Université de Provence — Centre de Mathématiques et d'Informatique
Master Mathématiques et Applications, 1ère année — Module de Probabilités

Examen partiel du 31/10/2007

Exercice

1. A tout nombre réel x, on associe sa *partie positive* $x^+ = \sup(x, 0)$ et sa *partie négative*, qui est le nombre positif $x^- = \sup(-x, 0)$. Donc $x = x^+ - x^-$, $|x| = x^+ + x^-$.
   - a. Montrer que si $x, y \geq 0$, $(x - y)^+ \leq x$.
   - b. Montrer que pour tout réel a, $|a| = 2a^+ - a$.
2. Soit $\{X_n,\ n \geq 1\}$ une suite de v. a. r. non négatives ($X_n \geq 0$ p. s., $\forall n \geq 1$), telles que $X_n \to X$ en probabilité, quand $n \to \infty$. On suppose en outre que $\mathbb{E}(X_n) \to \mathbb{E}(X)$ quand $n \to \infty$, avec $\mathbb{E}(X_n) < \infty$ $\forall n \geq 1$, et $\mathbb{E}(X) < \infty$.
   a. Montrer que $X \geq 0$ p. s.
   b. Montrer que $\mathbb{E}[(X - X_n)^+] \to 0$, quand $n \to \infty$.
   c. Montrer que $X_n \to X$ dans $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Problème

On rappelle que
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

1. Montrer que pour tout $c > 0$, la fonction
$$f_c(x) = \frac{c}{\pi(x^2 + c^2)}, \quad x \in \mathbb{R}$$
est la densité de probabilité d'une loi, appelée loi de Cauchy de paramètre c.
2. Montrer que si X est une v. a. r. de loi de Cauchy, alors X n'est pas intégrable (on ne peut pas définir son espérance) et que $\mathbb{E}[X^2] = +\infty$.
3. Montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et de même loi, avec $\mathbb{E}[X^2] < \infty$, alors
$$\mathrm{Var}\left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\right) = \mathrm{Var}(X).$$
4. Soit Z une v. a. r. de loi exponentielle symétrique de paramètre $\lambda > 0$, i. e. de densité
$$\frac{\lambda}{2} \exp(-\lambda|x|), \quad x \in \mathbb{R}.$$
Montrer que la fonction caractéristique de la v. a. r. Z est donnée par
$$\varphi_Z(u) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + u^2}, \quad u \in \mathbb{R}.$$
5. En déduire que la fonction caratéristique de la v. a. r. X de loi de Cauchy de paramètre c est donnée par la formule
$$\varphi_X(u) = \exp(-c|u|), \quad u \in \mathbb{R}.$$

6. Montrer que si X et Y sont deux v. a. r. indépendantes, respectivement de loi de Cauchy de paramètre c, et de loi de Cauchy de paramètre c', alors $X+Y$ suit la loi de Cauchy de paramètre $c+c'$.
7. Montrer que si X suit la loi de Cauchy de paramètre c, et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors αX suit la loi de Cauchy de paramètre $|\alpha|c$.
8. Montrer que si X et Y sont deux v. a. r. indépendantes, toutes deux de loi de Cauchy de paramètre c, alors $\frac{X+Y}{2}$ suit la même loi. Pourquoi ce résultat entraîne-t-il nécessairement que $\mathbb{E}[X^2] = +\infty$?
9. Montrer que si la loi de X est symétrique par rapport à 0 (i. e. si X et $-X$ ont même loi), alors $\varphi_X(u)$ est réel pour tout $u \in \mathbb{R}$.
10. Montrer que si X et Y sont deux v. a. r. indépendantes non p. s. constantes, de même loi symétrique par rapport à 0, et telles que pour tous les α, $\beta > 0$, $\alpha X + \beta Y$ a la même loi que $(\alpha+\beta)X$, alors la loi commune de X et de Y est nécessairement une loi de Cauchy. (On utilisera la question précédente, et on posera $\psi(u) = \log \varphi_X(u)$).

Rappel Si Y est une v. a. r. de loi de densité g, alors sa fonction caractéristique est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\varphi_Y(u) = \mathbb{E}[\exp(iuY)] = \int_{\mathbb{R}} \exp(iux)g(x)dx.$$

Si en outre

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi_Y(u)|du < \infty,$$

alors nécessairement la loi de Y admet la densité

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \exp(-iux)\varphi_Y(u)du.$$