phi'_x(s, X_s), \psi_s \rangle ds \\ &\quad + \int_0^t \langle \Phi'_x(s, X_s), \varphi_s dB_s \rangle + \frac{1}{2} \int_0^t \text{Tr}[\Phi''_{xx}(s, X_s) \varphi_s \varphi_s^*] ds \end{aligned}$$

3.6 Équations différentielles stochastiques

Soit $f, g : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\sup_{0 \leq t \leq T} (|f(t, 0)| + |g(t, 0)|) < \infty$$

et en outre il existe K tel que

$$|f(t, x) - f(t, y)| + |g(t, x) - g(t, y)| \leq K|x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, t \in [0, T] \quad (3.3)$$

La condition (3.3) est appelée condition de Lipschitz. On a le

Théorème 3.6.1. *Sous les conditions ci-dessus, en particulier (3.3), pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'EDS*

$$X_t = x + \int_0^t f(s, X_s) ds + \int_0^t g(s, X_s) dB_s, \quad 0 \leq t \leq T,$$

admet une unique solution $X \in M^2(0, T)$.

PREUVE: Notons F l'application de l'espace $M^2(0, T)$ dans lui-même définie par

$$F(X)_t = x + \int_0^t f(s, X_s) ds + \int_0^t g(s, X_s) dB_s, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Une solution de l'EDS est un point fixe de F . Or pour que F admette un unique point fixe, il suffit qu'elle soit une contraction stricte pour une norme bien choisie sur $M^2(0, T)$.

Appliquons la formule d'Itô au processus d'Itô $F(X)_t - F(Y)_t$ et à la fonction $\Phi(t, x) = e^{-\lambda t}|x|^2$ ($\lambda > 0$ qui sera choisi plus loin). On obtient

$$\begin{aligned} & e^{-\lambda T}|F(X)_T - F(Y)_T|^2 + \lambda \int_0^T e^{-\lambda t}|F(X)_t - F(Y)_t|^2 dt \\ &= 2 \int_0^T e^{-\lambda t}(F(X)_t - F(Y)_t)(f(t, X_t) - f(t, Y_t))dt \\ &+ 2 \int_0^T e^{-\lambda t}(F(X)_t - F(Y)_t)(g(t, X_t) - g(t, Y_t))dB_t \\ &+ \int_0^T e^{-\lambda t}|g(t, X_t) - g(t, Y_t)|^2 dt. \end{aligned}$$

Nous allons prendre l'espérance dans cette identité; nous admettrons que l'intégrale stochastique est intégrable et d'espérance nulle. Il vient, en utilisant en outre la condition de Lipschitz :

$$\begin{aligned} & e^{-\lambda T}\mathbb{E}|F(X)_T - F(Y)_T|^2 + \lambda \mathbb{E} \int_0^T e^{-\lambda t}|F(X)_t - F(Y)_t|^2 dt \\ &= \mathbb{E} \int_0^T e^{-\lambda t} [2(F(X)_t - F(Y)_t)(f(t, X_t) - f(t, Y_t)) \\ &\quad + |g(t, X_t) - g(t, Y_t)|^2] dt \\ &\leq \mathbb{E} \int_0^T e^{-\lambda t} [2K|F(X)_t - F(Y)_t| \times |X_t - Y_t| + K^2|X_t - Y_t|^2] dt. \end{aligned}$$

Il résulte de l'inégalité de Cauchy–Schwartz que

$$\begin{aligned} & 2K\mathbb{E} \int_0^T e^{-\lambda t}|F(X)_t - F(Y)_t| \times |X_t - Y_t| dt \\ &\leq \mathbb{E} \int_0^T e^{-\lambda t}|F(X)_t - F(Y)_t|^2 dt + K^2\mathbb{E} \int_0^T e^{-\lambda t}|X_t - Y_t|^2 dt. \end{aligned}$$

Donc

$$(\lambda - 1)\mathbb{E} \int_0^T e^{-\lambda t}|F(X)_t - F(Y)_t|^2 dt \leq 2K^2\mathbb{E} \int_0^T e^{-\lambda t}|X_t - Y_t|^2 dt$$

On choisit alors $\lambda = 2K^2 + 2$, d'où :

$$\mathbb{E} \int_0^T e^{-(2K^2+2)t}|F(X)_t - F(Y)_t|^2 dt \leq \frac{2K^2}{2K^2 + 1}\mathbb{E} \int_0^T e^{-(2K^2+2)t}|X_t - Y_t|^2 dt.$$

3.7 Le théorème de Girsanov

Nous allons donner une version simplifiée du Théorème de Girsanov, due à Cameron et Martin.

Établissons tout d'abord le

Lemme 3.7.1. *Un processus continu $\{B_t, 0 \leq t \leq T\}$ est un \mathcal{F}_t -mouvement brownien ssi pour tout $0 \leq s < t \leq T$, $u \in \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_s} e^{u(B_t - B_s)} = e^{\frac{u^2}{2}(t-s)}.$$

PREUVE: La CN est assez évidente. La CS résulte de ce que la condition du Lemme entraîne que l'accroissement $B_t - B_s$ a pour transformée de Laplace $e^{\frac{u^2}{2}(t-s)}$, donc est de loi $N(0, t-s)$, et est indépendante de \mathcal{F}_s , puisque la transformée de Laplace jointe de $B_t - B_s$ et de toute v.a.r. U \mathcal{F}_s mesurable et bornée est donnée par

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\exp\{vU + u(B_t - B_s)\}] &= \mathbb{E}[\exp\{vU\} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s} \exp\{u(B_t - B_s)\}] \\ &= e^{\frac{u^2}{2}(t-s)} \mathbb{E}[\exp\{vU\}] \\ &= \mathbb{E}[\exp\{vU\}] \mathbb{E}[\exp\{u(B_t - B_s)\}], \end{aligned}$$

pour tout $u, v \in \mathbb{R}$, ce qui entraîne l'indépendance des deux v.a.r. U et $B_t - B_s$. \square

On a alors le

Théorème 3.7.2. *Soit $\{B_t, 0 \leq t \leq T\}$ un \mathcal{F}_t -mouvement brownien défini sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.*

Si $f \in L^2(0, T)$,

$$\begin{aligned} B_t^* &= B_t - \int_0^t f(s) ds, \quad 0 \leq t \leq T; \\ Z_t &= \exp\left(\int_0^t f(s) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t f^2(s) ds\right) \end{aligned}$$

et \mathbb{P}^ est la probabilité sur (Ω, \mathcal{F}_T) telle que*

$$\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} = Z_T,$$

alors $\{B_t^, 0 \leq t \leq T\}$ est un \mathcal{F}_t -mouvement brownien sous \mathbb{P}^* .*

PREUVE: Au vu du lemme précédent, il suffit de montrer que pour tout $g \in L^2(0, T)$, $0 \leq s < t \leq T$,

$$\mathbb{E}^* \left[\exp \left(\int_s^t g(r) dB_r^* \right) \middle| \mathcal{F}_s \right] = \exp \left(\frac{1}{2} \int_s^t g^2(r) dr \right)$$

Mais pour tout $A \in \mathcal{F}_s$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^* \left[\mathbf{1}_A \exp \left(\int_s^t g(r) dB_r^* \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_A \exp \left\{ \int_s^t g(r) [dB_r - f(r) dr] \right\} Z_t \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_A Z_s \exp \left\{ \int_s^t [f(r) + g(r)] dB_r - \frac{1}{2} \int_s^t [2f(r)g(r) + f^2(r)] dr \right\} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_A Z_s \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_s^t g^2(r) dr \right\} \right] \\ &= \mathbb{P}^*(A) \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_s^t g^2(r) dr \right\}, \end{aligned}$$

où on a utilisé à la 3ème identité le fait que

$$\mathbb{E} \left[\exp \left\{ \int_s^t [f(r) + g(r)] dB_r - \frac{1}{2} \int_s^t |f(r) + g(r)|^2 dr \right\} \right] = 1,$$

puisque la v.a.r. $\int_s^t [f(r) + g(r)] dB_r$ est une v.a.r. gaussienne centrée de variance $\int_s^t |f(r) + g(r)|^2 dr$. \square

3.8 Formule de Feynman–Kac

On considère l'équation aux dérivées partielles parabolique rétrograde :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + f(x) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2} g^2(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = c(x) u(t, x), \\ 0 \leq t \leq T, \quad x \in \mathbb{R}; \quad u(T, x) = h(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.4)$$

On suppose que f, g satisfont la condition (3.3), que c et h sont continues et bornées sur \mathbb{R} . Pour chaque $0 < t < T$, $x \in \mathbb{R}$, on note $\{X_s^{t,x}, t \leq s \leq T\}$ la

solution de l'EDS :

$$X_s^{t,x} = x + \int_t^s f(X_r^{t,x})dr + \int_t^s g(X_r^{t,x})dB_r, \quad t \leq s \leq T.$$

On a alors le

Théorème 3.8.1. *Supposons que $u \in C_b^{1,2}((0, T) \times \mathbb{R})$ est solution de l'EDP (3.4). Alors u est donné par la formule de Feynman–Kac :*

$$u(t, x) = \mathbb{E} \left[h(X_T^{t,x}) \exp \left(- \int_t^T c(X_s^{t,x})ds \right) \right]$$

PREUVE: On applique la formule d'Itô au processus $(X_s^{t,x}, Y_s)$, avec $Y_s = - \int_t^s c(X_r^{t,x})dr$, et à la fonction $\Phi(s, x, y) = u(s, x) \exp(y)$. Il vient

$$\begin{aligned} u(T, X_T^{t,x}) \exp \left(- \int_t^T c(X_s^{t,x})ds \right) &= u(t, x) \\ &+ \int_t^T \exp \left(- \int_t^s c(X_r^{t,x})dr \right) g(X_s^{t,x}) \frac{\partial u}{\partial x}(s, X_s^{t,x})dB_s \\ &+ \int_t^T \left(\frac{\partial u}{\partial s} + Lu - cu \right)(s, X_s^{t,x}) \exp(Y_s)ds, \end{aligned}$$

où $Lu(s, x) = f(x) \frac{\partial u}{\partial x}(s, x) + \frac{1}{2}g^2(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(s, x)$. Il reste à prendre l'espérance, et à exploiter le fait que u est solution de (3.4) pour conclure.

Chapitre 4

Le modèle et la formule de Black–Scholes

Le modèle de Black–Scholes stipule que

$$S_t = S_0 \exp(\mu t + \sigma B_t),$$

où $\mu \in \mathbb{R}$ est la *dérivée* et $\sigma \in \mathbb{R}$ est appelée la *volatilité*. $\{B_t, t \geq 0\}$ est un *mouvement brownien (standard)*.

4.1 La formule de Black–Scholes (2)

Nous allons commencer par un cadre assez général, et nous nous posons la question suivante. Etant donné une option qui rapporte à son détenteur la somme $H(\geq 0)$ à l’instant T , quel est le juste prix de cette option ?

On pose

$$\mathcal{F}_t = \sigma\{B_s, 0 \leq s \leq t\} = \sigma\{S_s; 0 \leq s \leq t\}$$

à des ensembles de mesure nulle près.

On suppose satisfaite l’hypothèse suivante

$$(H.1) \left\{ \begin{array}{l} H \text{ est } \mathcal{F}_T \text{ mesurable et} \\ \text{il existe } p > 2 \text{ tel que } \mathbb{E}[H^p] < \infty. \end{array} \right.$$

Un exemple particulier est le cas où

$$H = h(S_T),$$

notamment pour le call et le put européens, mais on verra plus loin d'autres types d'options, qui ne sont pas de cette forme particulière.

Nous allons nous laisser guider par ce que nous avons fait dans le cas du modèle discret.

On pose la question sous la forme suivante : trouver V_0 et une stratégie autofinancée $\{(X_t, Y_t); 0 \leq t \leq T\}$, tels que

$$\begin{aligned} V_t(X, Y) &= X_t R_t + Y_t S_t \\ &= V_0 + \int_0^t X_s dR_s + \int_0^t Y_s dS_s \end{aligned}$$

vérifie $V_T(X, Y) = H$.

En particulier $\{V_t(X, Y), 0 \leq t \leq T\}$ est un processus d'Itô. On suppose que $R_t = e^{rt}$, et on définit la valeur actualisée du portefeuille à l'instant t :

$$\begin{aligned} \tilde{V}_t(X, Y) &= R_t^{-1} V_t(X, Y) \\ &= X_t + \tilde{Y}_t, \end{aligned}$$

où l'on a posé $\tilde{Y}_t \triangleq R_t^{-1} Y_t S_t$; c'est la valeur actualisée de la partie du portefeuille investie sur l'actif risqué. Alors

$$\tilde{Y}_t = \tilde{V}_t - X_t.$$

En outre

$$\begin{aligned} d\tilde{V}_t(X, Y) &= -r\tilde{V}_t dt + R_t^{-1} dV_t \\ &= -r\tilde{V}_t dt + rX_t dt + R_t^{-1} Y_t dS_t \\ &= -r\tilde{Y}_t dt + R_t^{-1} Y_t dS_t. \end{aligned}$$

Mais

$$dS_t = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) S_t dt + \sigma S_t dB_t,$$

donc

$$d\tilde{V}_t = \left(\mu - r + \frac{\sigma^2}{2} \right) \tilde{Y}_t dt + \sigma \tilde{Y}_t dB_t.$$

Posons finalement

$$B_t^* \triangleq \left(\frac{\mu - r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2} \right) t + B_t.$$

Alors

$$d\tilde{V}_t = \sigma \tilde{Y}_t dB_t^*,$$

soit en intégrant de t à T

$$\tilde{V}_t = e^{-rT} H - \sigma \int_t^T \tilde{Y}_s dB_s^*$$

Soit maintenant \mathbb{P}^* la probabilité sur (Ω, \mathcal{F}_T) telle que

$$\{B_t^*; 0 \leq t \leq T\}$$

soit un \mathbb{P}^* mouvement brownien. Alors

$$\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} = Z_T = \exp \left\{ - \left(\frac{\mu - r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2} \right) B_T - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu - r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2} \right)^2 T \right\}.$$

On a le

Lemme 4.1.1.

$$\mathbb{E}^*(H^2) < \infty.$$

PREUVE: On a, avec $p > 2$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^*(H^2) &= \mathbb{E}[H^2 Z_T] \\ &\leq (\mathbb{E}[H^p])^{2/p} \left(\mathbb{E} \left[Z_T^{p/(p-2)} \right] \right)^{(p-2)/p} \\ &< \infty, \end{aligned}$$

où on a utilisé l'inégalité de Hölder, l'hypothèse (H.1), et le fait que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[Z_T^{p/(p-2)} \right] &= \mathbb{E} \left(\exp \left\{ - \frac{p}{p-2} \left(\frac{\mu - r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2} \right) B_T - \frac{p}{2(p-2)} \left(\frac{\mu - r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2} \right)^2 T \right\} \right) \\ &= \exp \left\{ \frac{p(p+2)}{2(p-2)^2} \left(\frac{\mu - r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2} \right)^2 T \right\}. \end{aligned}$$

□

On déduit du Lemme 4.1.1 (Exercice) que

$$\mathbb{E}^* \int_0^T |\tilde{Y}_t|^2 dt < \infty,$$

donc en particulier

$$\tilde{V}_t = e^{-rT} \mathbb{E}^*(H | \mathcal{F}_t),$$

soit

$$V_t = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^*(H | \mathcal{F}_t),$$

ce qui redonne la formule de Black–Scholes pour les prix du call et du put européen.

