Ecole Nationale Supérieure des Mines et de la Métallurgie (ENSMM)–Annaba
Module Analyse II
2016–2017

Differentiability of Functions with several variables

Exercice 1. Calculer avec deux méthodes la dérivée $g'(t)$ dans les cas suivants:

1.
$$g(t) = f(x(t), y(t)), \tag{1}$$
avec
$$x(t) = t, \quad y(t) = \exp(t), \qquad f(x, y) = x^2 - y^2.$$

2.
$$g(t) = f(x(t), y(t), z(t)), \tag{2}$$
avec
$$x(t) = \sin t, \quad y(t) = \cos t \quad z(t) = \tan(t), \qquad f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Exercice 2. En utilisant la définition de differentiabilité, vérifier que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est différentiable dans le point indiqué:

1.
$$f(x, y) = x\sqrt{y}, \qquad (1, 1) \tag{3}$$

2.
$$f(x, y) = |x| \ln(1 + y), \qquad (0, 0) \tag{4}$$

Exercice 3. Compute the partial derivatives of the following functions on their domaines of definition:

1.
$$f(x, y) = (x^2 + y^2) \exp(-xy), \tag{5}$$

2.
$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}. \tag{6}$$

Exercice 4. Consider the function f defined by

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases} \tag{7}$$

1. Is f continuous?
2. Does the directional derivative $D_v f(0, 0)$ exist for all $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. We deduce then that f is not differentiable in $(0, 0)$.
3. Compute the partial derivatives of f in $(0, 0)$.
4. Use the previous question combined with the definition of differentiability to prove that f is not differentiable in $(0, 0)$.

Exercice 5. Trouver les derivees partielles d'ordre 2 au point $(0, 0)$ pour les fonctions suivantes:

1.
$$f(x,y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0),$$
$$f(0,0) = 0.$$

2.
$$f(x,y) = x^2 \arctan\frac{y}{x} - y^2 \arctan\frac{x}{y}, \quad x \neq 0, y \neq 0$$
$$f(x,y) = 0, \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad y \neq 0.$$

Exercice 6. Considérons la fonction f definee par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \ (x,y) = (0,0). \end{cases} \tag{8}$$

1. La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?
2. Calculer derivées partielles d'ordre un f. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 7. Considerons

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{4xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \ (x,y) = (0,0). \end{cases} \tag{9}$$

1. Calculer les derivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ pour $(x_0,y_0) \neq (0,0)$.
2. Calculer les derivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Exercice 8. Soit f une fonction a valuers reelles et differentiable sur $\mathbb{R}^2$. la fonction f est dite homogène de degré k si pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda > 0$, on a
$$f(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda^k f(\boldsymbol{x}).$$

1. Soit $\alpha > 0$ donnée. Verifier que la fonction suivante est homogène de degré 1 (un):
$$f(x,y) = x^\alpha y^{1-\alpha}$$
2. Montrer que toute fonction f homogène de degré k, elle verifié
$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = kf(x,y).$$

Exercice 9. Soit f une fonction a valuers reelles et de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Considerons la fonction h definie par:

$$h(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Montrer l'identité suivante:

$$f_{xx} + f_{yy} = h_{rr} + \frac{1}{r^2}h_{\theta\theta} + \frac{1}{r}h_r. \tag{10}$$