Qu'en est-il de la stratégie de couverture ? Sous \mathbb{P}^* , $\{\tilde{V}_t\}$ est une martingale de carré intégrable adaptée à la filtration $\mathcal{F}_t^{B^*}$. Un théorème général d'Itô nous dit alors que

$$\tilde{V}_t = V_0 + \int_0^t Z_s dB_s^*, \quad 0 \leq t \leq T,$$

avec un unique $Z \in M^2(0, T)$. On retrouve

$$Y_t = \frac{R_t Z_t}{\sigma S_t}.$$

Dans le cas où $H = h(S_T)$ (cadre markovien), on va voir dans les sections suivantes que l'on a l'EDP de Black–Scholes et Y_t se calcule en fonction de la dérivée de sa solution. Dans des cas plus généraux, le calcul peut se faire (mais de façon pas très explicite !) avec d'autres outils de calcul stochastique, par exemple le calcul de Malliavin.

Terminons cette section par deux exemples classiques d'options qui ne sont pas de la forme $H = h(S_T)$.

Exemple 3.1 Option barrière d'achat

C'est une option qui rapporte à l'échéance :

$$H = \mathbf{1}_{\{\sup_{0 \leq t \leq T} S_t < \beta\}} (S_T - K)_+,$$

autrement dit on a le même gain qu'avec une option d'achat européenne, mais on n'a le droit d'exercer cette option que si le cours du sous-jacent n'a jamais atteint la barrière β .

Exemple 3.2 Option d'achat asiatique

Il s'agit d'une option qui rapporte à son acquéreur à l'échéance

$$H = \left(\frac{1}{T} \int_0^T S_t dt - K \right)_+$$

4.2 L'EDP de Black-Scholes

On va présenter une autre façon de résoudre le problème du *pricing*, qui résoud aussi celui de la *couverture* d'une option européenne, en passant par la dérivation d'une EDP.

On traite un cas plus spécifique qu'à la section précédente, à savoir que l'on s'intéresse à une option européenne, qui rapporte à son détenteur $H = h(S(T))$ à l'échéance T . Encore une fois nous pensons surtout aux deux cas $h(x) = (x - K)_+$ et $h(x) = (K - x)_+$.

Le prix de cette option à l'instant t est V_t , $0 \leq t \leq T$. Bien sûr on a $V_T = h(S(T))$. On va supposer - on le démontrera plus loin - qu'il existe une application

$$u : [0, T] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$$

telle que pour tout $0 \leq t \leq T$,

$$V_t = u(t, S_t).$$

Nous allons en outre supposer - là encore on peut le démontrer, mais c'est un petit peu plus difficile - que

$$u \in C^{1,2}((0, T) \times \mathbb{R}_+),$$

si bien que l'on peut appliquer la formule d'Itô.

Notons que l'on a

$$V_t = u(t, S_0 \exp(\mu t + \sigma B_t)),$$

donc une application de la formule d'Itô du théorème 3.5.3 nous donne

$$\begin{aligned} dV_t &= \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, S_t) + \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) S_t \frac{\partial u}{\partial x}(t, S_t) + \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, S_t) \right) dt \\ &\quad + \sigma S_t \frac{\partial u}{\partial x}(t, S_t) dB_t \end{aligned}$$

L'absence d'opportunité d'arbitrage nous impose que s'il existe une stratégie admissible $\{(X_t, Y_t), 0 \leq t \leq T\}$ telle que la richesse associée à l'instant final soit

$$V_T(X, Y) = h(S_T),$$

alors nécessairement

$$V_t(X, Y) = V_t, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Par ailleurs,

$$V_t(X, Y) = X_t R_t + Y_t S_t,$$

et la condition d'autofinancement s'écrit en temps continu

$$dV_t(X, Y) = X_t dR_t + Y_t dS_t.$$

Mais

$$dR_t = r R_t dt$$

et en utilisant une fois de plus la formule d'Itô, on obtient

$$dS_t = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) S_t dt + \sigma S_t dB_t.$$

On déduit des dernières identités une seconde formule pour la différentielle de V_t , à savoir

$$dV_t = \left(r X_t R_t + \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) Y_t S_t \right) dt + \sigma Y_t S_t dB_t$$

On va maintenant utiliser un résultat bien connu des aficionados du calcul stochastique, à savoir que lorsque deux processus d'Itô sont identiques, on a nécessairement identité des coefficients de dB_t , et identité des coefficients de dt (Exercice).

D'où d'une part :

$$\sigma Y_t S_t = \sigma S_t \frac{\partial u}{\partial x}(t, S_t),$$

soit encore

$$Y_t = \frac{\partial u}{\partial x}(t, S_t)$$

(on vient d'identifier la stratégie de couverture, sur laquelle nous reviendrons ci-dessous), et en outre

$$\begin{aligned} r X_t R_t + \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) Y_t S_t &= \frac{\partial u}{\partial t}(t, S_t) + \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) S_t \frac{\partial u}{\partial x}(t, S_t) \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, S_t) \end{aligned}$$

Mais on sait déjà que

$$Y_t = \frac{\partial u}{\partial x}(t, S_t),$$

d'où l'on tire, grâce à

$$\begin{aligned} X_t R_t + Y_t S_t &= u(t, S_t), \\ R_t X_t &= u(t, S_t) - S_t \frac{\partial u}{\partial x}(t, S_t). \end{aligned}$$

Donc la relation ci-dessus devient

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, S_t) + r S_t \frac{\partial u}{\partial x}(t, S_t) + \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, S_t) = r u(t, S_t) \\ u(T, S_T) = h(S_T) \end{cases}$$

Une C.N.S. pour que ces relations soient satisfaites p.s. est que u soit solution de l'EDP parabolique

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + r x \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) + \frac{\sigma^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = r u(t, x), \\ 0 < t < T, x \in \mathbb{R}_+; \quad u(T, x) = h(x), x \in \mathbb{R}_+. \end{cases} \quad (4.1)$$

4.3 La formule de Black–Scholes (3)

Rappelons que

$$S_t = S_0 + \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \int_0^t S_s ds + \sigma \int_0^t S_s dB_s.$$

Posons

$$B_t^* := B_t + \left(\frac{\mu - r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2}\right) t.$$

Alors

$$S_t = S_0 + r \int_0^t S_s ds + \sigma \int_0^t S_s dB_s^*.$$

Soit maintenant \mathbb{P}^* une probabilité sur (Ω, \mathcal{F}) telle que sous \mathbb{P}^* , $\{B_t^*, t \geq 0\}$ soit un mouvement brownien. Non seulement une telle probabilité existe, mais on verra ci-dessous qu'elle est équivalente à la probabilité \mathbb{P} (sous laquelle c'est $\{B_t\}$ qui est un brownien).

Notons que

$$d(R_t^{-1} S_t) = \sigma R_t^{-1} S_t dB_t^*,$$

donc le prix actualisé $\tilde{S}_t = R_t^{-1}S_t$ est une martingale sous \mathbb{P}^* , qui a nouveau s'interprète comme la *probabilité risque neutre*.

Il résulte alors de la formule de Feynman–Kac (théorème 3.8.1) et de l'équation (4.1) que

$$u(t, x) = \mathbb{E}^* [e^{-r(T-t)}h(S_T)|S_t = x],$$

soit

$$V_t = u(t, S_t) = \mathbb{E}^* [e^{-r(T-t)}h(S_T)|S_t],$$

et en particulier

$$V_0 = u(0, S_0) = \mathbb{E}^* [e^{-rT}h(S_T)].$$

Sachant que sous \mathbb{P}^* , la loi de $\log(S_T/S_0)$ est la loi $N((r - \frac{\sigma^2}{2})T, \sigma^2T)$, on en déduit en particulier les formules pour C_0 et P_0 que l'on avait obtenues une première fois au chapitre 2.6.

4.4 Propriété de Markov et EDP

Pour obtenir l'“EDP de Black-Scholes” au chapitre 4.2, nous avons admis qu'à chaque instant t , le prix V_t de l'option est une fonction du cours du sous-jacent S_t , i.e. que V_t s'écrit

$$V_t = u(t, S_t)$$

On a vu au chapitre 4.1 que

$$V_t = \frac{R_t}{R_T} \mathbb{E}^*(H|\mathcal{F}_t).$$

Pourquoi et à quelle condition cette espérance conditionnelle est-elle une fonction de S_t ?

Définition 4.4.1. Soit $\{X_t, t \geq 0\}$ un processus stochastique. $\{X_t\}$ est appelé processus de Markov si pour tout $0 < s < t$, toute $f \in C_b(\mathbb{R})$,

$$\mathbb{E}[f(X_t)|\mathcal{F}_s^X] = \mathbb{E}[f(X_t)|X_s],$$

où $\mathcal{F}_s^X \triangleq \sigma\{X_r; 0 \leq r \leq s\}$ (à des ensembles de mesure nulle près).

Remarquons que (à des ensembles de mesure nulle près) $\mathcal{F}_t = \sigma\{S_s; 0 \leq s \leq t\}$. On a la

Proposition 4.4.2. *Sous \mathbb{P}^* , $\{S_t; 0 \leq t \leq T\}$ est un processus de Markov.*

PREUVE: Si $0 < s < t$,

$$S_t = S_s \exp \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t - s) + \sigma (B_t^* - B_s^*) \right]$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^* [f(S_t) | \mathcal{F}_s] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f \left(S_s \exp \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t - s) + \sigma \sqrt{t - sx} \right] \right) e^{-x^2/2} dx \\ &= \mathbb{E}^* [f(S_t) | S_s], \end{aligned}$$

puisque S_s et \mathcal{F}_s mesurable, et $B_t^* - B_s^*$ est indépendante de \mathcal{F}_s sous \mathbb{P}^* . \square

On peut donc en fait utiliser la formule de Feynman–Kac à l’envers, i.e. déduire l’EDP satisfaite par la fonction $u(t, x)$ de la formule

$$V_t = \mathbb{E}^* \left[e^{-r(T-t)} h(S_T) | S_t \right].$$

Nous pouvons maintenant nous demander si dans les cas de l’option barrière et de l’option asiatique, le calcul du prix de l’option peut encore se ramener à la résolution d’une EDP.

EDP associée à l’option barrière

Reprenons l’option barrière d’achat de l’exemple 3.1. Posons

$$S_t^\beta = S_{t \wedge \tau_\beta},$$

où $\tau_\beta = \inf\{t \leq T; S_t \geq \beta\}$, et

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq K; \\ x - K, & \text{si } K \leq x < \beta; \\ 0, & \text{si } x \geq \beta. \end{cases}$$

Alors, dans le cas de l’option barrière d’achat, la v.a. H se réécrit

$$H = h(S_t^\beta).$$

Par un argument analogue à celui de la proposition 4.5.2, on montre que $\{S_t^\beta, 0 \leq t \leq T\}$ est un processus de Markov (Exercice). Sous la *probabilité*

risque neutre, on a à la fois que $R_t^{-1}S_t$ et $R_{t \wedge \tau_\beta}^{-1} S_{t \wedge \tau_\beta}$ sont des martingales, et les arguments de la section 4.1 conduisent à nouveau à la formule

$$V_t = \mathbb{E}^* \left[\frac{R_t}{R_T} h(S_T^\beta) | S_t^\beta \right]$$

Notons que pour $t \geq \tau_\beta$, $V_t = 0$. Soit, si $V_t = u(t, S_t^\beta)$, $u(t, \beta) = 0$. L'EDP devient

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + rx \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) + \frac{\sigma^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = ru(t, x), & 0 < t < T, 0 < x < \beta; \\ u(t, \beta) = 0; & 0 < t < T; u(T, x) = h(x), & 0 < x < \beta. \end{cases}$$

EDP associée à l'option asiatique

Posons $U_t = \int_0^t S_s ds$. Alors, dans le cas de l'option asiatique,

$$H = h(U_T),$$

avec cette fois $h(x) = (T^{-1}x - K)_+$. Il n'est pas trop difficile de vérifier que $\{U_t, 0 \leq t \leq T\}$ n'est pas un processus de Markov; par contre $\{(S_t, U_t); 0 \leq t \leq T\}$ est un processus de Markov (Exercice), d'où

$$\begin{aligned} V_t &= \mathbb{E}^* \left(\frac{R_t}{R_T} H | \mathcal{F}_t \right) \\ &= \mathbb{E}^* \left(\frac{R_t}{R_T} H | S_t, U_t \right) \\ &= u(t, S_t, U_t), \end{aligned}$$

où $\{u(t, x, y); 0 \leq t \leq T, x > 0, y > 0\}$ est solution de l'EDP

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x, y) + \left(\frac{\sigma^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + rx \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} - ru \right) (t, x, y) = 0, \\ 0 \leq t \leq T, x, y > 0; & u(T, x, y) = h(y), \\ & x > 0, y > 0. \end{cases}$$

4.5 Généralisation du modèle de Black-Scholes

Dans le cas du call, on remarque que $h'(x) \geq 0$, et on s'attend à ce que $\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \geq 0$: toutes choses égales par ailleurs, si le cours du sous-jacent monte, le prix de l'option monte ; donc on s'attend à ce que $Y_t \geq 0$. Notons que ces inégalités sont renversées dans le cas du put ! Ceci dit, aux frais de transaction près, l'évolution du prix du sous-jacent ne dépend pas de savoir quelle type de position on a sur ce sous-jacent.

Par contre rien ne dit si la somme X_t mise sur l'actif non risqué est positive ou négative (i.e. s'il s'agit d'un dépôt ou d'un prêt), et l'hypothèse que le taux d'intérêt est le même pour les deux cas est tout à fait irréaliste.

Supposons donc que les dépôts bénéficient d'un taux r^+ , alors que les prêts se font aux taux r^- . En posant

$$R_t^+ = e^{r^+t}, \quad R_t^- = e^{r^-t},$$

on a, dans le cas d'une stratégie autofinancée, si $X_t^+ = \max(0, X_t)$, $X_t^- = \max(0, -X_t)$,

$$dV_t = (X_t^+ r^+ R_t^+ - X_t^- r^- R_t^-) dt + Y_t dS_t.$$

Si l'on reprend la démarche qui a conduit au chapitre 4.2 à l'EDP de Black-Scholes, on voit que l'on obtient à nouveau

$$Y_t = \frac{\partial u}{\partial x}(t, S_t),$$

et cette fois

$$\begin{aligned} X_t^+ R_t^+ &= (u(t, S_t) - S_t \frac{\partial u}{\partial x}(t, S_t))_+ \\ X_t^- R_t^- &= (u(t, S_t) - S_t \frac{\partial u}{\partial x}(t, S_t))_-, \end{aligned}$$

d'où l'on tire l'EDP *non linéaire*.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \frac{\sigma^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = H(r^+, r^-, x, u(t, x), \frac{\partial u}{\partial x}(t, x)); \\ u(T, x) = h(x), \end{cases}$$

avec $H(a, b, x, y, p) = a(y - xp)_+ - b(y - rp)_-$.

4.6 Option portant sur plusieurs sous-jacent

Jusqu'ici nous nous sommes contentés d'étudier des options portant sur un seul actif risqué. Même si c'est le cas d'un grand nombre d'options, il en existe qui portent sur plusieurs actifs risqués à la fois. Un premier exemple typique de ce second type est le cas des options *spread*, qui portent sur l'écart entre les prix de deux actifs, i.e. $H = (S_T^1 - S_T^2)_+$, où S^1 et S^2 sont les prix de deux actifs risqués. Un second exemple est constitué par les *options sur portefeuille* appelées aussi *options panier* (*basket option* en Anglais). Les *options sur indice* (type CAC 40) en sont un exemple. Une option de vente (*put*) sur portefeuille est un moyen d'assurer son portefeuille. Étant donné un portefeuille composé de a_i actions de prix S_t^i à l'instant t , $i = 1, \dots, d$, un put qui paye $(K - \sum_{i=1}^n a_i S_T^i)_+$ garantit que le portefeuille pourra être revendu au moins au prix K à l'échéance.

Supposons que, outre l'actif non risqué, qui cote $R_t = e^{rt}$ à l'instant t le marché est composé de d actifs risqués, dont les prix S_t^i , $i = 1, \dots, d$, fluctuent suivant le modèle

$$dS_t^i = \alpha_i S_t^i dt + S_t^i \sum_{j=1}^d \sigma_{ij} dB_t^j, \quad 1 \leq i \leq d, \quad t \geq 0,$$

où B_t^1, \dots, B_t^d sont d mouvements brownien mutuellement indépendants. Une application de la formule d'Itô permet de vérifier que cette EDS multidimensionnelle admet comme unique solution

$$S_t^i = S_0^i \exp \left[\mu_i t + \sum_{j=1}^d \sigma_{ij} B_t^j \right], \quad 1 \leq i \leq d, \quad t \geq 0,$$

avec $\mu_i = \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}^2$.

La question naturelle à se poser, pour généraliser la théorie de Black–Scholes, est celle de l'existence d'une *probabilité risque neutre* \mathbb{P}^* équivalente à la probabilité \mathbb{P} , sous laquelle le processus des prix actualisés $e^{-rt} S_t = e^{-rt} (S_t^1, \dots, S_t^d)$, $t \geq 0$ soit une martingale vectorielle, ce qui sera une conséquence de l'existence d'un \mathbb{P}^* -mouvement brownien d -dimensionnel $\{B_t^*, t \geq 0\}$ tel que

$$dS_t^i = r S_t^i dt + S_t^i \sum_{j=1}^d \sigma_{ij} dB_t^{*,j}, \quad 1 \leq i \leq d, \quad t \geq 0.$$

Notons \mathbf{r} le vecteur de \mathbb{R}^d dont toutes les coordonnées sont égales à r , et

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_d \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \cdot & \cdot & \sigma_{1d} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sigma_{d1} & \cdot & \cdot & \sigma_{dd} \end{pmatrix}.$$

La seconde écriture des S_t^i est équivalente à

$$(\mathbf{r} - \alpha)t = \Sigma(B_t - B_t^*), \quad t \geq 0.$$

On est donc conduit à formuler l'hypothèse cruciale suivante :

$$\Sigma \text{ est inversible.} \quad (4.2)$$

Sous cette hypothèse, on déduit de la relation précédente entre B_t et B_t^* la formule

$$B_t^* = \Sigma^{-1}(\mathbf{r} - \alpha)t + B_t, \quad t \geq 0. \quad (4.3)$$

Il résulte d'une généralisation naturelle (exercice) du théorème de Girsanov 3.7.2 que si

$$\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} = \exp \left[\langle \Sigma^{-1}(\alpha - \mathbf{r}), B_T \rangle - \frac{1}{2} \|\Sigma^{-1}(\alpha - \mathbf{r})\|^2 T \right],$$

alors $\{B_t^*, 0 \leq t \leq T\}$ et un mouvement brownien d -dimensionnel (i.e. $\{B_t^1\}, \dots, \{B_t^d\}$ sont des mouvements brownien scalaires mutuellement indépendants) sous \mathbb{P}^* .

En reprenant les arguments de la section 4.1, on a que le prix V_t de l'option à l'instant t est donné par la formule (formellement la même que dans le cas unidimensionnel)

$$V_t = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^*(H | \mathcal{F}_t),$$

d'où en particulier

$$V_0 = e^{-rT} \mathbb{E}^* H. \quad (4.4)$$

Si $H = h(S_T)$, on a donc $V_0 = e^{-rT} \mathbb{E}^* h(S_T)$. Notons pour $t \geq 0$ $\log S_t$ le vecteur $(\log S_t^1, \dots, \log S_t^d)$. Sous \mathbb{P}^* , la loi de $\log(S_T)$ est la loi de Gauss vectorielle $N(\log(S_0) + (\mathbf{r} - \frac{1}{2}s^2)T, \Sigma \Sigma^* T)$, où $s^2 = (s_1^2, \dots, s_d^2)$, avec $s_i^2 = \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}^2$.

Le processus $\{S_t, t \geq 0\}$ à valeurs dans \mathbb{R}^d est un processus de Markov, donc dans le cas où $H = h(S_T)$, il existe une fonction $u : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que

$$V_t = u(t, S_t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

On montre par un raisonnement analogue à celui de la section 4.2 que u est solution de l'EDP parabolique dans \mathbb{R}_+^d , avec $a = \Sigma \Sigma^*$,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + r \sum_{i=1}^d x_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(t, x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d x_i x_j a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(t, x) = ru(t, x), \\ 0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}_+^d; \quad u(T, x) = h(x), x \in \mathbb{R}_+^d. \end{cases}$$

En outre, le portefeuille de couverture est déterminé par la relation

$$Y_t^i = \frac{\partial u}{\partial x_i}(t, S_t), \quad 1 \leq i \leq d, \quad 0 \leq t \leq T,$$

au sens où Y_t^i est le “nombre” d’actifs numéro i que doit contenir ce portefeuille. La richesse associé est donc

$$V_t(X, Y) = X_t R_t + \sum_{i=1}^d Y_t^i S_t^i, \quad 0 \leq t \leq T.$$

4.7 Viabilité et Complétude

Les notions de marché *viaible* et *complet* se définissent comme dans le cas du modèle discret, au petit point près qu’un marché complet est maintenant un marché tel que à toute v.a. $H \geq 0$ \mathcal{F}_T mesurable et de carré intégrable, on peut associer une richesse initiale V_0 et une stratégie admissible (X, Y) telles que

$$H = V_0 + \int_0^T X_t dR_t + \sum_{i=1}^d Y_t^i dS_t^i.$$

La restriction H de carré intégrable est inutile dans le cas du modèle discret, puisque dans ce modèle Ω est fini, donc toute v.a. est bornée.

On a le résultat fondamental

Théorème 4.7.1. *Le marché est viable ssi il existe au moins une probabilité risque neutre \mathbb{P}^* équivalente à \mathbb{P} . Le marché est complet s’il existe exactement une probabilité risque neutre \mathbb{P}^* équivalente à \mathbb{P} .*

Le fait que l'existence d'une probabilité risque neutre entraîne le caractère viable du marché se démontre comme dans le cas du modèle discret. Nous admettrons les autres affirmations de ce théorème.

4.8 Remarques sur le calcul effectif

Nous avons associé à toutes les options rencontrées jusqu'ici une EDP (au prix cependant d'un doublement de la dimension de la variable spatiale pour l'option asiatique, ce qui alourdit singulièrement la résolution numérique). Peut-on donner une formule probabiliste pour le prix de l'option dans le cas du modèle considéré au chapitre 4.4? La réponse est oui, en faisant appel à la théorie des "EDS rétrogrades"; mais la formule en question n'est pas du tout explicite.

Discutons maintenant du calcul effectif de la prime.

Formules explicites

Une première approche, qui n'est utilisable que dans les cas les plus simples (qui incluent cependant presque tous les cas examinés jusqu'ici) consiste à utiliser la connaissance de la loi des v.a. considérées, c'est à dire que dans le cas du call européen on utilise la formule

$$C_0 = S_0 F(d_1) - K e^{-rT} F(d_2)$$

(cf. fin de la section 2.6), avec F fonction de répartition de la loi $N(0, 1)$, laquelle est accessible avec une bonne précision dans Matlab, ou dont le calcul numérique peut être programmé. En ce qui concerne l'option barrière, on peut utiliser la connaissance de la loi jointe du vecteur aléatoire $(\sup_{0 \leq t \leq T} S_t, S_T)$, et en ce qui concerne l'option asiatique des mathématiciens ont récemment progressé pour expliciter la loi de la variable aléatoire U_T .

Méthode de Monte Carlo

Une seconde méthode, dont le domaine d'application est beaucoup plus vaste, consiste à simuler un grand nombre de réalisations de la variable aléatoire concernée, et à remplacer l'espérance mathématique par la moyenne empirique sur l'échantillon ainsi constitué.

Remarquons que la vitesse de convergence d'une méthode de Monte Carlo est contrôlée par la variance de la v.a. dont on veut calculer l'espérance. De ce point de vue, le calcul par Monte Carlo du put est bien mieux conditionné que celui du call. On a donc intérêt, pour calculer le call par Monte Carlo, à calculer en fait le put, et à utiliser la relation de parité call-put.

Sous réserve de surveiller la variance, les méthodes de Monte Carlo sont commodes d'utilisation, la simulation d'un très grand nombre de variables aléatoires ne posant pas de problème sur les ordinateurs d'aujourd'hui.

Notons qu'une variante de la méthode de Monte Carlo consiste à simuler un arbre binomial (éventuellement avec un N - cf. section 2.6 - grand)

Résolution numérique de l'EDP

Une dernière méthode consiste à résoudre l'EDP par une méthode numérique de type différences finies. Notons que cela suppose de discrétiser le temps et l'espace (et de borner l'espace infini \mathbb{R}_+). Ces méthodes numériques ont été développées par les spécialistes du calcul scientifique pour beaucoup d'autres applications. Leur principale limitation est la dimension de la variable spatiale, lorsque l'on considère un modèle avec un grand nombre d'actifs risqués.

4.9 Volatilité historique - Volatilité implicite

L'utilisation des modèles ci-dessus pour le calcul de la prime suppose la connaissance de très peu de paramètres (il est remarquable que le paramètre μ dans le modèle initial des fluctuations de S_t a disparu). Le taux d'intérêt r peut être considéré comme connu.

Par contre la paramètre σ - la volatilité - n'est pas donné directement. On peut tenter de l'estimer à partir des données des fluctuations passées, c'est la *volatilité historique*.

Mais comme il existe un marché des options, où les prix sont régis par la loi de l'offre et de la demande, on peut inverser la formule de Black-Scholes, pour en déduire une valeur de σ , appelée *volatilité implicite*. Il est à noter que l'inversion de la formule pour différentes options de même échéance T , mais correspondant à des prix d'exercice différents, donne des volatilités implicites différentes - effet *smile*.

Chapitre 5

EDS rétrogrades et modèle de Black–Scholes généralisé

Chapitre 6

Options américaines dans le modèle discret

Contrairement aux options dites “européennes”, une option dite “américaine” peut être exercée à tout instant entre la date de signature du contrat (l’instant 0) et l’échéance (l’instant T). Notons $h(S_t)$ ce que rapporte l’option, lorsqu’elle est exercée à l’instant t . Dans le cas d’un call américain, $h(x) = (x - K)_+$, dans le cas d’un put américain, $h(x) = (K - x)_+$. On notera $Z_t = h(S_t)$, $0 \leq t \leq T$, et A_t le prix de l’option américaine à l’instant t , $0 \leq t \leq T$. En particulier, A_0 est la *prime* dont l’acheteur de l’option américaine doit s’acquitter au moment de la signature du contrat (l’instant 0).

On suppose à nouveau que

$$R_t = (1 + r)^t, \quad 0 \leq t \leq T,$$

et on définit les valeurs actualisées

$$\tilde{Z}_t = \frac{Z_t}{(1 + r)^t}, \quad \tilde{A}_t = \frac{A_t}{(1 + r)^t}.$$

Cherchons à préciser la valeur de A_t par récurrence rétrograde. Tout d’abord, il est clair que

$$A_T = Z_T.$$

A l’instant $T-1$, le détenteur de l’option a le choix entre l’exercer immédiatement, ou bien la conserver pour espérer en tirer un meilleur profit à l’instant T . Donc on a

$$A_{T-1} = Z_{T-1} \vee \frac{1}{1 + r} \mathbb{E}^*(Z_T | S_{T-1}).$$

Par le même raisonnement, on a pour tout $0 < t \leq T$,

$$A_{t-1} = Z_{t-1} \vee \frac{1}{1+r} \mathbb{E}^*(A_t | S_{t-1}).$$

En terme des valeurs actualisées, on obtient

$$\begin{cases} \tilde{A}_T = \tilde{Z}_T \\ \tilde{A}_{t-1} = \tilde{Z}_{t-1} \vee \mathbb{E}^*(\tilde{A}_t | S_{t-1}), \quad 0 < t \leq T. \end{cases} \quad (6.1)$$

On pose la

Définition 6.0.1. *On appelle sur-martingale (resp. sous-martingale) une suite adaptée $\{M_t; 0 \leq t \leq T\}$ telle que pour $0 < t \leq T$,*

$$\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_{t-1}] \leq (\text{resp. } \geq) M_{t-1}.$$

On a la

Proposition 6.0.2. *La suite $\{\tilde{A}_t, 0 \leq t \leq T\}$ est une \mathbb{P}^* -surmartingale. C'est la plus petite \mathbb{P}^* -surmartingale qui majore la suite $\{\tilde{Z}_t, 0 \leq t \leq T\}$.*

PREUVE: La propriété de surmartingale, et le fait que la suite $\{\tilde{A}_t\}$ majore la suite $\{\tilde{Z}_t\}$ découlent immédiatement de la relation (6.1). Soit maintenant $\{M_t\}$ une autre \mathbb{P}^* -surmartingale qui majore $\{\tilde{Z}_t\}$. Alors $M_T \geq \tilde{Z}_T = \tilde{A}_T$, et si $M_t \geq \tilde{A}_t$,

$$M_{t-1} \geq \mathbb{E}^*(M_t | \mathcal{F}_{t-1}) \geq \mathbb{E}^*(\tilde{A}_t | \mathcal{F}_{t-1}),$$

et aussi $M_{t-1} \geq \tilde{Z}_{t-1}$, donc

$$M_{t-1} \geq \tilde{Z}_{t-1} \vee \mathbb{E}^*(\tilde{A}_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \tilde{A}_{t-1}.$$

□

Pour poursuivre notre étude des options américaines, nous allons préciser ce qu'est la plus petite surmartingale majorant une suite adaptée donnée.

6.1 Enveloppe de Snell

Commençons par la :

Définition 6.1.1. Une v.a. ν à valeurs dans l'ensemble $\{0, 1, \dots, T\}$ est appelée un temps d'arrêt si pour tout $0 \leq t \leq T$,

$$\{\nu = t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Etant donnée une suite aléatoire adaptée $\{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ et un temps d'arrêt, la suite arrêtée $\{X_{t \wedge \nu}, 0 \leq t \leq T\}$ est encore adaptée. Ceci résulte de ce que ν est un temps d'arrêt ssi $\{\nu \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ pour tout $0 \leq t \leq T$. On a en outre le théorème d'arrêt

Théorème 6.1.2. Si $\{M_t, 0 \leq t \leq T\}$ est une martingale (resp. une surmartingale), alors $\{M_{t \wedge \nu}, 0 \leq t \leq T\}$ est aussi une martingale (resp. une surmartingale).

PREUVE: Il suffit de remarquer (avec la notation de la proposition 2.3.2) que

$$M_{t \wedge \nu} = M(Y)_t, \quad 0 \leq t \leq T,$$

si $Y_t = \mathbf{1}_{\{t \leq \nu\}}$. Puisque $\{t \leq \nu\} = \{\nu \leq t - 1\}^c$, la suite Y est prévisible, et le résultat pour les martingales est la proposition 2.3.2. Le même raisonnement, en exploitant la positivité de Y donne le résultat pour les surmartingales. \square

Etant donnée une suite adaptée $\{Z_t, 0 \leq t \leq T\}$, on veut étudier son *enveloppe de Snell*, autrement dit la plus petite surmartingale qui la majore. Celle-ci est la suite $\{U_t, 0 \leq t \leq T\}$ définie par

$$\begin{cases} U_T = Z_T, \\ U_t = Z_t \vee \mathbb{E}(U_{t+1} | \mathcal{F}_t), \quad 0 \leq t < T. \end{cases}$$

Notons que tant que $U_t > Z_t$, $U_t = \mathbb{E}(U_{t+1} | \mathcal{F}_t)$. Cette remarque se formalise en la

Proposition 6.1.3. La v.a. définie par

$$\nu = \inf\{0 \leq t \leq T | U_t = Z_t\}$$

est un temps d'arrêt, et la suite arrêtée $\{U_{t \wedge \nu}, 0 \leq t \leq T\}$ est une martingale.

PREUVE: Notons tout d'abord que

$$\{\nu = t\} = \{U_0 > Z_0\} \cap \cdots \cap \{U_{t-1} > Z_{t-1}\} \cap \{U_t = Z_t\} \in \mathcal{F}_t.$$

On pose à nouveau $Y_t = \mathbf{1}_{\{t \leq \nu\}}$, $U_{t \wedge \nu} = U(Y)_t$.

$$U(Y)_{t+1} - U(Y)_t = \mathbf{1}_{\{t+1 \leq \nu\}}(U_{t+1} - U_t),$$

et sur $\{t+1 \leq \nu\}$, $U_t = \mathbb{E}(U_{t+1} | \mathcal{F}_t)$, donc $\mathbb{E}(U(Y)_{t+1} - U(Y)_t | \mathcal{F}_t) = 0$. \square

Notons \mathcal{T}_t l'ensemble des temps d'arrêt qui prennent leurs valeurs dans l'ensemble $\{t, t+1, \dots, T\}$.

Corollaire 6.1.4. *On a*

$$U_0 = \mathbb{E}(Z_\nu | \mathcal{F}_0) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_0} \mathbb{E}(Z_\tau | \mathcal{F}_0).$$

PREUVE: D'après la proposition 6.1.3, $\{U_{\cdot \wedge \nu}\}$ est une martingale, donc

$$\begin{aligned} U_0 &= \mathbb{E}(U_{T \wedge \nu} | \mathcal{F}_0) \\ &= \mathbb{E}(Z_\nu | \mathcal{F}_0). \end{aligned}$$

Si $\tau \in \mathcal{T}_0$, d'après le théorème 6.1.2, $\{U_{\cdot \wedge \tau}\}$ est une surmartingale, donc

$$\begin{aligned} U_0 &\geq \mathbb{E}(U_{N \wedge \tau} | \mathcal{F}_0) \\ &\geq \mathbb{E}(Z_\tau | \mathcal{F}_0). \end{aligned}$$

\square

Le corollaire se généralise en

$$\begin{aligned} U_t &= \sup_{\tau \in \mathcal{T}_t} \mathbb{E}(Z_\tau | \mathcal{F}_t) \\ &= \mathbb{E}(Z_{\nu_t} | \mathcal{F}_t), \end{aligned}$$

si $\nu_t = \inf\{s \geq t | U_s = Z_s\}$. On appelle *temps d'arrêt optimal* un temps d'arrêt qui vérifie la propriété d'optimalité du temps d'arrêt ν établie au corollaire 6.1.4. Le théorème qui suit dit que ce ν est le plus petit des temps d'arrêt optimaux.

Théorème 6.1.5. *Le temps d'arrêt ν est optimal ssi les deux conditions suivantes sont vérifiées*

- (i) $Z_\nu = U_\nu$
- (ii) $\{U_{t \wedge \nu}, 0 \leq t \leq T\}$ est une martingale.

PREUVE: (i)+(ii) implique $U_0 = \mathbb{E}(Z_\nu | \mathcal{F}_0)$, donc l'optimalité de ν d'après le corollaire 6.1.4.

Réciproquement, supposons ν optimal. Alors

$$U_0 = \mathbb{E}(Z_\nu | \mathcal{F}_0) \leq \mathbb{E}(U_\nu | \mathcal{F}_0),$$

et puisque $\{U_{\cdot \wedge \nu}\}$ est un surmartingale, $\mathbb{E}(U_\nu | \mathcal{F}_0) \leq U_0$, donc $\mathbb{E}(U_\nu | \mathcal{F}_0) = \mathbb{E}(Z_\nu | \mathcal{F}_0) = U_0$, d'où comme U domine Z , $U_\nu = Z_\nu$, soit (i). Encore une fois $\{U_{\cdot \wedge \nu}\}$ est une surmartingale, donc

$$U_0 \geq \mathbb{E}(U_{t \wedge \nu} | \mathcal{F}_0) \geq \mathbb{E}(U_\nu | \mathcal{F}_0),$$

mais comme les deux termes extrêmes coïncident, on a

$$\mathbb{E}(U_{t \wedge \nu} | \mathcal{F}_0) = \mathbb{E}(U_\nu | \mathcal{F}_0) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(U_\nu | \mathcal{F}_t) | \mathcal{F}_0).$$

Comme d'un autre coté $U_{t \wedge \nu} \geq \mathbb{E}(U_\nu | \mathcal{F}_t)$, on a l'égalité $U_{t \wedge \nu} = \mathbb{E}(U_\nu | \mathcal{F}_t)$, soit (ii).

6.2 Décomposition de Doob

On a la

Proposition 6.2.1. *Toute surmartingale $\{U_t, 0 \leq t \leq T\}$ s'écrit de façon unique sous la forme*

$$U_t = M_t - C_t,$$

où $\{M_t, 0 \leq t \leq T\}$ est une martingale, et $\{C_t, 0 \leq t \leq T\}$ est une suite croissante, prévisible t.q. $C_0 = 0$.

PREUVE: Nécessairement, $M_0 = U_0$ et $C_0 = 0$. En outre

$$U_{t+1} - U_t = M_{t+1} - M_t - C_{t+1} + C_t,$$

d'où en conditionnant par \mathcal{F}_t ,

$$\mathbb{E}(U_{t+1}|\mathcal{F}_t) - U_t = -C_{t+1} + C_t,$$

et

$$M_{t+1} - M_t = U_{t+1} - \mathbb{E}(U_{t+1}|\mathcal{F}_t).$$

□

En outre

Proposition 6.2.2. *Soit $\{Z_t, 0 \leq t \leq T\}$ une suite adaptée, d'enveloppe de Snell $U_t = M_t - C_t$. Alors le plus grand temps d'arrêt optimal est donné par*

$$\nu_{\max} = \inf\{t \leq T, C_{t+1} \neq 0\}.$$

PREUVE: Le fait que ν_{\max} est un temps d'arrêt résulte de ce que $\{C_t\}$ est prévisible. De $C_t = 0$ pour $t \leq \nu_{\max}$, on déduit que

$$U_{\cdot \wedge \nu_{\max}} = M_{\cdot \wedge \nu_{\max}},$$

donc $\{U_{\cdot \wedge \nu_{\max}}\}$ est une martingale. D'après le théorème 6.1.5, il suffit pour montrer que ν_{\max} est optimal, de montrer l'égalité $U_{\nu_{\max}} = Z_{\nu_{\max}}$. Posons $Y_t = \mathbf{1}_{\{\nu_{\max}=t\}}$.

$$\begin{aligned} U_{\nu_{\max}} &= \sum_{t=0}^{T-1} Y_t U_t + Y_T U_T \\ &= \sum_{t=0}^{T-1} Y_t \max(Z_t, \mathbb{E}(U_{t+1}|\mathcal{F}_t)) + Y_T Z_T \\ &= \sum_{t=0}^{T-1} Y_t Z_t + Y_T Z_T \\ &= Z_{\nu_{\max}}, \end{aligned}$$

où on a utilisé les faits suivants : $\mathbb{E}(U_{t+1}|\mathcal{F}_t) = M_t - C_{t+1}$, et sur $\{Y_t = 1\}$, $C_t = 0$ et $C_{t+1} > 0$, soit $\mathbb{E}(U_{t+1}|\mathcal{F}_t) = M_t - C_{t+1} < U_t$, d'où nécessairement $U_t = Z_t$.

Il reste à montrer qu'il n'existe pas de temps d'arrêt optimal ν tel que $\nu \geq \nu_{\max}$ et $\mathbb{P}(\nu > \nu_{\max}) > 0$. En effet on aurait

$$\mathbb{E}(U_\nu) = \mathbb{E}(M_\nu) - \mathbb{E}(C_\nu) = \mathbb{E}(U_0) - \mathbb{E}(C_\nu) < \mathbb{E}(U_0),$$

donc $\{U_{\cdot \wedge \nu}\}$ n'est pas une martingale.

6.3 Enveloppe de Snell et chaînes de Markov

Précisons maintenant la forme de l'enveloppe de Snell dans une situation markovienne. Soit $\{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ une chaîne de Markov homogène à valeurs dans un ensemble fini E , de matrice de transition $P = \{P_{xy}, x, y \in E\}$. On suppose alors que pour $0 \leq t \leq T$, $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_0, \dots, X_t\}$.

Proposition 6.3.1. *Soit $\{Z_t\}$ une suite définie par $Z_t = \psi(t, X_t)$, avec $\psi : \{0, 1, \dots, T\} \times E \rightarrow \mathbb{R}$. Alors l'enveloppe de Snell $\{U_t\}$ de la suite $\{Z_t\}$ est donnée par la formule $U_t = u(t, X_t)$, où la fonction u est définie par*

$$\begin{cases} u(T, x) = \psi(T, x), & x \in E; \\ u(t, x) = \psi(t, x) \vee \sum_y P_{xy} u(t+1, y), & x \in E, 0 \leq t < T. \end{cases}$$

En pratique, pour déterminer le temps d'arrêt

$$\nu = \inf\{t, U_t = Z_t\},$$

on calcule la solution u du système rétrograde de la proposition 6.3.1, et on arrête à l'instant $\nu = \inf\{t \leq T, u(t, X_t) = \psi(t, X_t)\}$.

6.4 Retour aux options américaines

D'après la proposition 6.0.2, le prix actualisé $\{\tilde{A}_t\}$ de l'option américaine est la \mathbb{P}^* -enveloppe de Snell de la suite $\{\tilde{Z}_t = (1+r)^{-t}h(S_t) = R_t^{-1}h(S_t)\}$. On sait (généralisation du corollaire 6.1.4) que

$$\tilde{A}_t = \sup_{\nu \in \mathcal{T}_t} \mathbb{E}^*(R_\nu^{-1}h(S_\nu) | \mathcal{F}_t),$$

soit

$$A_t = R_t \sup_{\nu \in \mathcal{T}_t} \mathbb{E}^*(R_\nu^{-1}h(S_\nu) | \mathcal{F}_t).$$

D'après la décomposition de Doob, $\tilde{A}_t = \tilde{M}_t - \tilde{C}_t$, avec $\{\tilde{M}_t\}$ une \mathbb{P}^* -martingale et \tilde{C}_t croissant prévisible et nul en 0.

Puisque le marché est complet, il existe une richesse initiale V_0 et une stratégie autofinancée $\{(X_t, Y_t)\}$ t.q. $V_T(X, Y) = R_T \tilde{M}_T$, soit $\tilde{V}_T(X, Y) = \tilde{M}_T$, et comme on a deux \mathbb{P}^* -martingales, $\forall 0 \leq t \leq T$, $\tilde{V}_t(X, Y) = \tilde{M}_t$, soit

$\tilde{A}_t = \tilde{V}_t(X, Y) - \tilde{C}_t$, et $A_t = V_t(X, Y) - C_t$, où $C_t = R_t \tilde{C}_t$. Une date d'exercice optimale τ vérifie $A_\tau = h(S_\tau)$. Elle doit vérifier $\tau \leq \nu_{\max} = \inf\{t, C_{t+1} \neq 0\}$, car en exerçant l'option à la date ν_{\max} , son propriétaire se constitue le capital $A_{\nu_{\max}} = V_{\nu_{\max}}(X, Y)$, et grâce à la stratégie $\{(X, Y)\}$, son portefeuille vaut strictement plus que l'option aux instants $\nu_{\max} + 1, \nu_{\max} + 2, \dots, N$.

On vérifie également que si l'acheteur de l'option exerce celle-ci à un instant non optimal, le vendeur réalise un profit strictement positif.

6.5 Options américaines et options européennes

Proposition 6.5.1. *Soit A_t le prix à l'instant t d'une option américaine qui rapporte à son détenteur Z_t si elle est exercée à l'instant t , et E_t le prix à l'instant t d'une option européenne qui rapporte à son détenteur Z_T à l'échéance. Alors $A_t \geq E_t$, $0 \leq t \leq T$.*

Si de plus $E_t \geq Z_t \forall t$, alors $E_t = A_t \forall t$.

PREUVE: La première égalité est évidente, et elle résulte des propriétés de martingale (resp. sur-martingale) de $\{E_t\}$ (resp. $\{A_t\}$) sous \mathbb{P}^* . Si $E_t \geq Z_t$, $\{\tilde{E}_t\}$ est une \mathbb{P}^* -martingale (donc aussi surmartingale) qui majore $\{\tilde{Z}_t\}$, donc elle majore aussi $\{\tilde{A}_t\}$, d'après la proposition 6.0.2.

Corollaire 6.5.2. *Dans le cas des call(s) européen et américain de même échéance T et de même prix d'exercice K , portant sur un même unique actif risqué de prix S_t à l'instant t , $A_t = E_t$, $0 \leq t \leq T$.*

PREUVE: On a $Z_t = (S_t - K)_+$, et

$$\begin{aligned} \tilde{E}_t &= R_T^{-1} \mathbb{E}^*((S_T - K)_+ | \mathcal{F}_t) \\ &\geq \mathbb{E}^*(\tilde{S}_T - R_T^{-1} K | \mathcal{F}_t) \\ &= \tilde{S}_t - R_T^{-1} K, \text{ donc} \\ E_t &\geq S_t - \frac{R_t}{R_T} K \\ &\geq S_t - K, \end{aligned}$$

mais on a aussi $E_t \geq 0$, donc $E_t \geq Z_t$. Il reste à appliquer la proposition. \square

Cette propriété n'est pas vérifiée pour un put, ni pour un call sur une action distribuant un dividende.

6.6 Options américaines et modèle markovien

Reprenons une option américaine qui rapporte à son détenteur $Z_t = h(S_t)$ si elle est exercée à l'instant t , et supposons maintenant que $\{S_t, 0 \leq t \leq T\}$ est une chaîne de Markov. Alors le prix A_t se met sous la forme $A_t = u(t, S_t)$. Posons $\tilde{u}(t, x) = R_t^{-1}u(t, x)$ et $\tilde{h}(t, x) = R_t^{-1}h(x)$. Il résulte de la proposition 6.3.1

$$\tilde{u}(t, x) = \tilde{h}(t, x) \vee \sum_y P_{xy} \tilde{u}(t+1, y),$$

d'où l'on déduit la formule de récurrence

$$u(t, x) = h(x) \vee \sum_y P_{xy} \frac{u(t+1, y)}{1+r}. \quad (6.2)$$

Et un temps d'exercice optimal est défini par

$$\nu = \inf\{t \leq T, u(t, S_t) = h(S_t)\}.$$

Chapitre 7

Options américaines dans le modèle de Black–Scholes

L'étude des options américaines dans le modèle de Black–Scholes exige des outils mathématiques complexes. Nous allons présenter l'EDP associée, par passage à la limite sur les formules de la sous-section 6.6.

Réécrivons la formule (6.2) dans le cadre de la sous-section 2.6, avec les changements de variable :

$$\begin{aligned}g(x) &= h(e^x), \\v(t, x) &= u(t, e^x).\end{aligned}$$

On obtient

$$v\left(t - \frac{1}{N}, x\right) = g(x) \vee e^{-r/N} \left(p_+^N v\left(t, x + \frac{r}{N} + \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right) + p_-^N v\left(t, x + \frac{r}{N} - \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right) \right), \quad (7.1)$$

avec

$$\begin{aligned}p_+^N &= \mathbb{P}(\eta_k^N = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}) = \frac{1}{2} - \frac{\sigma}{4\sqrt{N}} + o(N^{-3/2}), \\p_-^N &= \mathbb{P}(\eta_k^N = -\frac{\sigma}{\sqrt{N}}) = \frac{1}{2} + \frac{\sigma}{4\sqrt{N}} + o(N^{-3/2}).\end{aligned}$$

Posons

$$(A_N v)(t, x) e^{-r/N} \left(p_+^N v\left(t, x + \frac{r}{N} + \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right) + p_-^N v\left(t, x + \frac{r}{N} - \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right) \right).$$

Alors (7.1) se réécrit

$$\begin{aligned} v(t - \frac{1}{N}, x) &\geq g(x), \\ (A_N v)(t, x) - v(t - \frac{1}{N}, x) &\leq 0, \\ (v(t - \frac{1}{N}, x) - g(x))((A_N v)(t, x) - v(t - \frac{1}{N}, x)) &= 0. \end{aligned}$$

En admettant que v est suffisamment régulière, on obtient, après multiplication par N , à l'aide d'un développement limité, que quand $N \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} N[(A_N v)(t, x) - v(t - \frac{1}{N}, x)] &\rightarrow \\ Av(t, x) &:= \frac{\partial v}{\partial t}(t, x) + (r - \frac{\sigma^2}{2}) \frac{\partial v}{\partial x}(t, x) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x) - rv(t, x). \end{aligned}$$

Donc le prix de l'option américaine est

$$A_t = v(t, \log S_t),$$

où v est la solution de l'inéquation variationnelle

$$\begin{aligned} v(t, x) &\geq g(x), \\ Av(t, x) &\leq 0, \\ (v(t, x) - g(x))Av(t, x) &= 0, \end{aligned}$$

et un temps optimal d'exercice de l'option est donné par le temps d'arrêt

$$\nu = \inf\{t \leq T, v(t, \log S_t) = g(\log S_t) = h(S_t)\}.$$

Chapitre 8

Taux d'intérêt et obligations

Jusqu'ici nous avons supposé que le taux d'intérêt est une constante (ne dépendant ni de l'aléa ni du temps). Une telle hypothèse est acceptable lorsque l'on traite des actions et des options sur actions, mais ce n'est plus le cas lorsqu'il s'agit des obligations et des options sur obligations.

On appelle *obligation zéro coupon* un titre donnant droit à un Euro à l'échéance T . On notera $O_{t,T}$ la valeur de ce titre à l'instant t .

8.1 Courbe de taux en avenir certain

Le taux d'intérêt d'un prêt dépend à la fois de sa date d'émission t , et de la date d'échéance T . Une personne empruntant un Euro à l'instant t devra rembourser une somme R_T^t à la date T . Dans le cas du taux d'intérêt constant du modèle de Black-Scholes, on aurait

$$R_T^t = \exp[(T - t)r].$$

Plus généralement, dans un cadre déterministe, i.e. où toutes les quantités $\{R_T^t, 0 \leq t \leq T\}$ sont connues, l'absence d'opportunité d'arbitrage impose que la fonction R vérifie

$$R_T^t = R_u^t R_T^u, \forall 0 \leq t < u < T.$$

De cette relation, jointe à $R_t^t = 1$, et à la continuité de R , on déduit qu'il existe une fonction $t \rightarrow r(t)$ telle que

$$R_T^t = \exp\left(\int_t^T r(s)ds\right), \forall 0 \leq t \leq T.$$

Dans ce cas, on doit avoir clairement

$$O_{t,T} = \exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right).$$

8.2 Taux en avenir incertain et obligations

On suppose maintenant que (on note R_t pour R_t^0)

$$R_t = \exp\left(\int_0^t r_s ds\right),$$

où $\{r_t, t \geq 0\}$ est un processus stochastique adapté à la filtration naturelle $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ d'un mouvement brownien $\{W_t, t \geq 0\}$ (i. e. à des ensembles de mesure nulle près, $\mathcal{F}_t = \sigma\{W_s, 0 \leq s \leq t\}$).

On fait l'hypothèse suivante :

$$(H) \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe une probabilité } \mathbb{P}^* \text{ équivalente à } \mathbb{P} \text{ sous laquelle} \\ \tilde{O}_{t,u} := (R_t)^{-1} O_{t,u}, \quad 0 \leq t \leq u \\ \text{est une martingale, } \forall 0 < u \leq T, \end{array} \right.$$

Puisque $O_{u,u} = 1$, $\tilde{O}_{u,u} = (R_u)^{-1}$, et donc (H) implique que

$$\begin{aligned} \tilde{O}_{t,u} &= \mathbb{E}^* \left(\exp \left[-\int_0^u r_s ds \right] \middle| \mathcal{F}_t \right), \quad \text{donc aussi} \\ O_{t,u} &= \mathbb{E}^* \left(\exp \left[-\int_t^u r_s ds \right] \middle| \mathcal{F}_t \right). \end{aligned}$$

Pour tenter d'expliciter plus avant la quantité $O_{t,u}$, il convient de préciser la dérivée de Radon–Nikodym de la probabilité \mathbb{P}^* par rapport à \mathbb{P} . Notons L_T cette densité. Elle est telle que pour toute v.a. bornée X ,

$$\mathbb{E}^*(X) = \mathbb{E}(XL_T).$$

Si de plus X est \mathcal{F}_t -mesurable, alors en posant $L_t = \mathbb{E}(L_T | \mathcal{F}_t)$, on a

$$\mathbb{E}^*(X) = \mathbb{E}(XL_t).$$

L_t est la densité de la restriction à \mathcal{F}_t de \mathbb{P}^* par rapport à \mathbb{P} . Il résulte du théorème de Girsanov (dont une partie a été démontrée ci-dessus au chapitre 3.7) la

Proposition 8.2.1. *Il existe un processus adapté $\{q_t, 0 \leq t \leq T\}$ vérifiant*

$$\int_0^T q_t^2 dt < \infty \quad p. s.,$$

tel que pour tout $0 \leq t \leq T$, p. s.

$$L_t = \exp \left(\int_0^t q_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t q_s^2 ds \right).$$

Corollaire 8.2.2. *Le prix à l'instant t de l'obligation zéro-coupon d'échéance $u \geq t$ peut s'écrire*

$$O_{t,u} = \mathbb{E} \left(\exp \left[- \int_t^u \left(r_s + \frac{q_s^2}{2} \right) ds + \int_t^u q_s dW_s \right] \middle| \mathcal{F}_t \right).$$

PREUVE: Posons $X = \exp(-\int_t^u r_s ds)$. Il faut calculer $\mathbb{E}^*(X|\mathcal{F}_t)$. Soit Y une v.a. \mathcal{F}_t -mesurable et bornée. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^*(XY) &= \mathbb{E}(XY L_T) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}[X L_T | \mathcal{F}_t] Y) \\ &= \mathbb{E}^* \left(\frac{\mathbb{E}[X L_T | \mathcal{F}_t]}{L_t} Y \right), \end{aligned}$$

donc d'après la caractérisation de $\mathbb{E}^*(X|\mathcal{F}_t)$,

$$\mathbb{E}^*(X|\mathcal{F}_t) = \frac{\mathbb{E}[X L_T | \mathcal{F}_t]}{L_t},$$

d'où le résultat.

Proposition 8.2.3. *Pour chaque échéance u , il existe un processus adapté $\{\sigma_t^u, 0 \leq t \leq u\}$ tel que sur $[0, u]$*

$$dO_{t,u} = (r_t - \sigma_t^u q_t) O_{t,u} dt + O_{t,u} \sigma_t^u dW_t.$$

PREUVE: Utilisant d'abord la formule établie dans la dernière preuve, puis la propriété de martingale de $\{\tilde{O}_{t,u}, 0 \leq t \leq u\}$ sous \mathbb{P}^* , on obtient que pour $0 \leq s \leq t \leq u$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\tilde{O}_{t,u} L_t | \mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}^*(\tilde{O}_{t,u} | \mathcal{F}_s) L_s \\ &= \tilde{O}_{s,u} L_s. \end{aligned}$$

Donc $\{\tilde{O}_{t,u}L_t, 0 \leq t \leq u\}$ est une martingale sous \mathbb{P} , qui est strictement positive, donc son log est une semimartingale, dont la partie martingale est de la forme

$$\int_0^t \theta_s^u dW_s,$$

et à nouveau puisque $\{\tilde{O}_{t,u}L_t, 0 \leq t \leq u\}$ est une \mathbb{P} -martingale,

$$\tilde{O}_{t,u}L_t = \tilde{O}_{0,u} \exp \left(\int_0^t \theta_s^u dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t (\theta_s^u)^2 ds \right).$$

En multipliant par $R_t(L_t)^{-1}$, on obtient

$$O_{t,u} = O_{0,u} \exp \left(\int_0^t (r_s - [(\theta_s^u)^2 - q_s^2]/2) ds + \int_0^t (\theta_s^u - q_s) dW_s \right).$$

Le résultat s'en déduit en utilisant la formule d'Itô, et à condition de poser $\sigma_t^u = \theta_t^u - q_t$. \square

Si l'on rapproche la formule de la proposition de celle concernant le taux d'intérêt, à savoir

$$dR_t = r_t R_t dt,$$

on voit que l'obligation est "plus risquée" qu'un dépôt à la banque. Le terme $r_t - \sigma_t^u q_t$ est une sorte de rendement moyen relatif par unité de temps de l'obligation. Le terme $-\sigma_t^u q_t$ est la différence entre ce rendement et le taux sans risque. D'où l'interprétation de $-q_t$ comme une "prime de risque". Notons que sous la probabilité risque neutre \mathbb{P}^* , $W_t^* = W_t - \int_0^t q_s ds$ est un brownien standard, et

$$dO_{t,u} = r_t O_{t,u} dt + O_{t,u} \sigma_t^u dW_t^*.$$

8.3 Option sur obligation

Considérons pour fixer les idées une option européenne d'échéance T sur une obligation zéro coupon d'échéance T' , avec bien sûr $T \leq T'$. S'il s'agit d'un call de prix d'exercice K , la valeur de l'option à l'instant T est évidemment $(O_{T,T'} - K)_+$, et on va voir que l'on peut appliquer ici la même méthodologie qu'au chapitre 4.1.

L'évolution du portefeuille de couverture est donnée dans le cas d'une stratégie autofinancée par la formule

$$dV_t(X, Y) = X_t dR_t + Y_t dO_{t, T'}.$$

Définition 8.3.1. Une stratégie $\{(X_t, Y_t), 0 \leq t \leq T\}$ est admissible si elle est autofinancée et si la valeur actualisée

$$\tilde{V}_t(X, Y) = X_t + Y_t \tilde{O}_{t, T'}$$

du portefeuille correspondant est, pour tout t , positive et de carré intégrable sous \mathbb{P}^* .

Sous des hypothèses raisonnables, on peut couvrir une option européenne d'échéance $T < T'$.

Proposition 8.3.2. Supposons que $\sup_{0 \leq t \leq T} |r_t| < \infty$ p. s., $\inf_{0 \leq t \leq T} |\sigma_t^{T'}| > 0$, et $T < T'$. Soit H une v. a. \mathcal{F}_T -mesurable, telle que $H e^{-\int_0^T r_s ds}$ soit de \mathbb{P}^* carré intégrable.

Alors il existe V_0 et une stratégie admissible $\{(X, Y)\}$ tels que $V_T(X, Y) = H$. En outre

$$V_t(X, Y) = \mathbb{E}^* \left(e^{-\int_t^T r_s ds} H | \mathcal{F}_t \right).$$

PREUVE: On a

$$\begin{aligned} d\tilde{V}_t(X, Y) &= Y_t d\tilde{O}_{t, T'} \\ &= Y_t \tilde{O}_{t, T'} \sigma_t^{T'} dW_t^*. \end{aligned}$$

On en déduit que $\{\tilde{V}_t, 0 \leq t \leq T\}$ est une \mathbb{P}^* -martingale, donc

$$V_t(X, Y) = e^{\int_0^t r_s ds} \mathbb{E}^* \left(e^{-\int_0^T r_s ds} H | \mathcal{F}_t \right).$$

Il reste à exhiber une stratégie correspondante. Il résulte du théorème de représentation d'Itô que

$$H e^{-\int_0^T r_s ds} = \mathbb{E}^* \left(H e^{-\int_0^T r_s ds} \right) + \int_0^T J_t dW_t^*,$$

avec un certain processus $\{J_t, 0 \leq t \leq T\}$ tel que $\int_0^T J_t^2 dt < \infty$ p. s. Il suffit alors de choisir

$$Y_t = \frac{J_t}{\tilde{O}_{t, T'} \sigma_t^{T'}}, \quad X_t = \mathbb{E}^* \left(H e^{-\int_0^T r_s ds} | \mathcal{F}_t \right) - \frac{J_t}{\sigma_t^{T'}}.$$

8.4 Un modèle de taux d'intérêt

On va examiner le modèle de *Vasicek*, qui est le plus simple (mais peut-être pas le plus satisfaisant). Dans ce modèle, le processus $\{r_t, 0 \leq t \leq T\}$ est solution de l'EDS

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t,$$

où a , b et σ sont des constantes positives, et q est lui-aussi constant, $q_t = -\lambda$. Alors si $W_t^* = W_t + \lambda t$, et $b^* = b - \lambda\sigma/a$, on a équivalentement

$$dr_t = a(b^* - r_t)dt + \sigma dW_t^*.$$

On montre aisément que r_t s'écrit

$$r_t = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dW_s,$$

et que r_t suit sous \mathbb{P} la loi

$$N\left(r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}), \sigma^2 \frac{1 - e^{-2at}}{2a}\right),$$

et sous \mathbb{P}^* la même loi, avec b remplacé par b^* . Donc r_t prend une valeur négative avec probabilité non nulle, même si elle est éventuellement proche de 0.

Voyons maintenant le prix de l'obligation zéro-coupon.

$$\begin{aligned} O_{t,T} &= \mathbb{E}^* \left(e^{-\int_t^T r_s ds} \mid \mathcal{F}_t \right) \\ &= e^{-b^*(T-t)} \mathbb{E}^* \left(e^{-\int_t^T X_s ds} \mid \mathcal{F}_t \right), \end{aligned}$$

avec $\{X_s = r_s - b^*\}$ solution de l'EDS

$$dX_s = -aX_s ds + \sigma dW_s^*. \quad (8.1)$$

Alors

$$\mathbb{E}^* \left(e^{-\int_t^T X_s ds} \mid \mathcal{F}_t \right) = F(T - t, r_t - b^*),$$

où F est définie par

$$F(s, x) = \mathbb{E}^* \left(e^{-\int_0^s X_t^x dt} \right),$$

$\{X_t^x\}$ désignant la solution de l'EDS (8.1) qui vérifie $X_0 = x$. Comme $\int_0^s X_t^x dt$ est une v. a. r. gaussienne,

$$F(s, x) = \exp \left(-\mathbb{E}^* \int_0^s X_t^x dt + \frac{1}{2} \text{Var} \left[\int_0^s X_t^x dt \right] \right).$$

Or

$$\mathbb{E}^* \int_0^s X_t^x dt = x \frac{1 - e^{-as}}{a},$$

et

$$\text{Var} \left[\int_0^s X_t^x dt \right] = \int_0^s \int_0^s \text{Cov}(X_t^x, X_r^x) dt dr,$$

mais

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_t^x, X_r^x) &= \sigma^2 e^{-a(t+r)} \mathbb{E}^* \left(\int_0^t e^{as} dW_s^* \int_0^r e^{as} dW_s^* \right) \\ &= \sigma^2 e^{-a(t+r)} \frac{e^{2a(t \wedge r)} - 1}{2a}, \end{aligned}$$

d'où

$$\text{Var} \left[\int_0^s X_t^x dt \right] = \frac{\sigma^2 s}{a^2} - \frac{\sigma^2}{a^3} (1 - e^{-as}) - \frac{\sigma^2}{2a^3} (1 - e^{-as})^2.$$

Finalement

$$O_{t,T} = \exp \left(-(T - t)R(T - t, r_t) \right),$$

où $R(T - t, r_t)$, le taux d'intérêt moyen sur la période $[t, T]$, est donné par la formule

$$R(s, r) = R - (as)^{-1} \left[(R - r)(1 - e^{-as}) - \frac{\sigma^2}{4a^2} (1 - e^{-as})^2 \right],$$

avec $R = b^* - \sigma^2/2a^2$. R s'interprète comme un taux à long terme, qui est ici indépendant du "taux instantané spot" r . Cette dernière propriété est un défaut du modèle.

Chapitre 9

Appendice : Deux rappels de calcul des probabilités

9.1 Vecteurs Aléatoires Gaussiens

Si $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$, on désigne par $N(\mu, \sigma^2)$ la loi de Gauss sur \mathbb{R} , de densité $(\sigma\sqrt{2\pi})^{-1} \exp[-(x - \mu)^2/2\sigma^2]$.

Une v.a.r. X est une v.a.r. gaussienne si soit il existe $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, t.q. $X \simeq N(\mu, \sigma^2)$, soit la loi de X est la masse de Dirac en un point $\mu \in \mathbb{R}$ (cas $\sigma = 0$). Alors $\mu = \mathbb{E}(X)$, $\sigma^2 = \text{Var}(X)$.

Définition 9.1.1. *Un vecteur aléatoire X de dimension d est un vecteur aléatoire gaussien si et seulement si pour tout $c = (c_1, \dots, c_d) \in \mathbb{R}^d$, $c \cdot X \stackrel{\Delta}{=} \sum_1^d c_i X_i$ est une v.a.r. gaussienne.*

Il résulte de la définition que l'image par une application affine d'un v.a. gaussien est un v.a. gaussien.

Lemme 9.1.2. *La fonction caractéristique d'une v.a.r. X de loi $N(\mu, \sigma^2)$ est la fonction*

$$\varphi_X(u) = \exp \left[iu\mu - \frac{\sigma^2}{2}u^2 \right]$$

PREUVE: Il suffit de traiter le cas $\mu = 0$, $\sigma = 1$. Il faut montrer : $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{x^2}{2} + iux} dx = e^{-u^2/2}$, $u \in \mathbb{R}$. On va en fait montrer que pour tout

$z \in \mathbf{C}$,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{x^2}{2} + zx} dx = e^{z^2/2}$$

Cette égalité est vraie pour tout $z \in \mathbb{R}$, puisque :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{x^2}{2} + zx} dx = e^{z^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{1}{2}(x-z)^2} dx = e^{z^2/2}$$

Par convergence dominée,

$$\int \sum_1^\infty |f_n(x)| dx < \infty \Rightarrow \int \sum_1^\infty f_n(x) dx = \sum_1^\infty \int f_n(x) dx, \quad \text{donc :}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{x^2}{2} + zx} dx &= \sum_1^\infty \frac{z^n}{n! \sqrt{2\pi}} \int x^n e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \\ \text{et } e^{z^2/2} &= \sum_1^\infty \frac{z^{2n}}{2^n n!} \end{aligned}$$

Ces deux fonctions coïncidant sur \mathbb{R} , les coefficients des séries coïncident. Donc les fonctions coïncident sur \mathbf{C} . \square

Si maintenant X est un v.a. gaussien d'espérance μ et de matrice de covariance Σ alors pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, $(u, X) \simeq N((u, \mu), (\Sigma u, u))$ et donc il résulte du Lemme :

$$\begin{aligned} \varphi_X(u) &= \mathbb{E}[e^{i(u, X)}] \\ &= \exp \left[i(u, \mu) - \frac{1}{2} (\Sigma u, u) \right] \end{aligned}$$

On remarque que l'espérance et la matrice de covariance suffisent à caractériser la loi d'un vecteur aléatoire gaussien. Soit X une v.a.r. de loi $N(0, \sigma^2)$. Sa f.c. est $\varphi_X(u) = \exp\left(-\frac{\sigma^2 u^2}{2}\right)$. En développant l'exponentielle, on obtient

$$e^{-\frac{\sigma^2 u^2}{2}} = \sum_1^\infty (-1)^n \frac{(\sigma u)^{2n}}{2^n n!}$$

D'où en comparant avec le développement de e^{iuX} dont on prend l'espérance,

$$\mathbb{E}(X^{2n}) = \frac{\sigma^{2n} (2n)!}{2^n n!}, \quad \mathbb{E}(X^{2n+1}) = 0.$$

Théorème 9.1.3. *Soit $X = (X_1, \dots, X_d)$ un vecteur aléatoire gaussien de dimension d . Alors la suite de v.a.r. X_1, \dots, X_d est indépendante si et seulement si les X_k sont 2 à 2 non corrélées, i.e. $Cov(X)$ est une matrice diagonale.*

PREUVE: La non corrélation est toujours une conséquence de l'indépendance.

La réciproque n'est vraie que dans le cas gaussien. Si $\Sigma = Cov(X)$ est diagonale, alors avec $\mu = \mathbb{E}(X)$,

$$\begin{aligned} \varphi_X(u) &= \exp[i(u, \mu) - \frac{1}{2}(\Sigma u, u)] \\ &= \prod_1^d \exp[iu_k \mu_k - \frac{1}{2}\Sigma_{kk}u_k^2] \\ &= \prod_1^d \varphi_{X_k}(u_k). \end{aligned}$$

Le résultat découle alors du fait qu'une suite de v.a. X_1, \dots, X_d est indépendante ssi pour tout $u = (u_1, \dots, u_d)' \in \mathbb{R}^d$, si $X = (X_1, \dots, X_d)'$, $\varphi_X(u_1, \dots, u_d) = \prod_{i=1}^d \varphi_{X_i}(u_i)$. \square

Ce Théorème se généralise comme suit (nous omettons la preuve, qui est essentiellement la même qu'au Théorème 9.1.3).

Théorème 9.1.4. *Soit X_1, X_2, \dots, X_d des vecteurs aléatoires de dimension respective k_1, k_2, \dots, k_d , et $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)$ le v.a. de dimension $\sum_{i=1}^d k_i$ obtenu en concaténant les X_i . Si le vecteur aléatoire X est un va. gaussien, alors la suite de v.a. (X_1, \dots, X_d) est indépendante si et seulement si la matrice $Cov(X)$ est bloc-diagonale, c'est à dire qu'elle s'écrit*

$$Cov(X) = \begin{pmatrix} Cov(X_1) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & Cov(X_2) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & Cov(X_d) \end{pmatrix}.$$

Attention ! Si X et Y sont 2 v.a.r. gaussiennes, $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ n'est pas forcément un vecteur aléatoire gaussien. Donc si X et Y sont 2 v.a.r. gaussiennes non corrélées (i.e. t.q. $cov(X, Y) = 0$) X et Y ne sont pas forcément indépendantes !

Exemple 9.1.5. Soit X et V indépendantes, $X \simeq N(0, 1)$, $\mathbb{P}(V = -1) = \mathbb{P}(V = 1) = 1/2$. On pose $Y = V \times X$. Alors

$$\varphi_Y(u) = \mathbb{E}[e^{iuVX}] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[e^{iuX}] + \frac{1}{2}\mathbb{E}[e^{-iuX}] = e^{-u^2/2}.$$

Donc $Y \simeq N(0, 1)$. En outre $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X^2V) = \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(V) = 0$. Mais X et Y ne sont pas indépendantes ! Pour tout $a > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|X| \leq a) &= \mathbb{P}(\{|X| \leq a\} \cap \{|Y| \leq a\}) \\ &\neq \mathbb{P}(|X| \leq a)\mathbb{P}(|Y| \leq a) \\ &= (\mathbb{P}(|X| \leq a))^2 \end{aligned}$$

On peut vérifier directement que (X, Y) n'est pas un v. a. gaussien. $\mathbb{P}(X+Y = 0) = 1/2$, donc $X + Y$ n'est pas une v. a. r. gaussienne.

On a par ailleurs la

Proposition 9.1.6. Soit X_1, \dots, X_d des v.a.r. gaussiennes indépendantes. Alors le vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_d)'$ est un v.a. gaussien.

PREUVE: Supposons que chaque X_k est de loi $N(\mu_k, \sigma_k^2)$. Alors par l'indépendance

$$\varphi_X(u_1, \dots, u_d) = \prod_{k=1}^d \varphi_{X_k}(u_k) = \exp\left(i \sum_k u_k \mu_k - \frac{1}{2} \sum_k \sigma_k^2 u_k^2\right),$$

qui est bien la fonction caractéristique de la loi $N(\mu, \Sigma)$, où

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \sigma_d^2 \end{pmatrix}.$$

□

Soit μ un vecteur de \mathbb{R}^d et Σ une matrice $d \times d$ auto-adjointe et semi-définie positive. Si $Y = (Y_1, \dots, Y_d)$ est tel que la suite Y_1, \dots, Y_d est i. i. d., de loi commune la loi $N(0, 1)$, alors la loi de Y est la loi $N(0, I)$ sur \mathbb{R}^d , et celle de $X = \mu + \Sigma^{1/2}Y$ est la loi $N(\mu, \Sigma)$. Notons que ce n'est pas cette

formule qu'il faut utiliser en général pour simuler un v. a. de loi $N(\mu, \Sigma)$. On utilisera plutôt la formule $X = \mu + \Gamma Y$, où Γ une matrice à d lignes (et un nombre de colonnes qui peut être différent) telle que $\Gamma \Gamma' = \Sigma$. Il est en particulier assez facile de calculer les coefficients de la matrice Γ en fonction de ceux de Σ si l'on impose que Γ est une matrice $d \times d$ triangulaire inférieure. C'est la factorisation de Cholesky.

La loi d'un v.a. gaussien de dimension d n'admet pas forcément une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d . C'est le cas si et seulement si sa matrice de covariance est inversible.

Exercice 9.1.7. Soit $X = (X_1, \dots, X_d)'$ un vecteur aléatoire quelconque, tel que $\mathbb{E}[X_j^2] < \infty$ pour tout $1 \leq j \leq d$. Montrer que si sa matrice de covariance Σ n'est pas inversible, alors la loi de X n'admet pas de densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d .

Dans le cas gaussien, on a la réciproque :

Proposition 9.1.8. Soit X un v.a. de dimension d , de loi $N(\mu, \Sigma)$ [i.e. gaussien avec $\mathbb{E}(X) = \mu$, $\text{cov}(X) = \Sigma$]. Si $\text{rang}(\Sigma) = d$, alors la loi de X admet la densité :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det(\Sigma)}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\Sigma^{-1}(x - \mu), x - \mu) \right]$$

PREUVE: Posons $Y = \Sigma^{-1/2}(X - \mu)$. Alors la loi de Y est $N(0, I)$. D'après la Proposition 9.1.3, Y_1, \dots, Y_d est une suite de v.a.r. i.i.d., de loi commune $N(0, 1)$. Donc la loi de Y admet la densité :

$$f_Y(y) = (2\pi)^{-d/2} \exp(-|y|^2/2)$$

Soit $\varphi \in C_K(\mathbb{R}^d)$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\varphi(X)] &= \mathbb{E}[\varphi(\mu + \Sigma^{1/2}Y)] \\ &= (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|y|^2/2} \varphi(\mu + \Sigma^{1/2}y) dy \\ &= (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|\Sigma^{-1/2}(x-\mu)|^2/2} \varphi(x) (\det \Sigma^{-1/2}) dx \end{aligned}$$

Le résultat découle alors de ce que $C_K(\mathbb{R}^d)$ est une classe séparante. \square

Exercice 9.1.9. Donner des exemples de vecteurs aléatoires de dimension $d \geq 2$, dont la matrice de covariance est inversible, mais dont la loi n'admet pas de densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d .

9.2 Espérance Conditionnelle

9.2.1 Par rapport à une σ -algèbre

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ une tribu.

Définition de l'espérance conditionnelle d'une v. a. de carré intégrable

Soit X une v.a.r. de carré intégrable. Si l'on identifie X et sa classe d'équivalence [i.e. la classe des v.a. qui lui sont p.s. égales], on peut écrire $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Pour pouvoir considérer $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ comme un sous espace vectoriel de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on va supposer pour tout le reste de cette section que \mathcal{G} contient tous les ensembles de \mathbb{P} mesure nulle de \mathcal{F} .

Remarque 9.2.1. *L'hypothèse que nous venons de faire est en réalité inutile. En effet, si l'on note $L^2(\mathcal{G}, \mathbb{P}_{\mathcal{F}})$ le sous espace vectoriel de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ formé des classes d'équivalence qui contiennent au moins un représentant \mathcal{G} -mesurable, alors $L^2(\mathcal{G}, \mathbb{P}_{\mathcal{F}})$ est complet, comme image par une application isométrique de $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ (l'application qui à $u \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ associe l'élément de $L^2(\mathcal{G}, \mathbb{P}_{\mathcal{F}})$ qui contient u). C'est donc un sous espace vectoriel fermé de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Donc on peut se dispenser de l'hypothèse que \mathcal{G} contient tous les ensembles de \mathbb{P} -mesure nulle de \mathcal{F} . Il suffirait de remplacer ci-dessous $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ par $L^2(\mathcal{G}, \mathbb{P}_{\mathcal{F}})$.*

Définition 9.2.2. *On appelle espérance conditionnelle par rapport à \mathcal{G} l'opérateur de projection orthogonale dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sur $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$.*

X étant une v.a.r. de carré intégrable, on appelle espérance conditionnelle de X sachant \mathcal{G} - notée $\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X)$ ou $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ - l'image de la classe d'équivalence de X par l'opérateur défini ci-dessus. $\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X)$ est donc un élément de $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$, i.e. une classe d'équivalence. On considérera souvent $\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X)$ comme étant une variable aléatoire \mathcal{G} -mesurable (son choix à l'intérieur d'une classe d'équivalence est arbitraire!). Par définition de la projection orthogonale,

(*) $\mathbb{E}(YX) = \mathbb{E}(Y\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X)), \quad \forall Y \text{ v.a.r. } \mathcal{G}\text{-mesurable et de carré intégrable.}$ Notons que les propriétés de la projection orthogonale entraînent que

$$\mathbb{E}(|X - \mathbb{E}(X|\mathcal{G})|^2) = \min_{Y \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})} \mathbb{E}(|X - Y|^2),$$

autrement dit $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ est, parmi les (classes de) v. a. \mathcal{G} -mesurables et de carré intégrable, celle qui minimise la distance dans L^2 à X .

En choisissant $Y = 1$ dans (*), on obtient :

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X)) = \mathbb{E}(X).$$

Lemme 9.2.3. *Soit X une v.a.r. de carré intégrable. Si $X \geq 0$ p.s., alors $\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X) \geq 0$ p.s.*

PREUVE: En appliquant (*) avec $Y = \mathbf{1}_{\{\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X) < 0\}}$, on obtient :

$$0 \leq \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X) < 0\}}X] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X) < 0\}}\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X)] \leq 0$$

D'où

$$\mathbb{P}(\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X) < 0) = 0.$$

□

Soit à nouveau $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

$$X = X^+ - X^-$$

D'après la linéarité de la projection orthogonale,

$$\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X) = \mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X^+) - \mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X^-)$$

Le Lemme 9.2.3 entraîne que $\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X^+) \geq 0$, $\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X^-) \geq 0$ p.s. Donc :

$$|\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X)| \leq \mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X^+) + \mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X^-) = \mathbb{E}^{\mathcal{G}}(|X|) \text{ p.s.,}$$

d'où, par la formule établie juste avant le Lemme 9.2.3,

$$(**) \quad \mathbb{E}[|\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X)|] \leq \mathbb{E}(|X|).$$

Définition de l'espérance conditionnelle d'une v. a. intégrable

Le Théorème qui suit contient la définition de l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X)$ dans le cas d'une v.a.r. X intégrable.

Théorème 9.2.4. *Si X est une v.a.r. intégrable, $\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X)$ est l'unique classe d'équivalence de v.a.r. intégrables qui vérifie :*

(i) $\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X)$ est \mathcal{G} -mesurable, et

(ii) $\mathbb{E}(ZX) = \mathbb{E}(Z\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X))$, pour toute v.a.r. Z \mathcal{G} -mesurable et bornée

PREUVE: Etant donné X intégrable, posons $X_n(\omega) = X(\omega)\mathbf{1}_{\{|X(\omega)| \leq n\}}$. X_n est de carré intégrable et on peut définir $\mathbb{E}(X_n|\mathcal{G})$. En outre la suite $\{X_n, n \geq 1\}$ est de Cauchy dans $L^1(\mathbb{P})$. Il résulte alors de (***) que la suite $\{\mathbb{E}(X_n|\mathcal{G})\}$ est aussi de Cauchy dans $L^1(\mathbb{P})$. Appelons $\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X)$ sa limite. Clairement (i) est satisfait. En outre, on sait que

$$\mathbb{E}(ZX^n) = \mathbb{E}(Z\mathbb{E}^{\mathcal{G}}[X^n]), \quad \forall Z \mathcal{G}\text{-mesurable et bornée.}$$

(ii) s'obtient alors par passage à la limite dans $L^1(\Omega)$ dans cette identité.

L'unicité se déduit aisément du fait qui suit. Si Y est \mathcal{G} -mesurable et intégrable, et vérifie $\int_G Y d\mathbb{P} = 0$ pour tout $G \in \mathcal{G}$, alors

$$\int_{\{Y>0\}} Y d\mathbb{P} = 0 \text{ et } \int_{\{Y<0\}} Y d\mathbb{P} = 0. \text{ Donc } Y = 0 \text{ p. s.}$$

On obtient alors le

Corollaire 9.2.5. *Si X est une v.a.r. intégrable, $\mathbb{E}^{\mathcal{G}}[X]$ est l'unique (classe d'équivalence de) v.a.r. intégrables qui vérifie :*

(i) $\mathbb{E}^{\mathcal{G}}[X]$ est \mathcal{G} -mesurable.

(ii)' Pour tout $G \in \mathcal{G}$, $\int_G X d\mathbb{P} = \int_G \mathbb{E}^{\mathcal{G}}[X] d\mathbb{P}$.

Exemple 9.2.6. *Supposons que \mathcal{G} est engendrée par une partition finie (B_1, \dots, B_n) de Ω , avec $\mathbb{P}(B_i) > 0$ pour $1 \leq i \leq n$. Alors $\mathbb{E}^{\mathcal{G}}[X]$ est la v.a.r. constante sur chaque B_i donnée par :*

$$\mathbb{E}^{\mathcal{G}}[X](\omega_i) = \frac{1}{\mathbb{P}(B_i)} \int_{B_i} X(\omega) \mathbb{P}(d\omega), \quad \omega_i \in B_i.$$

En particulier, si $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathbb{E}^{\mathcal{G}}[X] = \mathbb{E}[X]$.

Définition de l'espérance conditionnelle d'une v. a. non négative

Soit X une v.a.r, t. q. $X \geq 0$ p.s. Alors si $X_n \triangleq \inf(X, n)$, X_n est intégrable pour tout n , et $X_n \uparrow X$ p.s. Il résulte du Lemme 9.2.3 que $\{\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X_n)\}$ est une suite p.s. croissante, et on peut définir $\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X)$ comme la limite p.s. de la suite $\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X_n)$. On pourrait définir plus généralement l'espérance conditionnelle d'une v. a. quasi-intégrable.

9.2.2 Propriétés de l'espérance conditionnelle

Proposition 9.2.7. *Si X, X_1, X_2 sont des v.a.r. intégrables,*

- a) $\mathbb{E}^{\mathcal{G}}[aX_1 + bX_2] = a\mathbb{E}^{\mathcal{G}}[X_1] + b\mathbb{E}^{\mathcal{G}}[X_2]$
- b) $X \geq 0$ p. s. $\Rightarrow \mathbb{E}^{\mathcal{G}}[X] \geq 0$ p. s.
 $X > 0$ p. s. $\Rightarrow \mathbb{E}^{\mathcal{G}}[X] > 0$ p. s.
- c) Si \mathcal{H} et $\mathcal{G} \vee \sigma(X)$ sont indépendantes,

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G} \vee \mathcal{H}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$$

en particulier, si \mathcal{H} et X sont indépendantes,

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{H}] = \mathbb{E}[X]$$

- d) Si $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$, $\mathbb{E}^{\mathcal{H}}[\mathbb{E}^{\mathcal{G}}[X]] = \mathbb{E}^{\mathcal{H}}[X]$ en particulier, $\mathbb{E}[\mathbb{E}^{\mathcal{G}}[X]] = \mathbb{E}[X]$.
- e) Si X est \mathcal{G} -mesurable, Y et XY sont intégrables, alors

$$\mathbb{E}^{\mathcal{G}}[YX] = X\mathbb{E}^{\mathcal{G}}[Y]$$

Remarque 9.2.8. *Une conséquence de cette Proposition est la double assertion suivante, qui donne les deux cas où $\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X)$ s'explique aisément. Soit X une v.a.r. intégrable.*

Si X est \mathcal{G} -mesurable, alors $\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X) = X$.

Si X et \mathcal{G} sont indépendantes, alors $\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X) = \mathbb{E}(X)$.

PREUVE: a) découle de ce que la projection orthogonale dans L^2 est linéaire, propriété qui se conserve par passage à la limite dans L^1 .

b) la 1ère partie se démontre comme au Lemme 9.2.3. La deuxième en observant que $\int_{\{\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X) \leq 0\}} X d\mathbb{P} = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X) \leq 0) = 0$, dès que $X > 0$ p.s.

c) On utilise le Corollaire ??, avec

$$\mathcal{C} = \{G \cap H; G \in \mathcal{G}, H \in \mathcal{H}\}$$

La deuxième partie résulte de la première en posant $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$.

d) Pour tout $H \in \mathcal{H}$, $\int_H X d\mathbb{P} = \int_H \mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X) d\mathbb{P} = \int_H \mathbb{E}^{\mathcal{H}}[\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X)] d\mathbb{P}$. La deuxième partie s'obtient alors en choisissant $\mathcal{H} = \{\emptyset, \Omega\}$.

e) Supposons tout d'abord X \mathcal{G} -mesurable et bornée. Pour tout Z \mathcal{G} -mesurable et bornée,

$$\mathbb{E}[Z\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(XY)] = \mathbb{E}[ZXY] = \mathbb{E}[ZX\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(Y)]$$

Pour passer au cas général, on approche X par $X_n = X\mathbf{1}_{\{|X| \leq n\}}$, et on remarque que $X_n \rightarrow X$ p.s. et $X_n Y \rightarrow XY$ dans $L^1(\Omega)$. \square

On a un Théorème de convergence dominée pour les espérances conditionnelles :

Proposition 9.2.9. *Si $X_n \rightarrow X$ p.s. et s'il existe Z intégrable t.q. $|X_n| \leq Z$ p.s. pour tout $n \geq 1$, alors X_n et X sont intégrables et*

$$\mathbb{E}^{\mathcal{G}}[X_n] \rightarrow \mathbb{E}^{\mathcal{G}}[X] \text{ p.s. et dans } L^1(\Omega)$$

Montrons d'abord le :

Lemme 9.2.10. *Soit $\{X_n\}_{n \geq 1}$ une suite croissante [resp. décroissante] de v.a.r. intégrables, et X une v.a.r. intégrable. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) $X_n \rightarrow X$ p.s.
- (ii) $X_n \rightarrow X$ dans $L^1(\Omega)$.

De plus, si l'une des deux assertions est vraie, $\mathbb{E}^{\mathcal{G}}[X_n] \rightarrow \mathbb{E}^{\mathcal{G}}[X]$ p.s. et dans $L^1(\Omega)$.

PREUVE: Si $X_n \uparrow X$ p.s. ou $X_n \downarrow X$ p.s., alors $|X - X_n| \downarrow 0$ p.s., et $|X - X_n| \leq |X - X_0|$ intégrable, donc $\mathbb{E}(|X - X_n|) \rightarrow 0$. Réciproquement, $X_n \rightarrow X$ dans $L^1(\Omega)$ entraîne $X_n \leq X$ p.s. [resp. $X_n \geq X$ p.s.]. Donc il existe Z intégrable t.q. $X_n \uparrow Z$ p.s. [resp. $X_n \downarrow Z$ p.s.]. Alors par unicité de la limite en probabilités, $Z = X$ p.s. Enfin, (ii) $\Rightarrow \mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X_n) \rightarrow \mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X)$ dans $L^1(\Omega)$, donc aussi p.s. par ce qui précède, car $\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X_n) \uparrow$ ou \downarrow .

PREUVE: DE LA PROPOSITION 9.2.9

$$\mathbb{E}^{\mathcal{G}}\left(\inf_{m \geq n} X_m\right) \leq \inf_{m \geq n} \mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X_m) \leq \sup_{m \geq n} \mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X_m) \leq \mathbb{E}^{\mathcal{G}}\left(\sup_{m \geq n} X_m\right)$$

Or $\inf_{m \geq n} X_m \uparrow X$, $\sup_{m \geq n} X_m \downarrow X$ p.s., et aussi dans $L^1(\Omega)$ d'après le lemme, que l'on peut utiliser grâce à l'hypothèse de domination, d'où :

$$\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X) \leq \liminf \mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X_n) \leq \limsup \mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X_n) \leq \mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X)$$

d'où

$$\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X_n) \rightarrow \mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X) \text{ p.s.}$$

□

Proposition 9.2.11. *Pour tout $p \geq 1$,*

(i) *Si X est de puissance p -ième intégrable, $\mathbb{E}^{\mathcal{G}}[X]$ est de puissance p -ième intégrable.*

(ii) *Si $X_n \rightarrow X$ dans $L^p(\Omega)$,*

$$\mathbb{E}^{\mathcal{G}}[X_n] \rightarrow \mathbb{E}^{\mathcal{G}}[X] \text{ dans } L^p(\Omega).$$

PREUVE: Dans les cas $p = 1$ et $p = 2$, ces propriétés résultent de la construction. Dans le cas général, ces propriétés résultent de :

$$(***) \quad |\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X)|^p \leq \mathbb{E}^{\mathcal{G}}[|X|^p],$$

qui entraîne $\mathbb{E}[|\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X)|^p] \leq \mathbb{E}[|X|^p]$. (***) est un cas particulier de l'inégalité de Jensen pour les espérances conditionnelles :

Proposition 9.2.12. *Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors pour toute v.a.r. intégrable X t.q. $\varphi(X)$ est également intégrable,*

$$\varphi[\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X)] \leq \mathbb{E}^{\mathcal{G}}[\varphi(X)].$$

PREUVE: On va utiliser la propriété suivante des fonctions convexes (qui est facile à vérifier dans le cas où φ est de classe C^1) : il existe une suite (a_n, b_n) dans \mathbb{R}^2 t.q. :

$$\varphi(x) = \sup_n (a_n x + b_n), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Donc

$$\begin{aligned} \varphi(X) &\geq a_n X + b_n \text{ p.s., } \forall n \geq 1, \\ \text{et } \mathbb{E}^{\mathcal{G}}[\varphi(X)] \text{ p.s.} &\geq \sup_n (a_n \mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X) + b_n) = \varphi(\mathbb{E}^{\mathcal{G}}[X]) \end{aligned}$$

□

Proposition 9.2.13. *Soit X un v.a. de dimension d , Y un v.a. de dimension k , \mathcal{G} une σ -algèbre tels que X est \mathcal{G} -mesurable, Y et \mathcal{G} sont indépendantes. Alors si f une application mesurable de $\mathbb{R}^{d \times k}$ dans \mathbb{R} t.q. $f(X, Y)$ est intégrable. Alors*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(X, Y)|\mathcal{G}] &= \int_{\mathbb{R}^k} f(X, y)\mathbb{P}_Y(dy) \\ &= \mathbb{E}[f(x, Y)]\Big|_{x=X}\end{aligned}$$

PREUVE: Supposons tout d'abord que f est de la forme $f(x, y) = g(x) \times h(y)$, avec g (resp. h) mesurable bornée de \mathbb{R}^d (resp. \mathbb{R}^k) dans \mathbb{R} . Alors

$$\mathbb{E}[h(X)g(Y)|\mathcal{G}] = h(X)\mathbb{E}[g(Y)],$$

donc dans ce cas les deux formules de l'énoncé sont correctes. Le résultat est bien sûr encore vrai pour $f(x, y) = \sum_{i=1}^n a_i h_i(x) g_i(y)$, si les h_i et les g_i sont mesurables et bornées. Le résultat général est alors une conséquence du Théorème des classes monotones. \square

9.2.3 Par rapport à une variable aléatoire

Rappelons qu'à tout v.a. Y , on associe sa "tribu naturelle" $\sigma(Y)$, qui est la plus petite sous-tribu de \mathcal{F} qui rend Y mesurable. On pose :

Définition 9.2.14. *Si X est une v.a.r. intégrable, on définit l'espérance conditionnelle de X , sachant Y , par :*

$$\mathbb{E}(X|Y) \triangleq \mathbb{E}(X|\sigma(Y))$$

\square

Dans cette définition, Y peut être un vecteur aléatoire de dimension quelconque. Remarquons que si $\sigma(Y) = \sigma(Y')$

$$\mathbb{E}(X|Y) = \mathbb{E}(X|Y') \text{ p.s.}$$

Chapitre 10

Exercices

Exercice 10.0.15. *A partir des mêmes inégalités à l'instant T , montrer que si C_t désigne le prix à l'instant t d'un call européen d'échéance T et de prix d'exercice K , sur un sous-jacent de prix $\{S_t\}$ dans le modèle de Black-Scholes,*

$$S_t - Ke^{-r(T-t)} \leq C_t \leq S_t.$$

Montrer que le prix du put européen P_t vérifie quant à lui

$$P_t \leq Ke^{-r(T-t)}.$$

Exercice 10.0.16. *Soit $\{S_t, 0 \leq t \leq T\}$ le prix d'un sous-jacent qui suit le modèle de Black-Scholes. On pose $U_t = \log S_t$. Dédurre de la formule d'Itô la forme de la différentielle de U_t , en fonction de dt et dB_t^* . On pose $v(t, y) = u(t, e^y)$, où $\{u(t, x)\}$ est la solution de l'EDP de Black-Scholes. Ecrire une EDP parabolique satisfaite par $\{v(t, y); 0 \leq t \leq T, y \in \mathbb{R}\}$.*

Exercice 10.0.17. *(Option "chooser") On considère une option sur une action $\{S_t, 0 \leq t \leq T\}$ (laquelle suit le modèle de Black-Scholes) qui fonctionne de la façon suivante : étant donnés $0 \leq t \leq T$ et $K > 0$, à l'instant 0 , l'acheteur de l'option s'acquitte de la prime X_0 ; à l'instant t il choisit entre call et put; à l'instant T il a le droit d'exercer l'option choisie à l'instant t , au prix d'exercice K .*

1 *On note comme dans le cours C_t (resp. P_t) le prix du call (resp. du put) à l'instant t . Montrer que l'intérêt de l'acheteur est de choisir le call (resp. le put) si $C_t > P_t$ (resp. $P_t > C_t$). Vérifier à l'aide de la formule de parité call-put que $C_t \neq P_t$ p.s., sous \mathbb{P} comme sous \mathbb{P}^* .*

2 En déduire que l'option rapporte p.s. à son acheteur à l'instant T

$$\begin{aligned} H &= (S_T - K)_+ \mathbf{1}_{\{C_t \geq P_t\}} + (K - S_T)_+ \mathbf{1}_{\{C_t < P_t\}} \\ &= (S_T - K)_+ + (K - S_T) \mathbf{1}_{\{C_t < P_t\}} \\ &= (K - S_T)_+ + (S_T - K) \mathbf{1}_{\{C_t > P_t\}} \end{aligned}$$

3 On rappelle que la théorie générale des options nous indique que $X_0 = e^{-rT} \mathbb{E}^*(H)$. Ecrire les événements $F_t = \{C_t < P_t\}$ et $G_t = \{C_t > P_t\}$ en fonction de S_t , K et $r(T - t)$. Montrer que $e^{-rT} \mathbb{E}^*(S_T \mathbf{1}_{F_t}) = e^{-rt} \mathbb{E}^*(S_t \mathbf{1}_{F_t})$, et de même pour G_t .

4 En déduire des formules pour les quantités $X_0 - C_0$ et $X_0 - P_0$, que l'on explicitera sous une forme analogue à celle des formules pour C_0 et P_0 à la fin de la section 2.

5 Montrer que l'option "chooser" a la valeur $\max(C_t, P_t)$ à l'instant t . On note $\{u(s, x)\}$ la solution de l'EDP de Black-Scholes pour le call, $\{v(s, x)\}$ la solution de la même EDP pour le put (ces EDP ne diffèrent que par leur condition finale à l'instant T). On note enfin $\{w(s, x), 0 \leq s \leq t, x > 0\}$ la solution de la même EDP avec la condition finale $\sup(u(t, x), v(t, x))$ à l'instant t . Décrire un portefeuille de couverture pour l'option "chooser", à l'aide de ces trois quantités.

Exercice 10.0.18. Programmation On considère une option d'achat (call) européenne portant sur un sous-jaçant dont le cours à l'instant 0 est de 105 Euros, au prix d'exercice $K = 110$ Euros, à échéance d'un an, avec un taux bancaire à 5% (i.e. $rT = 0,05$), et une volatilité telle que $\sigma\sqrt{T} = 0,3$.

1 Calculer le prix du call en appliquant la méthode de Monte-Carlo à la formule

$$C_0 = \mathbb{E}^* \left[(S_T - Ke^{-rT})_+ \right],$$

avec 1 000 tirages. On prendra soin d'évaluer (de façon approchée) la variance de la v.a. dont on cherche à estimer l'espérance, et on donnera un intervalle de confiance pour la quantité cherchée.

2 Faire le même calcul (y compris l'intervalle de confiance) en combinant la même méthode appliquée à la formule pour le prix du put :

$$P_0 = \mathbb{E}^* \left[(Ke^{-rT} - S_T)_+ \right],$$

avec le même nombre de tirages, et la formule de parité call-put.

3 Calculer une troisième fois le prix de la même option d'achat, en utilisant cette fois la formule

$$C_0 = S_0 F(d_1) - K e^{-rT} F(d_2),$$

avec

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \log\left(\frac{S_0}{K}\right) + \frac{r\sqrt{T}}{\sigma} + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2},$$

$$d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \log\left(\frac{S_0}{K}\right) + \frac{r\sqrt{T}}{\sigma} - \frac{\sigma\sqrt{T}}{2},$$

et la fonction de répartition F de la $N(0, 1)$ fournie par Matlab.

4 Comparer les résultats avec ceux donnés par un "pricer" à trouver sur Internet.

5 Le prix du marché pour l'option ci-dessus étant de 15 Euros, en déduire la volatilité implicite (i.e. inverser la formule de Black-Scholes) en utilisant la méthode de Newton.

Exercice 10.0.19. Programmation Dans le modèle avec plusieurs sous-jacents de la section 4.6, on note C le prix du call de maturité T , de prix d'exercice K , portant sur un panier comportant a_i actions numéro i , $1 \leq i \leq d$, et P le prix du put correspondant, i. e. $C = E_0$ avec

$$h(x) = \left(\sum_{i=1}^d a_i x_i - K \right)_+,$$

et $P = E_0$ avec

$$h(x) = \left(K - \sum_{i=1}^d a_i x_i \right)_+,$$

avec E_0 la quantité définie par la formule (4.4). On demande d'appliquer la méthode de Monte Carlo au calcul du call dans le cas de cette option avec $d = 5$,

$$a = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 8 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, S_0 = \begin{pmatrix} 80 \\ 95 \\ 105 \\ 75 \\ 35 \end{pmatrix}, K = 2000, rT = 0,05,$$

$$\sqrt{T}\Sigma = \begin{pmatrix} 0,3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le prix du call en appliquant la méthode de Monte-Carlo à la formule pour C_0 avec 1 000 tirages. On prendra soin d'évaluer (de façon approchée) la variance de la v.a. dont on cherche à estimer l'espérance, et on donnera un intervalle de confiance pour la quantité cherchée.
2. Préciser la formule de parité call-put dans ce cas. Faire le même calcul (y compris l'intervalle de confiance) en combinant la même méthode appliquée à la formule pour le prix du put P_0 avec le même nombre de tirages, et la formule de parité call-put. Comment les deux approches se comparent-elles ?
3. Quelles méthodes de variables antithétiques peut-on combiner avec la méthode de la question précédente ?

Bibliographie

- [1] F. E. Benth : *Option theory with stochastic analysis*, Universitext, Springer, 2004.
- [2] L. Breiman : *Probability*, Addison–Wesley, 1968. Réédition SIAM 1992.
- [3] S. Karlin, H. Taylor : *A second Course in Stochastic Processes*, Acad. Press 1981.
- [4] D. Lamberton, B. Lapeyre : *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, Mathématiques et Applications **9**, Ellipses, 1991.
- [5] B. Lapeyre, É. Pardoux, R. Sentis : *Méthodes de Monte–Carlo pour les équations de la physique*, Mathématiques et Applications **29**, Springer 1998.
- [6] M. Musiela, M. Rutkowski, *Martingale Methods in Financial Modeling : Theory and Applications*, Springer 1997.
- [7] E. Pardoux, *Intégration et Probabilités*.